Une approche de la stabilisation interne par l'analyse algébrique

II. Stabilisation interne

Alban Quadrat[1],

[1] INRIA Sophia-Antipolis, projet Café,
2004, Route des Lucioles BP 93, 06902 Sophia Antipolis cedex, France.

`Alban.Quadrat@sophia.inria.fr`
`http://www-sop.inria.fr/cafe/Alban.Quadrat/index.html`

Résumé— **Ce papier a pour but de donner une vue générale des différents résultats récemment obtenus sur la stabilisation interne des systèmes linéaires de dimension infinie. On s'attachera à faire ressortir les principales idées plus que la technique utilisée. En particulier, nous donnerons des conditions nécessaires et suffissantes à la stabilisation interne et à l'existence de factorisations doublement copremières faibles ou fortes. Nous caractériserons alors les algèbres de systèmes SISO stables A sur lesquelles tout système – défini par une matrice de transfert à coefficients dans le corps de fractions $K = Q(A)$ de A – est stabilisable de manière interne ou admet des factorisations doublement copremières faibles ou fortes.**

Mots-clés— **Approche fractionnaire des problèmes de synthèse, stabilisation interne, factorisations copremières à gauche/droite/doublement, contrôleurs stabilisants, stabilisation forte/simultanée, théorie des modules, domaines de Sylvester cohérents/Prüfer/Bézout, rang stable.**

I. Introduction

Dans cette seconde partie, nous essayons de faire un bilan des différents résultats récemment obtenus sur la stabilisation interne des systèmes linéaires de dimension infinie [6], [7], [11], [13]. En particulier, nous donnerons plusieurs conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système soit stabilisable de manière interne ou admette des factorisations doublement copremières. Finalement, nous caractériserons les anneaux A des systèmes SISO stables tels que tout système – défini par une matrice de transfert à coefficients dans le corps de fractions $K = Q(A)$ – soit stabilisable ou possède des factorisations doublement copremières. Ces résultats nous permettront de répondre entièrement aux trois premières questions posées dans l'introduction de [8].

Nous renvoyons le lecteur à la première partie du papier [8] pour les notations, certaines définitions ainsi que pour une description de *l'approche fractionnaire des problèmes de stabilisation* que nous adopterons ici.

II. Stabilisation interne

Soit A un anneau intègre de systèmes SISO stables et $K = Q(A) = \{n/d \mid 0 \neq d,\, n \in A\}$ son corps de fractions [8], [14]. Considérons un système $P \in K^{q\times(p-q)}$, un contrôleur $C \in K^{(p-q)\times q}$ et la boucle fermée correspondant à la Figure 1. Nous avons les équations suivantes :

$$\begin{pmatrix} I_q & -P \\ -C & I_{p-q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

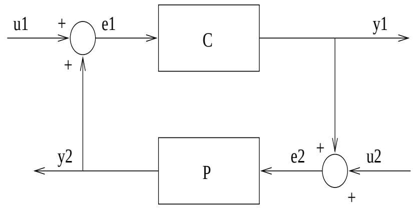

Fig. 1. Système en boucle fermée

Définition 1: – [14] Un système défini par une matrice de transfert $P \in K^{q\times(p-q)}$ est *stabilisé de manière interne* par un contrôleur $C \in K^{(p-q)\times q}$ si tous les coefficients de la matrice suivante

$$\begin{aligned} H(P, C) &= \begin{pmatrix} I_q & -P \\ -C & I_{p-q} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (I_q - P\,C)^{-1} & (I_q - P\,C)^{-1}\,P \\ C\,(I_q - P\,C)^{-1} & I_{p-q} + C\,(I_q - P\,C)^{-1}\,P \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sont stables, c-à-d $H(P, C) \in A^{p\times p}$.

– Un système P est *stabilisable de manière interne* s'il existe un contrôleur C qui le stabilise.

