Une approche de la stabilisation interne par l'analyse algébrique

I. Factorisations doublement faiblement copremières

Alban Quadrat[1],

[1] INRIA Sophia-Antipolis, projet Café,
2004, Route des Lucioles BP 93, 06902 Sophia Antipolis cedex, France.

Alban.Quadrat@sophia.inria.fr
http://www-sop.inria.fr/cafe/Alban.Quadrat/index.html

Résumé— **Ce papier a pour but de donner une vue générale des différents résultats récemment obtenus sur la stabilisation interne des systèmes linéaires de dimension infinie. On s'attachera à faire ressortir les principales idées plus que la technique utilisée. En particulier, nous donnerons des conditions nécessaires et suffisantes à la stabilisation interne et à l'existence de factorisations doublement copremières faibles ou fortes. Nous caractériserons alors les algèbres de systèmes SISO stables A sur lesquelles tout système – défini par une matrice de transfert à coefficients dans le corps de fractions $K = Q(A)$ de A – est stabilisable de manière interne ou admet des factorisations doublement copremières faibles ou fortes.**

Mots-clés— **Approche fractionnaire des problèmes de synthèse, stabilisation interne, factorisations copremières à gauche/droite/doublement, contrôleurs stabilisants, stabilisation forte/simultanée, théorie des modules, domaines de Sylvester cohérents/Prüfer/Bézout, rang stable.**

I. Introduction

Un des problèmes importants de l'automatique est celui du calcul des contrôleurs qui stabilisent un système à la fois instable et incertain et qui optimisent les performances du système en boucle fermée (par exemple, minimisation de la matrice de sensibilité au sens de H_∞, optimisation des performances au sens H_2, rejet des perturbations...). Dans les années 80, pour la classe des systèmes de dimension finie (c-à-d définis par des systèmes linéaires d'équations différentielles), ce problème a pu être formalisé dans un cadre mathématique unique appelé *commande robuste*.

La possibilité de généraliser les différents résultats de la commande robuste aux systèmes de dimension infinie (systèmes à retards, équations aux dérivées partielles, équations aux dérivées fractionnaires...) s'est alors posée en théorie et en pratique. Afin de traiter dans un cadre unique les différentes classes de systèmes (dimension finie et infinie), M. Vidyasagar a introduit l'idée de représenter les classes de systèmes SISO (single input single output) comme le corps de fractions d'une algèbre A de systèmes SISO stables [4], [19]. Des exemples classiques de telles algèbres A de systèmes SISO stables sont l'algèbre de Banach $H_\infty(\mathbb{C}_+)$ des fonctions analytiques dans le demi-plan droit $\mathbb{C}_+ = \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, s > 0\}$ qui sont bornées pour la norme $\| \ f \ \|_\infty = \sup_{s \in \mathbb{C}_+} |f(s)|$, l'algèbre de fonctions rationnelles réelles propres et stables $RH_\infty = \mathbb{R}(s) \cap H_\infty(\mathbb{C}_+)$, les algèbres de systèmes BIBO (bound input bound output) $\mathcal{A} = \{f(t) + \sum_{i=0}^{+\infty} a_i\, \delta_{t-t_i} \mid f \in L_1(\mathbb{R}_+),\ (a_i)_{i \geq 0} \in l_1(\mathbb{Z}_+),\ 0 = t_0 < t_1 < t_2 \ldots,\ t_i \in \mathbb{R}_+\}$ et $\hat{\mathcal{A}} = \{\hat{f} \mid f \in \mathcal{A}\}$, où $\hat{\cdot}$ dénote la transformée de Laplace... Voir [2], [3], [4], [19] pour plus de détails et d'exemples. L'idée de M. Vidyasagar a permis de reformuler les concepts de stabilisation interne, forte ou simultanée, de la paramétrisation des contrôleurs stabilisants, des métriques de la robustesse (métriques du graphe, ν-gap)... en termes de propriétés de certaines matrices à coefficients dans l'anneau A [3], [19]. Cette approche, appelée *représentation fractionnaire des problèmes de synthèse*, a unifié dans un cadre commun de nombreux problèmes liés à la stabilisation par feedback et a donné pour certains d'entre eux des réponses générales.

Cependant, la stabilisation des systèmes de dimension infinie fait appel à des anneaux tels que $H_\infty(\mathbb{C}_+)$, $\hat{\mathcal{A}}$ ou $\mathcal{E}$ [8] qui, du point de vue algébrique et analytique, sont beaucoup plus complexes que l'anneau RH_∞ utilisé pour les systèmes de dimension finie. De ce fait, il reste encore des questions ouvertes au sujet de la stabilisation des systèmes linéaires de dimension infinie. Le but de ce papier est de répondre aux questions suivantes :

1. Existe-t-il des conditions nécessaires et suffisantes à la *stabilisation interne*?

2. Peut-on caractériser les algèbres A telles que tout système – défini par une matrice de transfert à coefficients dans le corps de fractions $K = Q(A)$ de A – est stabilisable de manière interne ?

3. Quand peut-on paramétriser tous les contrôleurs stabilisants d'un système à l'aide de la paramétrisation de Youla-Kučera (paramétrisation affine en un degré de liberté) ?

4. Existe-t-il une forme canonique des contrôleurs stabilisants permettant d'étudier la *stabilisation forte* (existence d'un contrôleur stabilisant stable) ou *simultanée* (existence d'un contrôleur stabilisant une famille de systèmes) ?

Pour cela, nous développerons une nouvelle approche de la représentation fractionnaire des problèmes de stabilisation basée sur une théorie mathématique appelée *analyse algébrique*. Cette approche utilise simultanément la théorie des modules, l'algèbre homologique et la théorie des algèbres de Banach. Finalement, nous montrerons comment cette approche permet de généraliser à la fois les idées et les résultats de [17] mais aussi ceux de [9], [15], [18].

