Une approche de la stabilisation interne par l'analyse algébrique

III. Sur une forme générale des contrôleurs stabilisants basée sur le rang stable

Alban QUADRAT[1],

[1] INRIA Sophia-Antipolis, projet Café,
2004, Route des Lucioles BP 93, 06902 Sophia Antipolis cedex, France.

Alban.Quadrat@sophia.inria.fr
http://www-sop.inria.fr/cafe/Alban.Quadrat/index.html

Résumé— **Ce papier a pour but de donner une vue générale des différents résultats récemment obtenus sur la stabilisation interne des systèmes linéaires de dimension infinie. On s'attachera à faire ressortir les principales idées plus que la technique utilisée. En particulier, nous donnerons des conditions nécessaires et suffisantes à la stabilisation interne et à l'existence de factorisations doublement copremières faibles ou fortes. Nous caractériserons alors les algèbres de systèmes SISO stables A sur lesquelles tout système − défini par une matrice de transfert à coefficients dans le corps de fractions $K = Q(A)$ de A − est stabilisable de manière interne ou admet des factorisations doublement copremières faibles ou fortes.**

Mots-clés— **Approche fractionnaire des problèmes de synthèse, stabilisation interne, factorisations copremières à gauche/droite/doublement, contrôleurs stabilisants, stabilisation forte/simultanée, théorie des modules, domaines de Sylvester cohérents/Prüfer/Bézout, rang stable.**

I. Introduction

Dans cette dernière partie du papier "Une approche de la stabilisation interne par l'analyse algébrique" [12], [13], nous exposons quelques résultats nouveaux sur la *stabilisation forte* (stabilisation d'un système à l'aide d'un contrôleur stable) et *simultanée* (stabilisation de plusieurs systèmes par un même contrôleur) [2], [22]. Ces résultats sont basés sur une forme canonique que possèdent certains contrôleurs stabilisants. Cette forme canonique dépend d'un entier positif qui est à un invariant de l'anneau A de systèmes SISO stables, appelé *rang stable de A* [1]. En utilisant un résultat de S. Treil sur le rang stable de $H_\infty(\mathbb{D})$ [19], nous montrons que tout système MIMO − défini par une matrice de transfert à coefficients dans le corps de fractions de $H_\infty(\mathbb{C}_+)$ − est fortement stabilisable. De manière équivalente, tout couple de systèmes stabilisables peut toujours être stabilisé simultanément par un même contrôleur. Finalement, en utilisant un résultat de D. Suárez sur le rang stable topologique de $H_\infty(\mathbb{D})$ [18], nous montrons que tout système SISO − défini par une fonction de transfert dans le corps de fractions de $H_\infty(\mathbb{C}_+)$ − est aussi proche que l'on veut d'un système stabilisable. Pour plus de détails sur ces résultats, nous renvoyons le lecteur à [14].

II. Rang stable d'un anneau commutatif

Nous renvoyons le lecteur à [12], [13] pour les notations, certaines définitions ainsi que pour une description de *l'approche fractionnaire des problèmes de stabilisation* que nous adoptons ici. Soit A un anneau intègre commutatif et

$$K = Q(A) = \{n/d \mid 0 \neq d,\, n \in A\}$$

son corps de fractions.

Définition 1: Un vecteur $a = (a_1 : \ldots : a_n) \in A^n$ est dit *unimodulaire* s'il existe $b = (b_1 : \ldots : b_n)^T \in A^n$ tel que :

$$< a,\, b >= \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i = 1.$$

Ainsi, un vecteur est unimodulaire ssi il admet un inverse à droite.

Exemple 1: − Considérons $A = RH_\infty$ [12], [22]. Le vecteur $\left(\frac{(s-1)^2}{(s+1)^2} : \frac{s}{(s+1)^2}\right) \in A^2$ est unimodulaire car :

$$\left(\frac{(s-1)^2}{(s+1)^2} : \frac{s}{(s+1)^2}\right) \left(\begin{array}{c} \frac{s^2+3s+1}{(s+1)^2} \\ \frac{3s^2+10s+3}{(s+1)^2} \end{array}\right) = 1.$$

− Considérons l'anneau $A = H_\infty(\mathbb{C}_+)$ [12]. Le vecteur $(1 - e^{-2s} :\, 1 + e^{-2s}) \in A^2$ est unimodulaire car :

$$(1 - e^{-2s} :\, 1 + e^{-2s}) \left(\begin{array}{c} \frac{3+2\,e^{-2s}}{2} \\ \frac{-1+2\,e^{-2s}}{2} \end{array}\right) = 1.$$

− Considérons $A = \mathbb{R}[s]$ et le vecteur $(s :\; s^2 + 1) \in A$. Ce vecteur est unimodulaire car $s\,(-s) + (s^2 + 1) = 1$.

Nous noterons par $\mathrm{U}_n(A)$ l'ensemble des vecteurs unimodulaires de A^n. En particulier, nous avons

$$\mathrm{U}_1(A) = \{a \in A \mid a^{-1} \in A\},$$

c-à-d, $\mathrm{U}_1(A)$ est le *groupe des unités* de A.

Définition 2: Un vecteur $(a_1 : \ldots : a_n) \in A^n$ est dit *stable* s'il existe $(b_1 : \ldots : b_{n-1})^T \in A^{n-1}$ tel que :

$$(a_1 + b_1\, a_n : \ldots : a_{n-1} + b_{n-1}\, a_n) \in \mathrm{U}_{n-1}(A).$$

Notons que le mot *stable* sera utilisé à la fois pour désigner la stabilité des systèmes (stabilité interne) mais aussi en tant que noms de certains concepts algébriques (vecteurs/matrices/rangs stables) : ces deux sens différents ne doivent pas être confondus par la suite.