Exemple 1: Le système $p = s/(s-1) \in \mathbb{R}(s)$ n'est pas stabilisé de manière interne par $c = (-s+1)/(s+1)$ car

$$\begin{cases} e_1 = \frac{(s+1)}{(2s+1)}\,u_1 + \frac{s(s+1)}{(2s+1)(s-1)}\,u_2, \\[2ex] e_2 = \frac{(-s+1)}{(2s+1)}\,u_1 + \frac{(s+1)}{(2s+1)}\,u_2, \end{cases}$$

et, la fonction de transfert entre e_1 et u_2 n'est pas stable, c-à-d n'appartient pas à $A = RH_\infty$ [8], [14].

Remarque 1: – Si $A = RH_\infty$ ou $A = H_\infty(\mathbb{C}_+)$ [3], [8], la stabilisation interne est équivalente au fait que l'opérateur

$$\begin{aligned} T_{H(P,\,C)} :\ H_2(\mathbb{C}_+)^p &\longrightarrow H_2(\mathbb{C}_+)^p, \\ u = (u_1 : u_2)^T &\longrightarrow H(P, C)\,u = (e_1 : e_2)^T, \end{aligned}$$

est borné, c-à-d :

$$\mathrm{dom}(T_{H(P,\,C)}) = \{u \in H_2^p \mid H(P, C)\,u \in H_2^p\} = H_2^p.$$

Ainsi, la stabilisation interne est équivalente à la stabilisation H_2 dans le domaine fréquentiel ou à la stabilisation L_2 dans le domaine temporel.

– Si $A = \mathcal{A}$ [3], [8], alors la stabilisation interne implique que, $\forall\, p \in [1, +\infty]$, $T_{H(P,\,C)}$ est borné, où

$$\begin{array}{rcl} T_{H(P,\,C)}: \; L_q(\mathbb{R}_+)^p & \longrightarrow & L_q(\mathbb{R}_+)^p, \\ u = (u_1 \,:\, u_2)^T & \longrightarrow & H(P,\,C) \star u = (e_1 \,:\, e_2)^T, \end{array}$$

c-à-d $\mathrm{dom}(T_{H(P,\,C)}) = L_q(\mathbb{R}_+)^p$. Ainsi, la stabilisation interne implique la stabilisation L_q, $\forall\, q \in [1, +\infty]$.

III. Résultats pour les systèmes MIMO

Nous avons les définitions suivantes [10].

Définition 2: – Un A-module de type fini est *libre* s'il existe $r \in \mathbb{Z}_+$ tel que $M \cong A^r$. r est le *rang* de M.

– Un A-module M de type fini est dit *stablement libre* s'il existe $r, s \in \mathbb{Z}_+$ tels que $M \oplus A^r \cong A^{r+s}$.

– Un A-module M de type fini est dit *projectif* s'il existe $r \in \mathbb{Z}_+$ et un A-module N tel que $M \oplus N \cong A^r$.

Proposition 1: [7], [10] Nous avons les implications : libre $\Rightarrow$ stablement libre $\Rightarrow$ projectif $\Rightarrow$ sans-torsion [8].

Le résultat suivant est central dans ce papier. Il donne une condition nécessaire et suffisante de stabilisation interne et répond ainsi à la question 1 posée dans [8].

Théorème 1: [7] Un système $P = D^{-1} N = \tilde{N}\, \tilde{D}^{-1}$ est stabilisable de manière interne par un contrôleur de la forme $C = Y X^{-1}$ (resp. $C = \tilde{X}^{-1} \tilde{Y}$) ssi le A-module $A^p / \overline{A^q\, R}$ (resp. $A^p / \overline{A^{p-q}\, \tilde{R}^T}$) est projectif, où :

$$\left\{ \begin{array}{l} R = (D \,:\, -N) \in A^{q \times p}, \\ \tilde{R} = (\tilde{N}^T \,:\, \tilde{D}^T)^T \in A^{p \times (p-q)}. \end{array} \right. \qquad (1)$$

Proposition 2: [7] Nous avons les équivalences :

– le A-module $A^p / \overline{A^q\, R}$ est projectif,

– le A-module $A^p\, R^T$ est projectif.