II. Plan

Ce papier suit le plan suivant. Dans la première partie, nous développerons le concept de factorisation doublement faiblement copremière d'une matrice de transfert. Dans la seconde partie [11], nous exposerons divers résultats récents sur la stabilisation interne. Enfin, dans la dernière partie [12], nous monterons l'existence d'une forme canonique de certains contrôleurs stabilisants qui est intéressante pour l'étude de la stabilisation forte et simultanée.

III. Notations

Dans tout le papier, A désignera un anneau intègre ($a\,b = 0,\ a \neq 0 \Rightarrow b = 0$) commutatif avec une unité 1. Nous noterons le corps de fractions de A par :

$$K = Q(A) = \{n/d \mid 0 \neq d, n \in A\}.$$

De plus, $A^{q\times p}$ désignera l'ensemble des matrices de taille $q \times p$ à coefficients dans A et $\mathrm{GL}_n(A)$ le groupe des matrices $n \times n$ inversibles à coefficients dans A et I_n son unité. Nous noterons la matrice transposée de R par R^T. *Par convention, tout vecteur d'une puissance de A sera toujours un vecteur ligne.* Si M et N sont deux A-modules, la notation $M \cong N$ signifiera que M et N sont isomorphes en tant que A-modules [1], [14]. Nous noterons souvent par $(a_1, \ldots, a_n)$ l'idéal $A\,a_1 + \ldots + A\,a_n$. Finalement, tous les systèmes considérés ici sont linéaires et invariants dans le temps. Le terme *système* devra donc être pris dans ce sens.

IV. La représentation fractionnaire des systèmes et théorie des modules

Dans tout ce papier, nous adopterons l'approche de la représentation fractionnaire des problèmes de stabilisation telle qu'elle est développée dans les références classiques [2], [3], [4], [19]. Dans cette approche, la classe des systèmes SISO instables considérée est représentée par le corps de fractions $K = Q(A) = \{n/d \mid 0 \neq d,\, n \in A\}$ d'une algèbre de systèmes SISO stables telle que $A = H_\infty(\mathbb{C}_+)$ ou RH_∞.

Exemple 1: Soit $A = RH_\infty = \{n/d \mid 0 \neq d,\, n \in \mathbb{R}[s],\ \deg n \leq \deg d,\ d(\underline{s}) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \underline{s} < 0\}$ l'algèbre des fonctions rationnelles réelles propres et stables [19]. Le système SISO $p = 1/(s-1)$ n'appartient pas à A (pôle instable en 1) mais à son corps de fractions $K = \mathbb{R}(s)$. En effet, nous avons $p = n/d$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 1/(s+1) \in A, \\ d = (s-1)/(s+1) \in A. \end{array} \right.$$

Un système MIMO (multi input multi output) est alors défini par une matrice (de transfert) P à coefficients dans $K = Q(A)$. Il est toujours possible d'écrire $P \in K^{q\times(p-q)}$ sous la forme $P = D^{-1}\,N = \tilde{N}\,\tilde{D}^{-1}$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} R = (D\,:\,-N) \in A^{q\times p}, \\ \tilde{R} = (\tilde{N}^T\,:\,\tilde{D}^T)^T \in A^{p\times(p-q)}. \end{array} \right.$$

Par exemple, il suffit de prendre $D = d\,I_q$ et $\tilde{D} = d\,I_{p-q}$, où $d \in A$ est obtenu en chassant les dénominateurs instables de P.

Exemple 2: Soit $A = H_\infty(\mathbb{C}_+)$ et $K = Q(A)$ son corps de fractions. Alors, en chassant les dénominateurs instables de la matrice de transfert suivante

$$P = \begin{pmatrix} \frac{e^{-s}}{s-1} \\ \frac{e^{-s}}{(s-1)^2} \end{pmatrix} \in K^2, \tag{1}$$

nous obtenons $P = D^{-1}\,N$ où la matrice $R = (D\,:\,-N)$ est définie par :

$$R = \begin{pmatrix} \left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2 & 0 & -\frac{(s-1)\,e^{-s}}{(s+1)^2} \\ 0 & \left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2 & -\frac{e^{-s}}{(s+1)^2} \end{pmatrix} \in A^{2\times 3}. \tag{2}$$

Ainsi, dans l'approche fractionnaire des problèmes de stabilisation, au lieu d'étudier la fonction de transfert $P = D^{-1}\,N \in K^{q\times(p-q)}$, on préfère étudier le système $D\,y = N\,u$, c-à-d $R\,(y\,:\,u)^T = 0$. Dans cette approche, les variables du système sont regroupées dans un seul vecteur et l'étude des propriétés structurelles du système est basée sur les propriétés algébriques et analytiques de la matrice R [19]. Remarquons que cette approche s'apparente à l'approche comportementale développée par J. C. Willems [20]. Les propriétés algébriques de R (existence d'un inverse à droite, à gauche, d'un plongement dans une matrice carrée inversible...) s'étudient en faisant de l'algèbre linéaire sur l'anneau A. Cependant, en mathématique, l'algèbre linéaire sur un anneau est à la base de *la théorie des modules* [1], [14]. Il est donc naturel d'essayer d'utiliser la théorie des modules pour étudier de tels systèmes. L'idée d'utiliser la théorie des modules en automatique remonte aux travaux de R. E. Kalman dans les années 60. La théorie des modules n'est pas utilisée dans l'approche classique des problèmes de stabilisation [2], [3], [4], [19] : seule une approche matricielle a été développée. L'introduction de la théorie des modules dans l'approche fractionnaire des problèmes de stabilisation n'a vu le jour que récemment [18]. Dans ce papier, nous montrons comment une théorie mathématique appelée *analyse algébrique*, qui embrasse à la fois la théorie des modules, l'algèbre homologique et la théorie des algèbres de Banach, permet de reformuler l'approche fractionnaire des problèmes de stabilisation et de donner des réponses complètes aux questions 1, 2, 3 et 4 formulées dans la section I.