Remarquons qu'un vecteur stable de A^n est unimodulaire. En effet, si l'on note par $(c_1 : \ldots : c_{n-1})$ l'inverse à droite de $(a_1 + b_1\, a_n : \ldots : a_{n-1} + b_{n-1}\, a_n)$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n-1}(a_i + b_i\, a_n)\, c_i = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} a_i\, c_i + a_n \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\, c_i\right) = 1.$$

Exemple 2: – Reconsidérons le premier vecteur unimodulaire de l'Exemple 1. Ce vecteur est stable car :

$$\tfrac{(s-1)^2}{(s+1)^2} + 4\, \tfrac{s}{(s+1)^2} = 1 \in \mathrm{U}_1(A).$$

– Reconsidérons le second vecteur unimodulaire de l'Exemple 1. Ce vecteur est aussi stable car :

$$(1 - e^{-2s}) + (1 + e^{-2s}) = 2 \in \mathrm{U}_1(A).$$

– Le dernier vecteur $(s : \; s^2 + 1)$ de l'Exemple 1 n'est pas stable car, pour tout $p \in A$, le degré du polynôme $s + p(s)\,(s^2+1)$ est au moins égal à 1 et $\mathrm{U}_1(A) = \mathbb{R} \setminus 0$. Mais, le vecteur symétrique $(s^2+1 : \; s) \in A^2$ est stable car nous avons $(s^2 + 1) + s\,(-s) = 1 \in \mathrm{U}_1(A)$.

Définition 3: [1], [21] On appelle *rang stable* $\mathrm{sr}(A)$ de A le plus petit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ tel que tout vecteur de $\mathrm{U}_{n+1}(A)$ est stable.

Ainsi, $\mathrm{sr}(A) = 2$ signifie que tout vecteur unimodulaire de A^r est stable, $\forall\, r \geq 3$, mais qu'il existe au moins un vecteur unimodulaire de A^2 qui ne l'est pas. $\mathrm{sr}(A) = 1$ signifie que tout vecteur unimodulaire de A^r est stable, $\forall\, r \geq 2$. En particulier, pour tout vecteur unimodulaire $a = (a_1 : \; a_2)$ de A^2, il existe $b \in A$ tel que $a_1 + b\, a_2$ soit inversible dans A, c-à-d $(a_1 + b\, a_2)^{-1} \in A$.

Théorème 1: – [19] Nous avons $\mathrm{sr}(H_\infty(\mathbb{D})) = 1$, d'où :

$$\mathrm{sr}(H_\infty(\mathbb{C}_+)) = 1.$$

– [1] Si A est un *domaine de Dedekind*, c-à-d un domaine de Prüfer noethérien [11], [13], alors nous avons $\mathrm{sr}(A) \leq 2$. En particulier, tout anneau principal a un rang stable au plus égal à 2.

– [6] $\mathrm{sr}(\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]) = n + 1$.

– [10] $\mathrm{sr}(E(k)) = 1$, si $k = \mathbb{C}$, et 2, si $k = \mathbb{R}$.

– [8] Si A est un domaine intègre ayant une *dimension de Krull* égale à d, alors $\mathrm{sr}(A) \leq d + 1$.

Corollaire 1: Nous avons $\mathrm{sr}(RH_\infty) = 2$.

Preuve : Nous savons que RH_∞ est un anneau euclidien, donc principal [22]. Par le Théorème 1, nous avons $\mathrm{sr}(RH_\infty) \leq 2$. Finalement, si l'on utilise une factorisation doublement copremière $p = n/d$ $(0 \neq d,\, n \in A)$ d'une fonction de transfert $p \in K = Q(A)$ (c'est toujours possible grâce au Théorème 6 de [13]), alors $(d : \, -n)$ est un vecteur unimodulaire. Cependant, si p ne satisfait pas *la condition d'interlacement* [2], [22], alors nous savons qu'il n'existe pas d'élément $y \in A$ tel que $d - y\, n \in \mathrm{U}_1(A)$. Donc, le vecteur $(d : \, -n)$ n'est pas stable, d'où $\mathrm{sr}(RH_\infty) = 2$.

Définition 4: – [7] On dit qu'un anneau A satisfait *unit* 1-*stable range* si :

$$\forall\, a = (a_1 : \; a_2) \in A^2,\; \exists\, b \in \mathrm{U}_1(A) : a_1 + b\, a_2 \in \mathrm{U}_1(A).$$

– [4], [20] Un anneau est *n-fold* si, pour tout n-uplet de vecteurs de la forme $a^i = (a_1^i : \; a_2^i) \in A^2$, il existe $b \in A$ tel que $a_1^i + b\, a_2^i \in \mathrm{U}_1(A)$, $1 \leq i \leq n$.

Les dénominations françaises de ces deux termes me sont inconnues. Nous avons : A est 1-fold ssi $\mathrm{sr}(A) = 1$. Si A est 2-fold, alors, pour $u \in \mathrm{U}_1(A)$, nous avons :

$$\forall\, (a_1 : \; a_2) \in \mathrm{U}_2(A),\; \exists\, b \in A : \left\{ \begin{array}{l} a_1 + b\, a_2 \in \mathrm{U}_1(A), \\ 0 + b\, u \in \mathrm{U}_1(A), \end{array} \right.$$

c-à-d $b \in \mathrm{U}_1(A)$, et donc, A satisfait unit 1-stable range.

III. Rang stable d'une matrice

Dans toute la suite, nous noterons par $\mathrm{col}(R_1 : \ldots : R_p)$ la matrice $R \in A^{q \times p}$ dans la première colonne est R_1, la deuxième est R_2 , ..., la derniere est R_p (l'entier q étant fixé une fois pour toute).

Définition 5: – [5], [9] Une matrice $R \in A^{q \times p}$ est *unimodulaire* s'il existe une matrice $S \in A^{p \times q}$ telle que :

$$R\, S = I_q.$$

– [5], [9] Une matrice unimodulaire $R \in A^{q \times p}$ est *k-stable* s'il existe un $(p-k)$-uplet $(c_i)_{1 \leq i \leq p-k}$ d'eléments du A-module

$$R_{p-k+1}\, A + \ldots + R_p\, A = \left\{ \sum_{i=1}^{k} R_{p-k+i}\, b_i \mid b_i \in A \right\} \quad (1)$$

telle que la matrice $\mathrm{col}(R_1 + c_1 : \ldots : R_{p-k} + c_k)$ est unimodulaire.