Puisque la stabilisation interne d'un système est équivalente au fait qu'un certain A-module est projectif, il nous faut donc pouvoir reconnaître quand ce module est projectif. Nous aurons besoin des définitions suivantes.

Définition 3: – Soit $R \in A^{q \times p}$. Nous notons par $I_i(R)$ l'idéal de A engendré par les mineurs de taille i de R.

– Si un A-module est de la forme $M = A^p / A^q\, R$, alors les idéaux $\mathrm{Fitt}_i(M) = I_{p-i}(R)$ ne dépendent que du A-module M et non de R (plusieurs matrices de tailles différentes pouvant définir le même A-module M). Ces idéaux sont appelés les *idéaux de Fitting* de M[4].

La proposition suivante permet de reconnaître quand un A-module de la forme $A^p / A^q\, R$ est projectif.

Proposition 3: [4] Un A-module $M = A^p / A^q\, R$ est projectif de rang r ssi il existe $r \in \mathbb{Z}_+$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Fitt}_{r-1}(M) = 0, \\ \mathrm{Fitt}_r(M) = A. \end{array} \right.$$

Exemple 2: Reconsidérons le système instable $P \in K^2$ défini dans l'Exemple 2 de [8], c-à-d défini par la matrice de transfert suivante :

$$P = \left(\begin{array}{c} \frac{e^{-s}}{s-1} \\ \frac{e^{-s}}{(s-1)^2} \end{array} \right) \in K^2, \qquad (2)$$

Dans l'Exemple 7 de [8], nous avons montré que

$$P = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{s+1} & -\frac{s-1}{s+1} \\ \frac{s-1}{s+1} & 0 \end{array} \right)^{-1} \left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{e^{-s}}{s+1} \end{array} \right) \qquad (3)$$

est une *factorisation faiblement copremière à gauche* de P [8]. Donc, si l'on note la matrice

$$R = \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{s+1} & -\frac{s-1}{s+1} & 0 \\ \frac{s-1}{s+1} & 0 & -\frac{e^{-s}}{s+1} \end{array} \right) \in A^{2 \times 3}, \qquad (4)$$

alors, nous avons $\overline{A^2\, R} = A^2\, R$ [8]. Si l'on définit le A-module $M = A^3 / A^2\, R$, nous avons alors :

$$\mathrm{Fitt}_1(M) = \left(\frac{e^{-s}}{(s+1)^2},\, \left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2,\, \frac{(s-1)\, e^{-s}}{(s+1)^2} \right),$$

et nous avons l'identité de Bézout suivante

$$\frac{e^{-s}}{(s+1)^2}\, a + \left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2\, b = 1 \Rightarrow \mathrm{Fitt}_1(M) = A, \qquad (5)$$

où $a,\, b \in A$ sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a & = \frac{4\, e\, (5\, s-3)}{(s+1)}, \\ b & = \frac{(s+25)}{(s+1)} + \frac{4\, (5\, s-3)}{(s+1)}\, \frac{(2-s-e^{-(s-1)})}{(s-1)^2} \\ & = \frac{(s+1)^3 - 4\, (5\, s-3)\, e^{-(s-1)}}{(s+1)\, (s-1)^2}. \end{array} \right. \qquad (6)$$

Par la Proposition 3, le A-module M est projectif et donc P est stabilisable de manière interne par le Théorème 1. Nous renvoyons à [7] pour un algorithme permettant de calculer des contrôleurs stabilisants. Nous obtenons le corollaire suivant du Théorème 1 et de la Proposition 2.

Corollaire 1: [13] Un système $P = D^{-1} N = \tilde{N}\, \tilde{D}^{-1}$ est stabilisable de manière interne par un contrôleur de la forme $C = Y X^{-1}$ (resp. $C = \tilde{X}^{-1} \tilde{Y}$) ssi le A-module $A^p\, R^T$ (resp. $A^p\, \tilde{R}$) est projectif.

Nous obtenons alors une formulation explicite de la stabilité interne en termes de matrices.