V. Factorisations doublement faiblement copremières

A. Introduction

Un outil essentiel de l'approche des systèmes par la représentation fractionnaire est la *factorisation doublement copremière* d'une matrice de transfert. Cette technique, rendue populaire par le livre de M. Vidyasagar [19], est à la base de la stabilisation interne des systèmes de dimension finie, de la paramétrisation de Youla-Kučera des contrôleurs stabilisants... Cependant, contrairement au cas des systèmes de dimension finie, pour des systèmes plus généraux (systèmes à retards, équations aux dérivées partielles), les matrices de transfert n'admettent pas forcément de factorisations doublement copremières [2], [3], [4], [19]. Intuitivement, cela vient du fait que l'anneau des fonctions rationnelles est un object mathématique plus simple que l'anneau des fonctions analytiques.

A notre connaissance, le concept de *factorisations doublement faiblement copremières* n'a vu le jour que récemment dans la littérature sur la stabilisation des systèmes [10], même si, sous des formes moins générales, ce concept apparaît déjà dans des contributions plus anciennes. Cela vient certainement du fait que dans le cas des fractions rationnelles, ce concept est identique à celui de factorisations doublement copremières. Dans le cas d'un anneau A pour lequel la notion de plus grand commun diviseur a un sens (*a greatest common divisor domain*), il apparaît dans le travail de M. C. Smith [17]. Il dit d'une matrice de transfert $P \in K^{q\times(p-q)}$ qu'elle admet une factorisation doublement faiblement copremière s'il existe $R = (D\,:\,-N) \in A^{q\times p}$ et $\tilde{R} = (\tilde{N}^T\,:\,\tilde{D}^T)^T \in A^{p\times(p-q)}$ tels que le pgcd des mineurs de taille q (resp. $p-q$) de R (resp. $\tilde{R}$) vaut 1 et :

$$P = D^{-1}\,N = \tilde{N}\,\tilde{D}^{-1}.$$

Cependant, pour plusieurs anneaux couramment utilisés dans des problèmes de stabilisation, en particulier $\mathcal{A}$ et $\hat{\mathcal{A}}$ [3], nous ne savons pas si une telle notion de plus grand commun diviseur existe. Pour cela, il faut développer un concept plus général de factorisation doublement faiblement copremière que celui donné dans [17]. Un des apports de l'application de la théorie des modules aux problèmes de stabilisation est d'avoir su dégager un tel concept.

Définition 1: Une matrice $R \in A^{q\times p}$ est dite *faiblement première à gauche* si nous avons

$$K^q\,R \cap A^p = A^q\,R,$$

ou, en d'autres termes :

$$\forall\,\lambda \in K^q \text{ tel que } \lambda\,R \in A^p, \exists\,\mu \in A^q \text{ tel que } \lambda\,R = \mu\,R.$$

De manière duale, $R \in A^{q\times p}$ est *faiblement première à droite* si R^T est faiblement première à gauche, c-à-d si :

$$K^p\,R^T \cap A^q = A^p\,R^T.$$

Remarque 1: Si R est une matrice de rang q, c-à-d si les lignes de R sont A-linéairement indépendantes, alors R est faiblement copremière à gauche ssi :

$$\forall\,\lambda \in K^q,\ \lambda\,R \in A^p \Rightarrow \lambda \in A^q. \tag{3}$$

Exemple 3: La matrice R définie par (2) n'est pas faiblement première à gauche car nous avons

$$\left(\tfrac{s+1}{s-1}\,:\,0\right)\begin{pmatrix} \left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2 & 0 & -\frac{(s-1)\,e^{-s}}{(s+1)^2} \\ 0 & \left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2 & -\frac{e^{-s}}{(s+1)^2} \end{pmatrix} = \left(\tfrac{s-1}{s+1}\,:\,0\,:\,-\tfrac{e^{-s}}{s+1}\right) \in A^3,$$

et le vecteur $\left(\frac{s+1}{s-1}\,:\,0\right)$ est dans K^2 mais pas dans A^2.

Théorème 1: [17] Si A est un anneau dans lequel tout couple $(a,\,b) \in A^2$ a un plus grand commun diviseur $[a,\,b]$, alors une matrice de rang plein $R \in A^{q\times p}$ $(0 < q \le p)$ est faiblement copremière à gauche ssi le plus grand commun diviseur des mineurs d'ordre q vaut 1.

Exemple 4: Nous verrons au Théorème 3 que l'anneau $A = H_\infty(\mathbb{C}_+)$ satisfait l'hypothèse du théorème précédent. Ainsi, la matrice de rang plein R définie par (2) n'est pas faiblement première à gauche car les mineurs d'ordre 2 ont tous $(s-1)^2/(s+1)^2$ comme commun diviseur.

Définition 2:
- $P \in K^{q\times(p-q)}$ a une *factorisation faiblement copremière à gauche* s'il existe une matrice $R = (D\,:\,-N) \in A^{q\times p}$ faiblement première à gauche telle que $P = D^{-1}\,N$.
- Une matrice de transfert $P \in K^{q\times(p-q)}$ a une *factorisation faiblement copremière à droite* s'il existe une matrice $\tilde{R}^T = (\tilde{N}^T\,:\,\tilde{D}^T)^T \in A^{p\times(p-q)}$ faiblement première à droite telle que $P = \tilde{N}\,\tilde{D}^{-1}$.
- $P \in K^{q\times(p-q)}$ a une *factorisation doublement faiblement copremière* si P a une factorisation faiblement copremière à gauche et à droite.