Remarque 1: Si une matrice $R \in A^{q \times p}$ est unimodulaire, alors R est de rang q car les q-lignes sont A-linéairement indépendantes (si $\lambda \in A^q$ tel que $\lambda\, R = 0 \Rightarrow \lambda\, R\, S = \lambda = 0$). Ainsi, $A^q\, R \subseteq A^p$ est un A-module libre défini par les lignes de R, d'où $1 \leq q \leq p$.

Lemme 1: [14] Une matrice unimodulaire $R \in A^{q \times p}$ est k-stable ssi il existe une matrice $T_k \in A^{k \times (p-k)}$ telle que

$$R_k = \mathrm{col}(R_1 : \ldots : R_{p-k}) + \mathrm{col}(R_{p-k+1} : \ldots : R_p)\, T_k$$

soit une matrice unimodulaire.

Preuve : $\Rightarrow$ Si R est k-stable, alors il existe un $(p-k)$-uplet $(c_i)_{1 \leq i \leq p-k}$ d'éléments du A-module (1) tels que la matrice $\mathrm{col}(R_1 + c_1 : \ldots : R_{p-k} + c_k)$ est unimodulaire. Par définition des c_i, il existe $b_{ij} \in A$ tel que :

$$c_i = \sum_{j=1}^{k} R_{p-k+j}\, b_{i(p-k+j)}.$$

Par substitution, nous obtenons alors

$$\begin{aligned} &\mathrm{col}(R_1 + c_1 : \ldots : R_{p-k} + c_k) \\ &\quad = \mathrm{col}(R_1 : \ldots : R_{p-k}) + \mathrm{col}(R_{p-k+1} : \ldots : R_p)\, T_k, \end{aligned}$$

où la matrice $T_k \in A^{k \times (p-k)}$ est définie par :

$$T_k = \begin{pmatrix} b_{1(p-k+1)} & b_{2(p-k+1)} & \ldots & b_{(p-k)(p-k+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1p} & b_{2p} & \ldots & b_{(p-k)p} \end{pmatrix}.$$

$\Leftarrow$ Les colonnes c_i de la matrice $\mathrm{col}(R_{p-k+1} : \ldots : R_p)\, T_k$ appartiennent toutes au A-module (1). Donc, R_k est de la forme $\mathrm{col}(R_1 + c_1 : \ldots : R_{p-k} + c_k)$. D'où, R est k-stable.

Exemple 3: Considérons $A = RH_\infty$ et la matrice :

$$R = \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s+1} & 0 & -\frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & -\frac{s}{s+1} & 0 \end{pmatrix} \in A^{2\times 3}.$$

Alors, la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} \frac{s-1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s+1} & -\frac{s}{s+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{s+1} \\ 0 \end{pmatrix} (-3 : \ -1) = \begin{pmatrix} \frac{s+2}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & -\frac{s}{s+1} \end{pmatrix}$$

est inversible. Ceci montre que R est 1-stable.

IV. Stabilisation forte, simultanée et bistable

Nous renvoyons à [13] pour un aperçu des différents résultats sur la stabilisation interne.

Définition 6:
- [22] Un système, défini par une matrice de transfert $P \in K^{q\times(p-q)}$, est dit *fortement stabilisable* s'il existe un contrôleur stabilisant C de P qui est stable, c-à-d $C \in A^{(p-q)\times q}$.
- [22] Deux systèmes, définis par des matrices de transfert $P_1, P_2 \in K^{q\times(p-q)}$, sont *simultanément stabilisables* s'il existe un contrôleur $C \in K^{(p-q)\times q}$ qui stabilise à la fois P_1 et P_2.
- Un système est *bistablement stabilisable* s'il existe un contrôleur stabilisant de la forme $C \in \mathrm{U}_1(A)^{(p-q)\times q}$.

Dans toute la suite du papier, nous utiliserons essentiellement des matrices de transfert possédant des factorisations copremières à gauche. Des résultats tout à fait similaires peuvent être obtenus pour des matrices de transfert ayant des factorisations copremières à droite. Par manque de place, nous laissons le soin au lecteur d'écrire ces résultats. Rappelons le résultat suivant venant du Corollaire 2 de [13].

Proposition 1: [22] Soit $P \in K^{q\times(p-q)}$ une matrice de transfert possédant une factorisation copremière à droite :

$$\begin{cases} P = D^{-1}\, N, & (D : \ -N) \in A^{q\times p}, \\ D\, X - N\, Y = I_q, & (X^T : \ Y^T)^T \in A^{p\times q}. \end{cases}$$

Alors, $C = Y\, X^{-1}$ stabilise de manière interne P.

Remarque 2: Notons que l'on peut vérifier directement ce résultat en calculant :

$$\begin{aligned} I_q - P\, C &= I_q - D^{-1}\, N\, Y\, X^{-1} \\ &= D^{-1}\,(D\, X - N\, Y)\, X^{-1} = (X\, D)^{-1}, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (I_q - P\, C)^{-1} = X\, D \in A^{q\times q}, \\ (I_q - P\, C)^{-1}\, P = X\, N \in A^{q\times(p-q)}, \\ C\,(I_q - P\, C)^{-1} = Y\, D \in A^{(p-q)\times q}, \\ C\,(I_q - P\, C)^{-1}\, P = Y\, N \in A^{(p-q)\times(p-q)}. \end{cases}$$

Alors, C stabilise de manière interne P car nous avons :

$$\begin{pmatrix} I_q & -P \\ -C & I_{p-q} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} X\, D & X\, N \\ Y\, D & I_{p-q} + Y\, N \end{pmatrix} \in A^{p\times p}.$$

Théorème 2: Un système $P \in K^{q\times(p-q)}$ est fortement stabilisable ssi P possède une factorisation doublement copremière $P = D^{-1}\, N = \tilde{N}\, \tilde{D}^{-1}$ telle que les matrices $R = (D : \ -N) \in A^{q\times p}$ et $(\tilde{D}^T : \ \tilde{N}^T) \in A^{(p-q)\times q}$ sont respectivement $(p-q)$ et q-stables.