Corollaire 2: [7] Un système défini par $P = D^{-1} N$, où $R = (D \,:\, -N) \in A^{q \times p}$, est stabilisable de manière interne ssi il existe $(X^T \,:\, Y^T)^T \in K^{p \times q}$ tel que :

1. $S\, R = \left(\begin{array}{cc} X\, D & -X\, N \\ Y\, D & -Y\, N \end{array} \right) \in A^{p \times p}$,

2. $R\, S = D\, X - N\, Y = I_q$.

Alors, $C = Y X^{-1}$ est un contrôleur stabilisant de P.

Nous renvoyons à [9] pour d'autres résultats similaires.

Définition 4: – Une matrice $R = (D \,:\, -N) \in A^{q \times p}$ est *première à gauche* s'il existe $(X^T \,:\, Y^T)^T \in A^{p \times q}$ telle que :

$$D\, X - N\, Y = I_q.$$

– Une matrice $\tilde{R} = (\tilde{N}^T \,:\, \tilde{D}^T)^T \in A^{p \times (p-q)}$ est *première à droite* s'il existe $(\tilde{Y} \,:\, -\tilde{X}) \in A^{p \times (p-q)}$ telle que :

$$\tilde{Y}\, \tilde{N} - \tilde{X}\, \tilde{D} = I_{p-q}.$$

– Une matrice de transfert $P \in K^{q \times (p-q)}$ admet une *factorisation copremière à gauche* s'il existe une matrice $R = (D \,:\, -N) \in A^{q \times p}$ première à gauche telle que :

$$P = D^{-1}\, N.$$

– Une matrice de transfert $P \in K^{q \times (p-q)}$ admet une *factorisation copremière à droite* s'il existe une matrice $\tilde{R}^T = (\tilde{N}^T \,:\, \tilde{D}^T)^T \in A^{p \times (p-q)}$ première à droite telle que :

$$P = \tilde{N}\, \tilde{D}^{-1}.$$

– Une matrice de transfert $P \in K^{q\times(p-q)}$ admet une *factorisation doublement copremière* si P admet une factorisation copremière à gauche et à droite.

Corollaire 2 n'impose aucune condition sur la matrice de transfert P concernant l'existence de factorisations (faiblement) copremières à gauche ou à droite. Dans certains cas, P possède une de ces propriétés et, alors, le critère de stabilisation interne du Théorème 1 se simplifie.

Corollaire 3: [7] Soit P une matrice de transfert admettant la factorisation faiblement copremière à gauche (resp. à droite) [8] $P = D^{-1}N$ (resp. $P = \tilde{N}\,\tilde{D}^{-1}$), où R et $\tilde{R}$ sont définies par (1). Alors, P est stabilisable de manière interne ssi $P = D^{-1}N$ (resp. $P = \tilde{N}\,\tilde{D}^{-1}$) est une factorisation copremière à gauche (resp. à droite) de P. Alors, $C = Y\,X^{-1}$ (resp. $C = \tilde{X}^{-1}\,\tilde{Y}$) est un contrôleur stabilisant de P, où $D\,X - N\,Y = I_p$ (resp. $\tilde{Y}\,\tilde{N} - \tilde{X}\,\tilde{D} = I_{p-q}$).

Donc, il nous faut savoir reconnaître quand une matrice de transfert admet une factorisation copremière à gauche ou à droite. Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante (voir aussi le Théorème 3).

Théorème 2: [7] $P = D^{-1}N = \tilde{N}\,\tilde{D}^{-1} \in K^{q\times(p-q)}$ admet une factorisation copremière à gauche (resp. à droite) ssi le A-module $\overline{A^q\,R}$ (resp. $\overline{A^{p-q}\,\tilde{R}^T}$) est libre de rang q (resp. $p-q$) et le A-module $A^p/\overline{A^q\,R}$ (resp. $A^p/\overline{A^{p-q}\,\tilde{R}^T}$) est stablement libre, où R et $\tilde{R}$ sont définies par (1).

La proposition suivante permet de reconnaître quand un A-module de la forme $M = A^p/A^q\,R$ est stablement libre.