Remarque 2: Notons que lorsque l'on chasse les dénominateurs instables d'une matrice de transfert P, en général, on obtient des matrices R et $\tilde{R}^T$ qui ne sont pas faiblement premières à gauche et à droite. Par exemple, la matrice R, définie par (2), a été obtenue par cette procédure à partir de la matrice de transfert (1) . Or, nous avons vu dans l'Exemple 3 que R n'est pas faiblement première à gauche.

B. Matrices de transfert

Rappelons qu'un *A-module* M satisfait les mêmes axiomes qu'un espace vectoriel à ceci près que les coefficients sont pris dans l'anneau A et non plus dans un corps [1], [14]. Cette petite différence engendre de gros changements dans les deux théories (algèbre linéaire sur un corps et théorie des modules). Par exemple, un espace vectoriel possède toujours une base ce qui est très rare pour un module (pour obtenir une base à partir d'une famille génératrice, il faut déterminer une famille minimale, c-à-d exprimer certains vecteurs comme des combinaisons linéaires d'autres : pour cela, en général, il faut pouvoir inverser certains coefficients, ce qui est possible dans un corps mais très rarement dans un anneau).

Définition 3:
- Soit X un sous A-module d'un A-module F. Alors, la *A-fermeture de X dans F* est le A-module défini par :

$$\overline{X} = \{m \in F \mid \exists\,0 \ne a \in A:\ a\,m \in X\}.$$

- *La partie de torsion* d'un A-module M est le sous-module $t(M)$ de M défini par :

$$t(M) = \{m \in M \mid \exists\,0 \ne a \in A: a\,m = 0\}.$$

Un élément $m \in t(M)$ est appelé un *élément de torsion* de M et un A-module tel que $t(M) = 0$ est dit *sans-torsion.*

Remarque 3: Un élément de torsion correspond souvent à une simplification pôles/zéros instables dans le système. Remarquons que, puisque $t(M)$ est un sous-module du A-module M, le module quotient $M/t(M)$ est sans-torsion.

Exemple 5: Le A-module $M = A^p/A^q\,R$ est défini par les équations $R\,z = 0$, où z_i est la classe du i$^{\text{ème}}$ vecteur canonique de A^p dans M. Ainsi, si R est défini par (2), alors $m = \frac{(s-1)}{(s+1)}\,y_1 - \frac{e^{-s}}{(s+1)}\,u \ne 0$ est un élément de torsion de M car il satisfait $\frac{(s-1)}{(s+1)}\,m = 0$ $(z_1 = y_1, z_2 = y_2, z_3 = u)$.

Lemme 1: [10] Soit $R \in A^{q\times p}$ et $M = A^p/A^q\,R$ le A-module défini par R, alors :

1. la A-fermeture de $A^q\,R$ dans A^p est $\overline{A^q\,R} = K^q\,R \cap A^p$,
2. $t(M) = (K^q\,R \cap A^p)/A^q\,R = \overline{A^q\,R}/A^q\,R$,

3. $M/t(M) = A^p/(K^q\,R \cap A^p) = A^p/\overline{A^q\,R}$.

Ainsi, le A-module $M = A^p/A^q\,R$ est sans-torsion ssi R est une matrice faiblement copremière à gauche.

Proposition 1: [10] Si $P \in K^{q\times(p-q)}$ est telle que

$$P = D_1^{-1}\,N_1 = D_2^{-1}\,N_2, \qquad P = \tilde{N}_1\,\tilde{D}_1^{-1} = \tilde{N}_2\,\tilde{D}_2^{-1},$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} R_i = (D_i : \; -N_i) \in A^{q\times p}, \;\; i = 1, 2, \\ \tilde{R}_i = (\tilde{N}_i^T : \; \tilde{D}_i^T)^T \in A^{p\times(p-q)}, \;\; i = 1, 2, \end{array}\right.$$

alors, nous avons :

1. $\overline{A^q\,R_1} = \overline{A^q\,R_2}$,
2. $\overline{A^{p-q}\,\tilde{R}_1^T} = \overline{A^{p-q}\,\tilde{R}_2^T}$,
3. $A^p\,R_1^T \cong A^p\,R_2^T \cong \tilde{N}_i/t(\tilde{N}_i) = A^p/\overline{A^{p-q}\,\tilde{R}_i^T}$,
4. $A^p\,\tilde{R}_1 \cong A^p\,\tilde{R}_2 \cong M_i/t(M_i) = A^p/\overline{A^q\,R_i}$,

où $M_i = A^p/A^q\,R_i$ et $\tilde{N}_i = A^p/A^{p-q}\,\tilde{R}_i^T$.

La philosophie qui se dégage de la Proposition 1 est la suivante.

Corollaire 1: Les *propriétés structurelles* (*intrinsèques*) d'une matrice de transfert

$$P = D^{-1}\,N = \tilde{N}\,\tilde{D}^{-1} \in K^{q\times(p-q)}$$

ne dépendent que des A-modules $\overline{A^q\,R}$ et $\overline{A^{p-q}\,\tilde{R}^T}$ ou, à un isomorphisme près, des A-modules $A^p\,R^T$ et $A^p\,\tilde{R}$, où :

$$\left\{\begin{array}{l} R = (D : \; -N) \in A^{q\times p}, \\ \tilde{R} = (\tilde{N}^T : \; \tilde{D}^T)^T \in A^{p\times(p-q)}. \end{array}\right.$$

Exemple 6: Considérons le système $p = e^{-s}/(s-1)$. Si l'on choisit $A = H_\infty(\mathbb{C}_+)$, nous pouvons représenter p comme $p = n_1/d_1 = n_2/d_2$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} n_1 = e^{-s}/(s+1) \in A, \\ d_1 = (s-1)/(s+1) \in A, \\ n_2 = e^{-s}/((s+1)\,(s+2)) \in A, \\ d_2 = (s-1)/((s+1)\,(s+2)) \in A. \end{array}\right.$$