Preuve : $\Rightarrow$ Supposons qu'il existe un contrôleur stable $C \in A^{(p-q)\times q}$ qui stabilise de manière interne P. En particulier, nous avons $(I_q - P\, C)^{-1}\, P = X \in A^{q\times(p-q)}$, d'où

$$I_{p-q} + C\, X = I_{p-q} + C\,(I_q - P\, C)^{-1}\, P = (I_{p-q} - C\, P)^{-1},$$

c-à-d $I_{p-q} - C\, P$ est une matrice inversible. Nous avons

$$(I_q - P\, C)^{-1} = X \Leftrightarrow P = X\,(I_{p-q} + C\, X)^{-1},$$

et donc, P possède une factorisation copremière à droite $(-C\, X + (I_{p-q} + C\, X) = I_{p-q})$ et la matrice définie par $((I_{p-q} + C\, X)^T : \ X^T) \in A^{(p-q)\times p}$ est q-stable.

Le fait que C est un contrôleur stabilisant de P implique :

$$(I_q - P\, C)^{-1}\, P = P\,(I_{p-q} - C\, P)^{-1} = Y \in A^{q\times(p-q)}.$$

Or, nous avons

$$I_q + Y\, C = I_q + P\,(I_{p-q} - C\, P)^{-1}\, C = (I_q - P\, C)^{-1},$$

c-à-d $I_q + Y\, C$ est une matrice inversible. Nous avons :

$$P\,(I_q - C\, P)^{-1} = Y \Leftrightarrow P = (I_q + Y\, C)^{-1}\, Y.$$

$P = (I_q + Y\, C)^{-1}\, Y$ est une factorisation copremière à gauche de P et $(I_q + Y\, C : \ -Y) \in A^{q\times p}$ est $(p-q)$-stable.

$\Leftarrow$ Supposons que P possède une factorisation copremière à gauche $P = D^{-1}\, N$ telle que $(D : \ -N) \in A^{q\times p}$ soit q-stable. Alors, il existe une matrice $T_1 \in A^{(p-q)\times q}$ telle que $D - N\, T_1 \in \mathrm{GL}_q(A)$. Par la Proposition 1, nous obtenons que le contrôleur $C = T_1 \in A^{(p-q)\times q}$ stabilise de manière interne P, c-à-d P est fortement stabilisable.

V. Structure générale de certains contrôleurs stabilisants

Le résultat suivant permet d'obtenir une forme canonique pour certains contrôleurs stabilisants.

Théorème 3: Soient A un anneau de systèmes SISO stables, $K = Q(A)$ son corps de fractions et une matrice de transfert $P \in K^{q\times(p-q)}$ possédant une factorisation copremière à gauche $P = D^{-1}\, N$. Si $R = (D : \ -N) \in A^{q\times p}$ est une matrice k-stable avec $r = p - q - k \geq 0$, alors il existe deux matrices

$$\begin{cases} T_1 \in A^{k\times q}, \\ T_2 \in A^{k\times r}, \end{cases}$$

telles que le contrôleur C, défini par

$$C = \begin{pmatrix} V\, U^{-1} \\ T_1 + T_2\,(V\, U^{-1}) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow r = p - q - k \\ \updownarrow k \end{array}, \qquad (2)$$

stabilise de manière interne le système $P = D^{-1}\, N$. De plus, $C_r = V\, U^{-1} \in K^{r\times q}$ est un contrôleur qui stabilise

$$P_r = (D - \Lambda\, T_1)^{-1}\,(N_r + \Lambda\, T_2) \in K^{q\times r}, \qquad (3)$$

où nous avons utilisé les notations suivantes :

$$\begin{cases} R = (D : \ -N) = \mathrm{col}(R_1 : \ldots : R_p) \in A^{q\times p}, \\ N = (N_r : \ \Lambda) \in A^{q\times(p-q)}, \\ N_r = -\mathrm{col}(R_{q+1} : \ldots : R_{p-k}) \in A^{q\times r}, \\ \Lambda = -\mathrm{col}(R_{p-k+1} : \ldots : R_p) \in A^{q\times k}, \end{cases} \qquad (4)$$

Preuve : Par hypothèse, $P = D^{-1}\, N$ est une factorisation copremière à gauche de P. Donc, $R = (D : \ -N) \in A^{q\times p}$ admet un inverse à droite, c-à-d R est unimodulaire. Par hypothèse, R est k-stable, et donc, par le Lemme 1, il existe $T_k \in A^{k\times(p-k)}$ tel que la matrice

$$R_k = \mathrm{col}(R_1 : \ldots : R_{p-k}) + \mathrm{col}(R_{p-k+1} : \ldots : R_p)\, T_k \qquad (5)$$

est unimodulaire. Appelons $S_k \in A^{(p-k)\times q}$ un inverse à droite de R_k, c-à-d :

$$(\mathrm{col}(R_1 : \ldots : R_{p-k}) + \mathrm{col}(R_{p-k+1} : \ldots : R_p)\, T_k)\, S_k = I_q.$$

Donc, nous avons :

$$(D : \; -N) \begin{pmatrix} S_k \\ T_k\, S_k \end{pmatrix} = I_q.$$

Si l'on note $S_k = (U^T : V^T)^T$ avec $U \in A^{q\times q}$ et $V \in A^{r\times q}$, alors nous obtenons :

$$D\, U - N \begin{pmatrix} V \\ T_k\, S_k \end{pmatrix} = I_q.$$

Par la Proposition 1, le contrôleur C, défini par

$$\begin{aligned} C \; &= \begin{pmatrix} V \\ T_k\, S_k \end{pmatrix} U^{-1} = \begin{pmatrix} V\, U^{-1} \\ T_k \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} U^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} V\, U^{-1} \\ \\ T_k \begin{pmatrix} I_q \\ V\, U^{-1} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V\, U^{-1} \\ T_1 + T_2\, (V\, U^{-1}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où $T_k = (T_1 : \; T_2)$ avec $T_1 \in A^{k\times q}$ and $T_2 \in A^{k\times r}$, stabilise de manière interne $P = D^{-1}\, N$.