Proposition 4: [7] Si $R \in A^{q\times p}$ $(1 \le q \le p)$ est une matrice de rang de q, c-à-d les lignes de R sont A-linéairement indépendantes, alors le A-module $M = A^p/A^q\,R$ est stablement libre ssi le A-module $T(M) = A^q/A^p\,R^T = 0$, c-à-d s'il existe $S \in A^{p\times q}$ tel que $R\,S = I_q$.

Exemple 3: Dans l'Exemple 2, nous avons vu que (3) est une factorisation faiblement copremière à gauche de la matrice de transfert P définie par (2). Ainsi, par le Corollaire 3, P est stabilisable de manière interne ssi P a une factorisation copremière à gauche. Le fait que (3) est une factorisation faiblement copremière à gauche de P implique que $\overline{A^2\,R} = A^2\,R$, où R est la matrice de rang 2 définie par (4). Donc, $\overline{A^2\,R}$ est un A-module libre de rang 2 (voir le Théorème 2 de [8] pour plus de détails). Par le Théorème 2, (3) est une factorisation copremière à gauche de P ssi le A-module $M = A^3/A^2\,R$ est stablement libre, c-à-d ssi $T(M) = A^2/A^3\,R^T = 0$ par la Proposition 4. Le A-module $T(M)$ est défini par les équations qui correspondent à mettre $\mu_i = 0$ dans les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{(s+1)}\,\lambda_1 + \frac{(s-1)}{(s+1)}\,\lambda_2 = \mu_1,\\ -\frac{(s-1)}{(s+1)}\,\lambda_1 = \mu_2,\\ -\frac{e^{-s}}{s+1}\,\lambda_2 = \mu_3. \end{array}\right. \tag{7}$$

Des 2 premières équations, on déduit que :

$$\left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2 \lambda_2 = \frac{(s-1)}{(s+1)}\,\mu_1 + \frac{1}{(s+1)}\,\mu_2. \tag{8}$$

En combinant cette nouvelle équation et la dernière équation de (7) en suivant la relation (5), nous obtenons

$$\lambda_2 = \frac{b\,(s-1)}{(s+1)}\,\mu_1 + \frac{b}{(s+1)}\,\mu_2 - \frac{a}{(s+1)}\,\mu_3, \tag{9}$$

où a et b sont définis par (6). Des deux premières équations de (7), nous obtenons :

$$\lambda_1 + 2\,\frac{(s-1)}{(s+1)}\,\lambda_2 = 2\,\mu_1 - \mu_2.$$

En utilisant cette équation et (9), nous obtenons alors :

$$\begin{array}{r} \lambda_1 = 2\,(-\,b\left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2 + 1)\,\mu_1 - (2\,b\,\frac{(s-1)}{(s+1)^2} + 1)\,\mu_2 \\ +2\,a\,\frac{(s-1)}{(s+1)^2}\,\mu_3. \end{array} \tag{10}$$

Si l'on évalue (9) et (10) pour $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$, nous obtenons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, c-à-d $T(M) = 0$ et donc M est un A-module stablement libre. On retrouve le fait que P est stabilisable de manière interne. De plus, la matrice

$$S = \begin{pmatrix} -2\,b\left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2 + 2 & b\,\frac{(s-1)}{(s+1)} \\ -2\,b\,\frac{(s-1)}{(s+1)^2} - 1 & \frac{b}{(s+1)} \\ 2\,a\,\frac{(s-1)}{(s+1)^2} & -\frac{a}{(s+1)} \end{pmatrix}$$

est un inverse à droite de R, c-à-d $R\,S = I_2$. Donc (3) est une factorisation copremière à gauche de P :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{(s+1)} & -\frac{(s-1)}{(s+1)} \\ \frac{(s-1)}{(s+1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\,b\left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2 + 2 & b\,\frac{(s-1)}{(s+1)} \\ -2\,b\,\frac{(s-1)}{(s+1)^2} - 1 & \frac{b}{(s+1)} \end{pmatrix}$$
$$- \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{-s}}{s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\,a\,\frac{(s-1)}{(s+1)^2} : & -\frac{a}{(s+1)} \end{pmatrix} = I_2.$$