Si l'on note

$$\left\{\begin{array}{l} R_1 = (d_1 : \; -n_1) \in A^{1\times 2}, \\ R_2 = (d_2 : \; -n_2) \in A^{1\times 2}, \end{array}\right.$$

alors, nous avons les deux idéaux de A suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} I = A^2\,R_1^T = (d_1,\, n_1), \\ J = A^2\,R_2^T = (d_2,\, n_2). \end{array}\right.$$

Il est clair que $J = (1/(s+2))\,I$, où $(1/(s+2))$ représente l'idéal principal engendré par l'élément $1/(s+2) \in A$. On vérifie alors que $I \cong J$ avec les isomorphismes suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} \phi : I \longrightarrow J, \; \phi(a) = (1/(s+2))\,a, \; \forall\, a \in I, \\ \psi : J \longrightarrow I, \; \psi(b) = (s+2)\,b, \; \forall\, b \in J. \end{array}\right.$$

Notons que ψ est bien défini car tout élément b de J est de la forme $(1/(s+2))\,(\lambda_1\,n_1 + \lambda_2\,d_1)$ avec $\lambda_i \in A$, et donc, $\psi(b) = \lambda_1\,n_1 + \lambda_2\,d_1 \in I$. De plus, ψ est bien A-linéaire.

Finalement, en utilisant le fait que tout couple d'éléments a et b de A a un plus grand commun diviseur $[a,\, b]$ (voir Théorème 3) et que $[d_1,\, n_1] = 1$ et $[d_2,\, n_2] = 1/(s+2)$, on vérifie alors facilement que :

$$\overline{A\,R_2} = A\,R_1 = \overline{A\,R_1}.$$

C. Factorisation doublement faiblement copremière

Théorème 2: [10] $P = D^{-1}\,N = \tilde{N}\,\tilde{D}^{-1} \in K^{q\times p}$ a une factorisation faiblement copremière à gauche (resp. à droite) ssi le A-module $\overline{A^q\,R}$ (resp. $\overline{A^{p-q}\,\tilde{R}^T}$) est *libre* de rang q (resp. $p-q$), où

$$\left\{\begin{array}{l} R = (D : \; -N) \in A^{q\times p}, \\ \tilde{R} = (\tilde{N}^T : \; \tilde{D}^T)^T \in A^{p\times(p-q)}, \end{array}\right. \tag{4}$$

(c-à-d $\overline{A^q\,R} \cong A^q$ (resp. $\overline{A^{p-q}\,\tilde{R}^T} \cong A^{p-q}$)), ou de manière équivalente, s'il existe $R' \in A^{q\times p}$ (resp. $\tilde{R}' \in A^{p\times(p-q)}$) de rang q (resp. $p-q$) telle que :

$$\overline{A^q\,R} = A^q\,R' \;\; (\text{resp. } \overline{A^{p-q}\,\tilde{R}^T} = A^{p-q}\,\tilde{R}'^T).$$

Corollaire 2: $P = D^{-1}\,N = \tilde{N}\,\tilde{D}^{-1} \in K^{q\times p}$ a une factorisation doublement faiblement copremière ssi les A-modules $\overline{A^q\,R}$ et $\overline{A^{p-q}\,\tilde{R}^T}$ sont libres respectivement de rang q et $p-q$, où R et $\tilde{R}$ sont définies par (4).

Ainsi, pour vérifier l'existence d'une factorisation doublement faiblement copremière d'une matrice de transfert, il faut calculer la A-fermeture de deux modules et vérifier qu'elles définissent deux A-modules libres. Les résultats du Lemme 1 ne sont que des formulations équivalentes au calcul du A-module d'homologie $\mathrm{tor}_1^A(K/A, \cdot)$ [10], [14] (valide pour tout anneau commutatif non nécessairement intègre). Cependant, nous ne savons actuellement pas développer un algorithme permettant de calculer le A-module d'homologie $\mathrm{tor}_1^A(K/A, \cdot)$.

Sous certaines hypothèses sur l'anneau A que j'expliciterai dans la section V-D, il est possible de calculer les fermetures voulues par le calcul du A-module de cohomologie $\mathrm{ext}_A^1(T(\cdot), A)$, où $T(\cdot)$ est un foncteur qui associe à tout A-module de la forme $M = A^p/A^q\,R$ le A-module *transposé* $T(M) = A^q/A^p\,R^T$. Il serait trop long de définir ici le A-module de cohomologie $\mathrm{ext}_A^1(T(\cdot), A)$. Nous renvoyons à [10] pour de plus amples informations. Cependant, un algorithme, permettant de calculer la fermeture $\overline{A^q\,R}$ de $A^q\,R$ est présenté ci-dessous.

Algorithme : Entrée : $R \in A^{q\times p}$. Sortie : $R' \in A^{r\times p}$ tel que $\overline{A^q\,R} = A^r\,R'$.

1. On part de R.
2. On calcule sa transposée R^T.
3. On détermine une famille génératrice du noyau à gauche de R^T, c-à-d du A-module $\ker .R^T = \{\lambda \in A^p \mid \lambda\,R^T = 0\}$. Supposons que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in A^p$ soit une famille génératrice de $\ker .R^T$, alors on note $R_{-1}^T \in A^{m\times p}$ la matrice dont les lignes sont les λ_i.
4. Transposer la matrice R_{-1}^T pour obtenir $R_{-1} \in A^{p\times m}$.
5. Calculer une famille génératrice du noyau à gauche de R_{-1}, c-à-d du A-module $\ker .R_{-1} = \{\eta \in A^p \mid \eta\,R_{-1} = 0\}$. Supposons que $\eta_1, \ldots, \eta_r \in A^p$ soit une famille génératrice de $\ker .R_{-1}$, on note alors par $R' \in A^{r\times p}$ la matrice dont les lignes sont les η_i.
6. Nous avons alors $\overline{A^q\,R} = A^r\,R'$.