Finalement, en utilisant les notations (4), nous avons :

$$\begin{aligned} R_k \;\; &= \;\; \mathrm{col}(R_1 : \ldots : R_{p-k}) - \Lambda\, (T_1 : \; T_2), \\ &= \;\; (\mathrm{col}(R_1 : \ldots : R_q) - \Lambda\, T_1 : \\ &\qquad\qquad\qquad \mathrm{col}(R_{q+1} : \ldots : R_{p-k}) - \Lambda\, T_2), \\ &= (D - \Lambda\, T_1 : \; -(N_r + \Lambda\, T_2)). \end{aligned}$$

Nous avons $R_k\, S_k = I_q$, et donc, par la Proposition 1, nous obtenons que $C_r = V\, U^{-1}$ est un contrôleur stabilisant du système $P_r = (D - \Lambda\, T_1)^{-1}\, (N_r + \Lambda\, T_2)$.

Exemple 4: La matrice de transfert

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} \\ \frac{1}{s(s-1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(s) = Q(RH_\infty)$$

admet une factorisation copremière à gauche suivante :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s+1} & -\frac{s}{s+1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Par l'Exemple 3, nous savons que $R = (D : \; -N) \in A^{2\times 3}$, correspondante à la factorisation (6) de P, est 1-stable. Donc, d'après le Théorème 3, nous savons qu'il existe un contrôleur stabilisant stable C de P ($r = 3 - 2 - 1 = 0$), c-à-d P est fortement stabilisable. Grâce au Théorème 3 et à l'Exemple 3, un tel contrôleur stabilisant est défini par :

$$C = -(3 : \; 1).$$

Je ne sais actuellement pas s'il existe un moyen de déterminer les anneaux A pour lesquels il existe des algorithmes permettant de :

- reconnaître si une matrice unimodulaire $R \in A^{q\times p}$ est k-stable,
- déterminer les matrices $T_k = (T_1 : \; T_2) \in A^{q\times(p-k)}$ telles que R_k, définie par (5), soit unimodulaire.

Dans quelles mesures, ces deux questions sont-elles en général décidables ou non ?

Cependant, pour le premier point, nous verrons au Corollaire 2 qu'il est toujours possible de déterminer un k, en fonction du rang stable $\mathrm{sr}(A)$ de A, tel que *toute matrice de la forme* $R \in A^{q\times p}$ soit au moins k-stable. Ainsi, pour une matrice $R \in A^{q\times p}$ donnée, le k obtenu au Corollaire 2 n'est généralement pas le meilleur possible, c-à-d le rang stable de A permet seulement d'obtenir une borne inférieure du plus grand k pour R. Pour le second point, sous une certaines conditions données dans la proposition suivante, il est possible de déterminer certains T_k en exploitant le fait que le système P_r, défini par (3), ressemble à une paramétrisation de Youla-Kučera du système $D^{-1}\, N_r$.

Proposition 2: Soit $P \in K^{q\times(p-q)}$ une matrice de transfert possédant la factorisation copremière à gauche $P = D^{-1}\, N$ telle que la matrice $R = (D : \; -N) \in A^{q\times p}$ est k-stable. Notons :

$$\begin{cases} R = (D : \; -N) = \mathrm{col}(R_1 : \ldots : R_p) \in A^{q\times p}, \\ N_r = -\mathrm{col}(R_{q+1} : \ldots : R_{p-k}) \in A^{q\times r}. \end{cases}$$

Si la matrice de transfert $P_r = D^{-1}\, N_r$ possède la factorisation doublement copremière suivante

$$\begin{pmatrix} D & -N_r \\ -\tilde{Y} & \tilde{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & \tilde{N}_r \\ Y & \tilde{D}_r \end{pmatrix} = I_{p-k}, \qquad (7)$$

alors, si l'on note

$$\begin{cases} \tilde{Y} = \begin{pmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \end{pmatrix} \in A^{r\times q}, \; \tilde{Y}_1 \in A^{k\times q}, \; \tilde{Y}_2 \in A^{(r-k)\times q}, \\ \\ \tilde{X} = -\begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \end{pmatrix} \in A^{r\times r}, \; \tilde{X}_1 \in A^{k\times r}, \; \tilde{X}_2 \in A^{(r-k)\times r}, \end{cases}$$

un contrôleur stabilisant de $P = D^{-1}\, N$ est défini par :

- Si $k \leq r = p - q - k \Leftrightarrow p - q \geq 2\, k$, alors :

$$C = \begin{pmatrix} Y\, X^{-1} \\ \tilde{Y}_1 + \tilde{X}_1\, (Y\, X^{-1}) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow r = p - q - k \\ \updownarrow k \end{array}.$$

- Si $k \geq r = p - q - k \Leftrightarrow p - q \leq 2\, k$, alors :

$$C = \begin{pmatrix} Y\, X^{-1} \\ \begin{pmatrix} \tilde{Y} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\tilde{X} \\ 0 \end{pmatrix} (Y\, X^{-1}) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \updownarrow k \end{array}.$$

Preuve : Par hypothèse, le système $P_r = D^{-1}\, N_r \in K^{q\times r}$ est stabilisable par le contrôleur $C_r = Y\, X^{-1}$. Si l'on considère C_r comme un nouveau système, alors, grâce à (7), tous les contrôleurs stabilisants C_r sont de la forme

$$P_r(Q) = (D - Q\, \tilde{Y})^{-1}\, (N_r - Q\, \tilde{X}),$$

où $Q \in A^{q\times r}$ est le degré de liberté de la paramétrisation de Youla-Kučera de C_r.