Ainsi, un contrôleur stabilisant de P est défini par :

$$\begin{array}{rl} C & = \begin{pmatrix} 2\,a\,\frac{(s-1)}{(s+1)^2} : & -\frac{a}{(s+1)} \end{pmatrix} \\ & \quad \begin{pmatrix} -2\,b\left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2 + 2 & b\,\frac{(s-1)}{(s+1)} \\ -2\,b\,\frac{(s-1)}{(s+1)^2} - 1 & \frac{b}{(s+1)} \end{pmatrix}^{-1} \\ & = -\frac{4\,(5\,s-3)\,e\,(s-1)^2}{(s+1)\,((s+1)^3 - 4\,(5\,s-3)\,e^{-(s-1)})} \begin{pmatrix} 1 : & 2 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Corollaire 4: [7] Si A est un *domaine cohérent de Sylvester* [8], alors P est stabilisable de manière interne ssi P admet une factorisation doublement copremière.

Exemple 4: Grâce à l'Exemple 9 et au Théorème 3 de [8], nous savons que $H_\infty(\mathbb{C}_+)$, $\mathcal{E}$ et RH_∞ sont des domaines de Sylvester cohérents. Pour $A = RH_\infty$, l'équivalence entre stabilisation interne et l'existence de factorisations doublement copremières est connue depuis longtemps [14]. Nous montrerons au Théorème 6 que ce résultat s'étend aux domaines de Bézout. Ce résultat est dû à M. Vidyasagar [14]. Pour $A = H_\infty(\mathbb{C}_+)$, l'équivalence entre la stabilisation interne et l'existence de factorisation doublement copremière a été prouvée dans [12]. Ainsi, le Corollaire 4 permet de généraliser ces différents résultats en caractérisant une très large classe d'anneaux pour lesquels il y a équivalence entre la stabilisation interne et l'existence de factorisations doublement copremières.

Le théorème suivant donne une nouvelle condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une factorisation copremière à gauche ou à droite d'une matrice de transfert.

Théorème 3: – [7] $P = D^{-1}N = \tilde{N}\,\tilde{D}^{-1} \in K^{q\times(p-q)}$ admet une factorisation copremière à gauche (resp. à droite) ssi le A-module $A^p/\overline{A^{p-q}\,\tilde{R}^T}$ (resp. $A^p/\overline{A^q\,R}$) est libre de rang q (resp. $p-q$), R et $\tilde{R}$ définies par (1).

– [7] $P = D^{-1} N = \tilde{N} \tilde{D}^{-1} \in K^{q\times(p-q)}$ admet une factorisation doublement copremière ssi les A-modules $A^p/\overline{A^q\,R}$ et $A^p/\overline{A^{p-q}\,\tilde{R}^T}$ sont libres de rang $p-q$ et q.

En utilisant les résultats 3 et 4 de la Proposition 1 de [8], on obtient alors le résultat suivant.

Corollaire 5: [13] $P = D^{-1} N = \tilde{N} \tilde{D}^{-1} \in K^{q\times(p-q)}$ admet une factorisation doublement copremière ssi les A-modules $A^p\,R^T$ et $A^p\,\tilde{R}$ sont libres de rang q et $p-q$.

D'après les Théorèmes 1 et 3, l'existence d'une factorisation copremière à gauche ou à droite pour un système implique la stabilisation interne. La réciproque n'est pas vraie. Ces théorèmes permettent d'expliquer pourquoi le système stabilisable donné dans [1] n'admet pas de factorisations doublement copremières [7].