Notons que le A-module $A^r\,R'$ est libre de rang r ssi les r lignes de R' sont A-linéairement indépendantes.

Exemple 7: Reprenons la fonction de transfert P définie par (1) ainsi que la matrice R donnée par (2). Nous avons vu dans l'Exemple 3 que R n'est pas faiblement première à gauche et donc $D^{-1}N$ n'est pas une factorisation faiblement copremière à gauche de P. Nous devons donc calculer $\overline{A^2 R}$ et savoir s'il existe $R' \in A^{2\times 3}$ tel que $\overline{A^2 R} = A^2 R'$. Pour cela, nous utilisons l'algorithme précédent.

1. R est définie par (2) . 2. On calcule R^T.

3. Soit $\lambda = (\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3) \in A^3$ tel que $\lambda R^T = 0$, c-à-d :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{(s-1)^2}{(s+1)^2}\lambda_1 - \frac{(s-1)\,e^{-s}}{(s+1)^2}\lambda_3 = 0, \\ \frac{(s-1)^2}{(s+1)^2}\lambda_2 - \frac{e^{-s}}{(s+1)^2}\lambda_3 = 0. \end{array}\right. \tag{5}$$

De la première équation, nous obtenons :

$$\frac{(s-1)}{(s+1)}\left(\frac{(s-1)}{(s+1)}\lambda_1 - \frac{e^{-s}}{(s+1)}\lambda_3\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(s-1)}{(s+1)}\lambda_1 - \frac{e^{-s}}{(s+1)}\lambda_3 = 0,$$

(A est intègre et $\lambda_i \in A$). De plus, $\left[\frac{s-1}{s+1}, \frac{e^{-s}}{s+1}\right] = 1$, d'où :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{e^{-s}}{s+1}\mu, \\ \lambda_3 = \frac{s-1}{s+1}\mu, \\ \mu \in A. \end{array}\right.$$

En substituant λ_3 dans la deuxième équation de (5), nous obtenons :

$$\frac{(s-1)}{(s+1)}\left(\frac{(s-1)}{(s+1)}\lambda_2 - \frac{e^{-s}}{(s+1)^2}\mu\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(s-1)}{(s+1)}\lambda_2 - \frac{e^{-s}}{(s+1)^2}\mu = 0.$$

En utilisant le fait que $\left[\frac{s-1}{s+1}, \frac{e^{-s}}{(s+1)^2}\right] = 1$, nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_2 = \frac{e^{-s}}{(s+1)^2}\mu', \\ \mu = \frac{(s-1)}{(s+1)}\mu', \\ \mu' \in A, \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{(s-1)\,e^{-s}}{(s+1)^2}\mu', \\ \lambda_2 = \frac{e^{-s}}{(s+1)^2}\mu', \\ \lambda_3 = \frac{(s-1)^2}{(s+1)^2}\mu', \end{array}\right. \Leftrightarrow \lambda = \mu' R_{-1}^T$$

avec $R_{-1}^T = \left(\frac{(s-1)\,e^{-s}}{(s+1)^2} : \frac{e^{-s}}{(s+1)^2} : \frac{(s-1)^2}{(s+1)^2}\right)$.

4. On transpose R_{-1}^T pour obtenir R_{-1}.

5. Soit $\eta = (\eta_1 : \eta_2 : \eta_3) \in A^3$ tel que $\eta R_{-1} = 0$, c-à-d :

$$\frac{(s-1)\,e^{-s}}{(s+1)^2}\eta_1 + \frac{e^{-s}}{(s+1)^2}\eta_2 + \frac{(s-1)^2}{(s+1)^2}\eta_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(s-1)}{(s+1)}\left(\frac{e^{-s}}{s+1}\eta_1 + \frac{(s-1)}{(s+1)}\eta_3\right) = -\frac{e^{-s}}{(s+1)^2}\eta_2.$$

Mais, le fait que $\left[\frac{s-1}{s+1}, \frac{e^{-s}}{(s+1)^2}\right] = 1$ implique :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{e^{-s}}{s+1}\eta_1 + \frac{(s-1)}{(s+1)}\eta_3 = \frac{e^{-s}}{(s+1)^2}\zeta_1, \\ \eta_2 = -\frac{(s-1)}{(s+1)}\zeta_1, \end{array}\right. \quad \zeta_1 \in A. \tag{6}$$

De la première équation de (6), on déduit que

$$\frac{e^{-s}}{(s+1)}\left(\eta_1 - \frac{1}{(s+1)}\zeta_1\right) = -\frac{(s-1)}{(s+1)}\eta_3,$$

et, du fait que $\left[\frac{e^{-s}}{s+1}, \frac{s-1}{s+1}\right] = 1$, on obtient finalement :

$$\left\{\begin{array}{l} \eta_1 = \frac{1}{(s+1)}\zeta_1 + \frac{(s-1)}{(s+1)}\zeta_2, \\ \eta_2 = -\frac{(s-1)}{(s+1)}\zeta_1, \\ \eta_3 = -\frac{e^{-s}}{s+1}\zeta_2, \\ \zeta_1, \zeta_2 \in A, \end{array}\right.$$

c-à-d, $\eta = \zeta R'$, où $\zeta = (\zeta_1 : \zeta_2) \in A^2$ et :

$$R' = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{s-1}{s+1} & 0 \\ \frac{s-1}{s+1} & 0 & -\frac{e^{-s}}{s+1} \end{pmatrix}.$$

6. On vérifie alors qu'il n'y a pas de facteur commun dans les mineurs 2×2 de R', c-à-d que R' est faiblement copremière à gauche, et que :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{s-1}{s+1} \\ \frac{s-1}{s+1} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{-s}}{s+1} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Ainsi, (7) est une factorisation faiblement copremière à gauche de P.