- Si $k \leq r$, en choisissant $Q = (\Lambda : \; 0) \in A^{q\times r}$ avec $\Lambda = -\mathrm{col}(R_{p-k+1} : \ldots : R_p) \in A^{q\times k}$, alors :

$$\begin{cases} Q\, \tilde{Y} = \Lambda\, \tilde{Y}_1, \\ Q\, \tilde{X} = -\Lambda\, \tilde{X}_1. \end{cases}$$

Donc, $C_r = Y\, X^{-1}$ est stabilisé de manière interne par $P_r = (D - \Lambda\, \tilde{Y}_1)^{-1}\, (N_r + \Lambda\, \tilde{X}_1)$. En échangeant le rôle de C_r et de P_r, alors P_r est stabilisé par C_r. Le résultat découle alors du Théorème 3 si l'on choisit :

$$V = Y, \quad U = X, \quad T_1 = \tilde{Y}_1, \quad T_2 = \tilde{X}_1.$$

– Si $k \geq r$, si l'on note $\Lambda = (\Lambda_1 : \Lambda_2)$, avec $\Lambda_1 \in A^{q\times r}$ et $\Lambda_2 \in A^{q\times(r-k)}$, alors le contrôleur

$$P_r(\Lambda_1) = (D - \Lambda_1\,\tilde{Y})^{-1}\,(N_r - \Lambda_1\,\tilde{X})$$

stabilise de manière interne C_r. Or, nous avons :

$$P_r(\Lambda_1) = \left(D - \Lambda \begin{pmatrix} \tilde{Y} \\ 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} \left(N_r + \Lambda \begin{pmatrix} -\tilde{X} \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Le résultat découle alors du Théorème 3 si l'on choisit :

$$V = Y, \quad U = X, \quad T_1 = \begin{pmatrix} \tilde{Y} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} -\tilde{X} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi vérifier la Proposition 2 par le calcul :

$$\begin{pmatrix} I_q & -P \\ -C & I_{p-q} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} X\,D & X\,N \\ \begin{pmatrix} Y\,D \\ 0 \end{pmatrix} & I_{p-q} + \begin{pmatrix} Y\,N \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

avec :

$$\begin{array}{c} r \updownarrow \\ k \updownarrow \end{array} \begin{pmatrix} Y\,D \\ 0 \end{pmatrix} \in A^{(p-q)\times q}, \quad \begin{array}{c} r \updownarrow \\ k \updownarrow \end{array} \begin{pmatrix} Y\,N \\ 0 \end{pmatrix} \in A^{(p-q)\times(p-q)}.$$

VI. Structure canonique de certains contrôleurs stabilisants basée sur le rang stable

Définition 7: Soient $p,\, q \in \mathbb{Z}_+$ tels que $1 \leq q \leq p$. Nous dirons que A satisfait $\mathrm{sr}_k(q,p,A)$ si toute matrice unimodulaire de la forme $R \in A^{q\times p}$ est k-stable.

S'il n'y a aucun risque de confusion quant à l'anneau considéré, nous noterons alors $\mathrm{sr}_k(q,p)$ pour $\mathrm{sr}_k(q,p,A)$. Remarquons que si $\mathrm{sr}(A) = n$, alors A satisfait $\mathrm{sr}_1(1, n{+}1)$.

Théorème 4: [9], [21] Nous avons :

1. $\mathrm{sr}_1(1,n) \Leftrightarrow \mathrm{sr}_1(1,m),\ \forall\, m \geq n$,
2. $\mathrm{sr}_1(1,n) \Leftrightarrow \mathrm{sr}_k(1,n+k-1),\ \forall\, k \geq 1$,
3. $\mathrm{sr}_k(1,n) \Leftrightarrow \mathrm{sr}_k(m,n+m-1),\ \forall\, m \geq 1$.

Les deux premiers résultats du Théorème 4 sont assez simples à prouver. La seule réelle difficulté est l'implication $\Rightarrow$ du dernier point. Nous avons alors le corollaire suivant.

Corollaire 2: Soit A un anneau tel que $\mathrm{sr}(A) < +\infty$. Alors, A satisfait $\mathrm{sr}_{p-q-\mathrm{sr}(A)+1}(q,p)$ pour $p,\, q \in \mathbb{Z}_+$ tels que $p - q \geq \mathrm{sr}(A)$. En particulier, pour toute matrice unimodulaire $R = \mathrm{col}(R_1 : \ldots : R_p) \in A^{q\times p}$, il existe

$$T_{\mathrm{sr}(A)} \in A^{(p-q-\mathrm{sr}(A)+1)\times(q+\mathrm{sr}(A)-1)}$$

tel que

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{sr}(A)} \ &= \mathrm{col}(R_1 : \ldots : R_{q+\mathrm{sr}(A)-1}) \\ &\quad + \mathrm{col}(R_{q+\mathrm{sr}(A)} : \ldots : R_p)\; T_{\mathrm{sr}(A)} \end{aligned} \tag{8}$$

soit une matrice unimodulaire.

Preuve : Si $\mathrm{sr}(A) = n$, alors A satisfait $\mathrm{sr}_1(1, n+1)$, et donc, par le premier point du Théorème 4, A satisfait $\mathrm{sr}_1(1,m)$ pour tout $m \geq n+1$. Par le 2 du Théorème 4, A satisfait $\mathrm{sr}_k(1, m{+}k{-}1)$ pour tout $k \geq 1$. Finalement, par le dernier point du Théorème 4, A satisfait $\mathrm{sr}_k(l, l{+}m{+}k{-}2)$ pour tout $k,\, l \geq 1$ et $m \geq n+1$.

Maintenant, considérons $p,\, q \in \mathbb{Z}_+$ tels que $p{-}q \geq \mathrm{sr}(A)$. Définissons $k = p - q - \mathrm{sr}(A) + 1 \geq 1$. Alors, nous avons

$$p = q + (\mathrm{sr}(A) + 1) + (p - q - \mathrm{sr}(A) + 1) - 2,$$

et si l'on note

$$l = q \geq 1, \quad n = \mathrm{sr}(A), \quad m = \mathrm{sr}(A) + 1, \quad p = l + m + k - 2,$$

alors, A satisfait $\mathrm{sr}_k(l, l{+}m{+}k{-}2)$, c-à-d $\mathrm{sr}_{p-q-\mathrm{sr}(A)+1}(q,p)$. Donc, par le Lemme 1, pour toute matrice unimodulaire $R = \mathrm{col}(R_1 : \ldots : R_p) \in A^{q\times p}$, il existe

$$T_{\mathrm{sr}(A)} \in A^{(p-q-\mathrm{sr}(A)+1)\times(q+\mathrm{sr}(A)-1)}$$

tel que nous avons (8).

Nous obtenons alors le corollaire du Théorème 3 suivant.

Corollaire 3: Soit $P \in K^{q\times(p-q)}$ une matrice de transfert admettant une factorisation copremière à gauche de la forme $P = D^{-1}\,N$ et telle que $p{-}q \geq \mathrm{sr}(A)$. Alors, il existe deux matrices

$$\begin{cases} T_1 \in A^{(p-q-\mathrm{sr}(A)+1)\times q}, \\ T_2 \in A^{(p-q-\mathrm{sr}(A)+1)\times(\mathrm{sr}(A)-1)}, \end{cases} \tag{9}$$

telles que le contrôleur C, défini par

$$C = \begin{pmatrix} V\,U^{-1} \\ T_1 + T_2\,(V\,U^{-1}) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow \mathrm{sr}(A) - 1 \\ \updownarrow p - q - \mathrm{sr}(A) + 1 \end{array}, \tag{10}$$

stabilise de manière interne le système $P = D^{-1}\,N$. De plus, $C_{\mathrm{sr}(A)-1} = V\,U^{-1}$ est un contrôleur stabilisant de $P_{\mathrm{sr}(A)-1} = (D - \Lambda\,T_1)^{-1}\,(N_{\mathrm{sr}(A)-1} + \Lambda\,T_2)$, où :

$$\begin{cases} R = (D : \ -N) = \mathrm{col}(R_1 : \ldots : R_p) \in A^{q\times p}, \\ N = (N_{\mathrm{sr}(A)} : \ \Lambda), \\ -N_{\mathrm{sr}(A)-1} = \mathrm{col}(R_{q+1} : \ldots : R_{q+\mathrm{sr}(A)-1}), \\ -\Lambda = \mathrm{col}(R_{q+\mathrm{sr}(A)} : \ldots : R_p), \end{cases} \tag{11}$$

Preuve : Grâce au Corollaire 2, toute matrice $R \in A^{q\times p}$ est $k = p - q - \mathrm{sr}(A) + 1$-stable. Le résultat découle alors simplement du Théorème 3.

Alors, nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 4: Si $\mathrm{sr}(A) = 1$, alors, tout système, défini par une matrice de transfert $P \in K^{q\times(p-q)}$ admettant une factorisation copremière à gauche, est fortement stabilisable. De plus, tout couple de systèmes, définis par des matrices de transfert $P_1,\, P_2 \in K^{q\times(p-q)}$ et admettant des factorisations doublement copremières, est simultanément stabilisable [2], [22] .

Nous obtenons alors les corollaires suivants.

Corollaire 5: Tout système stabilisable, défini par une matrice de transfert P à coefficients dans le corps de fractions de $A = H_\infty(\mathbb{C}_+)$, est fortement stabilisable. De plus, tout couple de systèmes stabilisables, définis par des matrices de transfert $P_1,\, P_2 \in K^{q\times(p-q)}$, où K est le corps de fractions de $H_\infty(\mathbb{C}_+)$, est simultanément stabilisable.

Preuve : Ces résultats découlent du Corollaire 4, de $\mathrm{sr}(H_\infty(\mathbb{C}_+)) = 1$ (voir le Théorème 1) et du fait que tout système stabilisable, défini par une matrice de transfert $P \in K^{q\times(p-q)}$ avec $K = Q(H_\infty(\mathbb{C}_+))$, admet des factorisations doublement copremière (voir le Théorème 3 de [12]).

Corollaire 6: Tout système, défini par une matrice de transfert $P \in K^{q\times(p-q)}$ avec $K = Q(RH_\infty)$, a un contrôleur stabilisant de la forme suivante :

$$C = \begin{pmatrix} V\,U^{-1} \\ T_1 + T_2\,(V\,U^{-1}) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \updownarrow 1 \\ \updownarrow p-q-1 \end{array}$$

Proposition 3: 1. Si A satisfait unit 1-stable range, alors tout système SISO $-$ défini par une fonction de transfert $p = n/d$ $(0 \neq d, n \in A)$ $-$ admettant une factorisation copremière est bistablement stabilisable.

2. Si A est n-fold, alors tout n-uplet de systèmes SISO $-$ définis par des fonctions de transfert $p_i = n_i/d_i$ $(0 \neq d_i, n_i \in A)$, $1 \leq i \leq n$ $-$ admettant des factorisations copremières est simultanément stabilisé par un même contrôleur stable.

Preuve : 1. Soit $p \in K$ un système admettant une factorisation copremière $p = n/d$ avec $d\,x - n\,y = 1,\ x, y \in A$. Donc, $(d :\ -n)$ est unimodulaire. En utilisant le fait que A satisfait unit 1-stable range, alors il existe $u \in \mathrm{U}_1(A)$ tel que $d - n\,u \in \mathrm{U}_1(A)$, et donc, $c = u \in \mathrm{U}_1(A)$ est un contrôleur stabilisant bistable.

2. Soit $1 \leq i \leq n$. Considérons n systèmes $p_i \in K$ admettant des factorisations copremières $p_i = n_i/d_i$ avec $d_i\,x_i - n_i\,y_i = 1,\ x_i, y_i \in A$. Les matrices $(d_i :\ -n_i)$ sont unimodulaires. Puisque A est n-fold, alors il existe $y \in A$ tel que $d_i - n_i\,y \in \mathrm{U}_1(A)$ pour $i = 1, \ldots, n$. Ainsi, $c = y \in A$ est un contrôleur stable qui stabilise simultanément les n systèmes p_i.

VII. Rang stable topologique

Définition 8: [16] Soit A une algèbre de Banach [12]. On appelle *rang stable topologique* $\mathrm{tsr}(A)$ de A le plus petit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ tel que $\mathrm{U}_n(A)$ est dense dans A^n.

Proposition 4: Si A est une algèbre de Banach telle que $\mathrm{tsr}(A) = 2$, alors tout système SISO $-$ défini par une fonction de transfert $p = n/d$ $(0 \neq d,\ n \in A)$ $-$ est aussi proche que l'on veut d'un système possédant une factorisation doublement copremière (et donc stabilisable).