D. Anneaux de Sylvester cohérents

Pour un anneau A quelconque, les A-modules $\ker .R^T$ et $\ker .R_{-1}$, calculés dans l'algorithme développé dans la section V-C, n'ont en général aucune raison d'être engendrés par un nombre fini de générateurs, c-à-d d'être *de type fini*. Cela nous amène naturellement à la définition suivante.

Définition 4: [1], [14] Un anneau A est appelé *cohérent* si pour tout idéal $I = (a_1, \ldots, a_n)$ de A engendré par un nombre fini d'éléments a_i de A, le A-module des relations

$$S(I) = \{r = (r_1 : \ldots : r_n) \in A^n \mid \sum_{i=1}^{n} r_i\, a_i = 0\}$$

est engendré par un nombre fini de générateurs, c-à-d il existe $m \in \mathbb{Z}_+$ et une matrice $R \in A^{m\times n}$ tels que, pour tout $r \in S(I)$, il existe $b = (b_1 : \ldots : b_m) \in A^m$ tel que nous ayons $r = b\,R$, c-à-d $S(I) = A^m R$.

Remarque 4: Le concept d'anneau cohérent est apparu grâce à l'étude des variétés analytiques, essentiellement développée par H. Cartan et J.P. Serre dans les années 50, et, de nos jours, le concept de *faisceaux cohérents* est un outil important de la géométrie analytique et algébrique.

Exemple 8: Un *anneau noethérien* A est un anneau dans lequel tout idéal I de A est défini par un nombre fini d'éléments $a_i \in A$, c-à-d il existe $a_1, \ldots, a_n \in A$ tel que $I = (a_1, \ldots, a_n)$ [1], [14]. Par exemple, RH_∞ est un anneau noethérien car il est *principal* [19], c-à-d tout idéal I de A est de la forme $I = (a)$ pour un certain $a \in A$. En particulier, tout idéal noetherien est un anneau cohérent. La réciproque n'est pas vraie et, par exemple, l'anneau $k[X_i]_{i\geq 1}$ des polynômes en un nombre infini de variables X_i à coefficients dans un corps k [14], l'anneau des fonctions entières

$$E(k) = \{f(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, s^n \mid a_n \in k,\ \lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = 0\}$$

à coefficients dans $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ [7] et $\mathcal{E} = E(\mathbb{R}) \cap \mathbb{R}(s)[e^{-s}]$ [8] sont des anneaux cohérents non noethériens.

Si A est un anneau cohérent, alors les A-modules de la forme $A^p / A^q R$ avec $R \in A^{q\times p}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, (modules dits *de présentation finie* [1], [14]) forment une *catégorie abélienne*, c-à-d ils sont stables par l'ensemble des opérations élémentaires sur les modules (somme directe, quotient, intersection, produit tensoriel, dualité...) [10]. En particulier, si A est un anneau cohérent, la proposition suivante montre que nous pouvons utiliser l'algorithme permettant de calculer la fermeture $\overline{A^q\, R}$ du A-module $A^q\, R$.

Proposition 2: Si A est un anneau cohérent, alors, pour toute matrice R de taille finie à coefficients dans A, le noyau $\ker .R$ est engendré par un nombre fini de générateurs en tant que A-module, c-à-d $\ker .R$ est de type fini.

Il arrive souvent que l'anneau A des systèmes SISO stables soit une *algèbre de Banach* c-à-d une k-algèbre ($k = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) possédant une norme $\| \cdot \|_A$ telle que :

- $\| a\, b \|_A \leq \| a \|_A \| b \|_A$, c-à-d le produit est continu par rapport aux deux termes,
- $\| 1 \|_A = 1$,
- A est complet pour la norme $\| \cdot \|_A$ en tant que k-espace vectoriel.

Par exemple, les anneaux suivants $H_\infty(\mathbb{C}_+)$, $\mathcal{A}$, $\hat{\mathcal{A}}$ ou $l_1(\mathbb{Z}_+)$ sont des algèbres de Banach [3]. Or, il est connu que les algèbres de Banach noethériennes sont triviales [16], et donc, les exemples précédents sont des algèbres de Banach non-noethériennes. Ainsi, si A est une algèbre de Banach, la fermeture $\overline{A^q\, R}$ d'un A-module quelconque de la forme $A^q\, R$, avec $R \in A^{q\times p}$, n'est un A-module de type fini que si A est un anneau cohérent. L'algorithme précédent peut alors être utilisé. Nous verrons au Théorème 3 que l'anneau $H_\infty(\mathbb{C}_+)$ est cohérent (mais la question reste ouverte pour les anneaux $\mathcal{A}$ et $\hat{\mathcal{A}}$).

Définition 5: [5] Un anneau A est un *domaine de Sylvester cohérent* si, pour tout $q \in \mathbb{Z}_+$ et tout $R \in A^q$, le A-module $\ker .R^T = \{\lambda \in A^q \mid \lambda\, R^T = 0\}$ est *libre*, c-à-d admet une base en tant que A-module [1].

Exemple 9: Tout anneau principal ou, plus généralement, tout *domaine de Bézout* (c-à-d un domaine pour lequel tout idéal de type fini est principal, c-à-d engendré par un seul élément) est un domaine de Sylvester cohérent. Donc, en particulier, RH_∞ et $\mathcal{E}$ sont deux domaines de Sylvester cohérents ($\mathcal{E}$ est un domaine de Bézout [8]).