Preuve : Considérons un système SISO défini par une fonction de transfert $p = n/d \in K$ $(0 \neq d,\ n \in A)$. Par hypothèse, nous avons $\mathrm{tsr}(A) = 2$. Nous avons donc :

$$\forall\,\epsilon > 0,\ \exists\,(d_\epsilon :\ n_\epsilon) \in \mathrm{U}_2(A) : \quad \left\{ \begin{array}{l} \parallel d - d_\epsilon \parallel_A \leq \epsilon, \\ \parallel n - n_\epsilon \parallel_A \leq \epsilon. \end{array} \right.$$

De plus, le fait que $(d_\epsilon :\ n_\epsilon) \in \mathrm{U}_2(A)$ signifie qu'il existe $(x_\epsilon :\ y_\epsilon) \in A^2$ tel que $d_\epsilon\,x_\epsilon - n_\epsilon\,y_\epsilon = 1$. Donc, $p_\epsilon = n_\epsilon/d_\epsilon$ admet des factorisations doublement copremières.

Théorème 5: [18] $\mathrm{tsr}(H_\infty(\mathbb{C}_+)) = 2$.

Puisque $A = H_\infty(\mathbb{C}_+)$ n'est pas un domaine de Prüfer [13] ($H_\infty(\mathbb{C}_+)$ est un domaine de Sylvester cohérent [12]), nous savons qu'un système SISO n'est pas généralement stabilisable de manière interne (voir le Théorème 5 de [13]). Cependant, nous avons le résultat suivant.

Corollaire 7: Tout système SISO $-$ défini par une fonction de transfert $p = n/d$ $(0 \neq d,\ n \in H_\infty(\mathbb{C}_+))$ $-$ est tel que $\forall\,\epsilon > 0$, il existe un système $p_\epsilon = n_\epsilon/d_\epsilon \in K(H_\infty(\mathbb{C}_+))$ $(0 \neq d_\epsilon,\ n_\epsilon \in H_\infty(\mathbb{C}_+))$, admettant une factorisation doublement copremière, qui est tel que :

$$\parallel d - d_\epsilon \parallel_\infty \leq \epsilon, \quad \parallel n - n_\epsilon \parallel_\infty \leq \epsilon.$$

VIII. Conclusion

L'introduction du concept de rang stable dans l'étude de la stabilisation forte et simultanée semble apporter des nouveaux résultats. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [14] pour plus de résultats et d'exemples. Par manque de place, il n'a pas été possible de parler du lien entre le rang stable et la K-théorie [17] (le rang stable a été introduit par H. Bass pour *stabiliser* le calcul du groupe $K_1(A)$ [1]). C'est en essayant d'écrire les différents problèmes de stabilisation dans le langage de la K-théorie que nous avons récemment réalisé l'intérêt de ce concept (voir [15]).

IX. Remerciements

Je voudrais remercier V. Blondel de l'université de Louvain-la-Neuve (Belgique) pour les discussions que nous avons eues récemment au sujet du rang stable et de son utilisation dans les problèmes de stabilisation. A ma connaissance, il est le premier à avoir réalisé, dès les années 90, que le concept du rang stable pouvait être un outil intéressant dans l'étude de la stabilisation forte et simultanée [3].

Références

[1] H. Bass, « K-theory and stable algebra », *Publ. Inst. Hautes Etudes Sci.*, vol. 22, pp. 489-544, 1964.

[2] V. Blondel, *Simultaneous Stabilization of Linear Systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences 191, Springer-Verlag, 1994.

[3] V. Blondel, *Communication personnelle*, 2001.

[4] H. Chen, « Rings with stable range conditions », *Communications in Algebra*, vol. 26, pp. 3653-3668, 1998 .

[5] M. R. Gabel, A. V. Geramita, « Stable range for matrices », *J. Pure and Applied Algebra*, vol. 5, pp. 97-112, 1974, « Erratum », vol. 7, pp. 239, 1976.

[6] M. R. Gabel, « Lower bounds on the stable range of polynomial rings », *Pacific J. Math.*, vol. 61, pp. 117-120, 1975.

[7] K. R. Goodearl, P. Menal, « Stable range one for rings with units », *J. Pure and Applied Algebra*, vol. 54, pp. 261-287, 1988.

[8] R. Heitman, « Generating ideals in Prüfer domains », *Pac. J. Math.*, vol. 62, pp. 117-126, 1976.

[9] Y. Hong, « Remarks on stable range for matrices », *Northeast. Math. J.*, vol. 11, pp. 302-306, 1995.

[10] C. U. Jensen, « Some curiosities of rings of analytic functions », *J. Pure and Applied Algebra*, vol. 38, pp. 277-283, 1985.

[11] A. Quadrat, « The fractional representation approach to synthesis problems : an algebraic analysis viewpoint », à paraître dans *SIAM J. Contr. and Optim.*, 2002.

[12] A. Quadrat, « Une approche de la stabilisation interne par l'analyse algébrique I. Factorisations doublement faiblement copremières », CIFA 2002, Nantes, France.

[13] A. Quadrat, « Une approche de la stabilisation interne par l'analyse algébrique II. Stabilisation interne », CIFA 2002, Nantes, France.

[14] A. Quadrat, « On a general structure of the stabilizing controllers based on the stable range », présenté à *SIAM J. Contr. and Optim.*, 2002.

[15] A. Quadrat, « Algebraic K-theory & Internal stabilisation », en préparation.

[16] M. A. Rieffel, « Dimension and stable rank in the K-theory of $C^\star$-algebras », *London Math. Soc.*, vol. 46, pp. 301-333, 1983.

[17] J. Rosenberg, *Algebraic K-Theory and Its Applications*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 147, Springer, 1994.

[18] D. Suárez, « Trivial Gleason parts and the topological stable rank of H^∞ », *American J. Math.*, vol. 118, pp. 879-904, 1996.

[19] S.Treil, « The stable rank of H^∞ equals 1 », *Journal Functional Analysis*, vol. 109, pp. 130-154, 1992.

[20] W. Van der Kallen, H. Maazen et J. Stienstra, « A presentation for some $K_2(n, R)$ », *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol 81, pp. 934-936, 1975.

[21] L. N. Vasershtein, « Stable range of rings and the dimension of topological spaces », *Functional Analysis and its Applications*, vol. 5, pp. 102-110, 1971.

[22] M. Vidyasagar, *Control System Synthesis*, MIT Press, 1985.