Si B est un anneau principal, alors $A = B[X]$ est un domaine de Sylvester cohérent. Par exemple, $A = \mathbb{Z}[X]$ est un domaine de Sylvester cohérent ainsi que l'anneau $A = k[s][z] = k[s, z]$ des polynômes en deux variables s et z à coefficients dans un corps k ($k[s]$ est un anneau principal [14]). L'anneau des polynômes en plus de deux variables à coefficients dans un corps k n'est pas un domaine de Sylvester cohérent.

Proposition 3: [6] Dans une domaine de Sylvester cohérent A, tout couple (a, b) d'éléments de A a un plus grand commun diviseur noté $[a, b]$.

Théorème 3: [10] $H_\infty(\mathbb{C}_+)$ est un domaine de Sylvester cohérent. En particulier, tout couple (a, b) d'éléments de $H_\infty(\mathbb{C}_+)$ a un plus grand commun diviseur $[a, b]$ ([13], [17]).

Théorème 4: [10] Nous avons les équivalences suivantes :

1. Toute matrice de transfert $-$ à coefficients dans le corps de fractions $K = Q(A)$ d'un domaine A $-$ admet une factorisation doublement faiblement copremière,

2. A est un domaine de Sylvester cohérent.

[1] En terme d'algèbre homologique, un domaine de Sylvester cohérent A peut être caractérisé comme un domaine cohérent A, de dimension homologique faible $\mathrm{w.gl.dim}(A) \leq 2$, sur lequel tout A-module projectif de type fini est libre [5], [10]. Cette caractérisation, bien que plus abstraite, est souvent plus utile que celle que nous avons donnée dans la Definition 5, même si celle-ci a l'avantage d'être plus concrète.

Exemple 10: Grâce au Théorème 3, nous savons que $A = H_\infty(\mathbb{C}_+)$ est un domaine de Sylvester cohérent. Donc, toute matrice de transfert $P \in K^{q\times(p-q)}$ a une factorisation doublement faiblement copremière. En particulier, la matrice de transfert P définie par (1) a la factorisation doublement faiblement copremière suivante :

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{s-1}{s+1} \\ \frac{s-1}{s+1} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{-s}}{s+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(s-1)\, e^{-s}}{(s+1)^2} \\ \frac{e^{-s}}{(s+1)^2} \end{pmatrix} \left(\left(\frac{s-1}{s+1} \right)^2 \right)^{-1}. \end{aligned}$$

VI. Conclusion

Dans cette première partie du papier, nous avons défini le concept de factorisations doublement faiblement copremières d'une matrice de transfert et montré quand et comment il est possible de les calculer. Ce concept est à la base des différents résultats sur la stabilisation interne développés dans la seconde partie du papier [11].

Références

[1] N. Bourbaki, *Algèbre Commutative*, Chap. 1-4, Masson, 1985.

[2] F. M. Callier et C. A. Desoer, « Stabilization, tracking and disturbance rejection in multivariable convolution systems », *Ann. Soc. Sc. Bruxelles*, vol. 94, pp. 5-51, 1980.

[3] R. F. Curtain et H. J. Zwart, *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*, TAM vol. 21, Springer-Verlag, 1991.

[4] C. A. Desoer, R.-W. Liu, J. Murray et R. Saeks, « Feedback system design : the fractional representation approach to analysis and synthesis », *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 25, pp. 399-412, 1980.

[5] W. Dicks et E. D. Sontag, « Sylvester domains », *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol. 13, pp. 243-275, 1978.

[6] W. Dicks, « Free algebras over Bézout domains are Sylvester domains », *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol. 27, pp. 15-28, 1983.

[7] O. Helmer, « Divisibility properties of integral functions », *Duke Math. J.*, vol. 6, pp. 345-356, 1940.

[8] J. J. Loiseau, « Algebraic tools for the control and stabilization of time-delay systems », *IFAC Reviews*, Annual Reviews in Control, vol. 24, pp. 135-149, 2000.

[9] K. Mori et K. Abe, « Feedback stabilization over commutative rings : further study of coordinate-free approach », *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 39, pp. 1952-1973, 2001.

[10] A. Quadrat, « The fractional representation approach to synthesis problems : an algebraic analysis viewpoint », à paraître dans *SIAM J. Control and Optimization*, 2002.

[11] A. Quadrat, « Une approche de la stabilisation interne par l'analyse algébrique. II. Stabilisation interne », CIFA 2002, France.

[12] A. Quadrat, « Une approche de la stabilisation interne par l'analyse algébrique. III. Sur une forme générale des contrôleurs stabilisants basée sur le rang stable », CIFA 2002, Nantes, France.

[13] M. von Renteln, « Hauptideale und äußere Funktionen im Ring H^∞ », *Archiv der Mathematik*, vol. 28, pp. 519-524, 1977.

[14] J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press, 1979.

[15] S. Shankar et V. R. Sule, « Algebraic geometric aspects of feedback stabilization », *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 30, pp. 11-30, 1992.

[16] A. M. Sinclair et A. W. Tullo, « Noetherian Banach algebras are finite dimensional », *Math. Ann.*, vol. 34, pp. 151-153, 1992.

[17] M. C. Smith, « On stabilization and the existence of coprime factorizations », *IEEE. Trans. Automatic Control*, vol. 34, pp. 1005-1007, 1989.

[18] V. R. Sule, « Feedback stabilization over commutative rings : the matrix case », *SIAM J. Control Optim.*, vol. 32, pp. 1675-1695, 1994 et "Corrigendum", vol. 36, pp. 2194-2195, 1998.

[19] M. Vidyasagar, *Control System Synthesis*, MIT Press, 1985.

[20] J. W. Polderman et J. C. Willems, *Introduction to Mathematical Systems Theory : A Behavioral Approach*, TAM vol. 26, Springer, 1991.