Remarque 2: Grâce à la Proposition 2, la condition de stabilisation interne du Théorème 1 est duale de la condition donnée dans [13]. Ainsi, à la place de travailler avec les A-modules $\overline{A^q\,R}$ et $\overline{A^{(p-q)}\,\tilde{R}^T}$, et de parler d'égalité de modules, l'approche développée dans [6], [13] utilise les A-modules $A^p\,R^T$ et $A^p\,\tilde{R}$ qui ne sont définis qu'à un isomorphisme près (pour plus de détails, voir la Proposition 1 et le Corollaire 1 de [8]). Comme tous résultats équivalents mais duaux, certains aspects apparaissent plus clairement dans une approche que dans l'autre et réciproquement. Ainsi, le Théorème 1 permet de généraliser l'approche et les résultats obtenus dans [12] (voir les Corollaires 3 et 4), ce qui n'est pas possible avec l'approche de [6], [13]. De plus, le test qui caractérise les A-modules projectifs de la forme $A^p\,R^T$, développé dans [6], est nettement plus complexe que celui donné dans la Proposition 3 pour les A-modules $A^p/\overline{A^q\,R}$. Cependant, nous allons voir que pour les systèmes SISO, l'approche duale du Théorème 1, c-à-d le Corollaire 1, permet d'obtenir de nouvelles caractérisations de la stabilisation interne (non obtenues dans [6], [11], [13]).

IV. Résultats pour les systèmes SISO

Définition 5: – [2] Un *idéal fractionnaire* I de A est un sous A-module de $K = Q(A)$ tel qu'il existe $0 \neq a \in A$ satisfaisant $a\,I \subseteq A$.

– [2] Un *idéal principal fractionnaire* est un idéal fractionnaire de la forme de $(k) = A\,k$ avec $k \in K = Q(A)$.

– [2] Un idéal de A est en particulier un idéal fractionnaire de A. Un tel idéal est appelé un *idéal entier* de A.

Si I et J sont deux idéaux fractionnaires de A, alors

$$\begin{cases} I \cap J = \{a \in I,\, a \in J\}, \\ I + J = \{a + b \mid a \in I,\, b \in J\}, \\ I\,J = (\{\sum_{i=1}^n a_i\,b_i \mid a_i \in I,\, b_i \in J,\, n \in \mathbb{Z}_+\}), \\ I : J = \{k \in K = Q(A) \mid k\,J \subset I\}, \end{cases}$$

sont des idéaux fractionnaires de A. Nous notons par $\mathcal{F}(A)$ l'ensemble des idéaux fractionnaires non nuls de A et par $\mathcal{P}(A)$ le groupe multiplicatif des idéaux principaux fractionnaires non nuls. On peut définir une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}(A)$ par "$I \sim J$ s'il existe $(k) \in \mathcal{P}(A)$ tel que $J = (k)\,I$". Remarquons que "I est congruent à J" est équivalent à $I \cong J$ (voir l'Exemple 6 de [8]). Nous appelerons le *semi-groupe des classes des idéaux fractionnaires*, le semi-groupe défini par

$$\mathcal{S}(A) = \mathcal{F}(A)/\sim,$$

où, si l'on note par $[I]$ la classe de I dans $\mathcal{S}(A)$, le produit de $\mathcal{S}(A)$ est défini par $[I]\,[J] = [I\,J]$. $\mathcal{S}(A)$ peut être vu comme le semi-groupe multiplicatif des *classes d'isomorphies* des idéaux fractionnaires de A.

Proposition 5: Les *propriétés structurelles (intrinsèques)* du système SISO, défini par une fonction de transfert $p \in K = Q(A)$, ne dépendent que de la classe $[(1,\, p)]$ de l'idéal fractionnaire $(1,\, p) = A + A\,p$ dans $\mathcal{S}(A)$.

Preuve : Au Corollaire 1 de [8], nous avons montré que les propriétés de p ne dépendent que de la classe d'isomorphie de l'idéal entier $I = (d,\, n)$, où $p = n/d$ $(0 \neq d,\, n \in A)$ est une représentation fractionnaire quelconque de p . De plus, nous avons $J = (1,\, p) = (1/d)\,I$, c-à-d $J \sim I$. Donc, les propriétés de p ne dépendent que de la classe $[(1,\, p)]$ de l'idéal fractionnaire $J = (1,\, p)$ dans $\mathcal{S}(A)$.

Un idéal fractionnaire I est *inversible* s'il existe un idéal $J \in \mathcal{F}(A)$ tel que $I\,J = A$. On vérifie facilement qu'un idéal inversible I est *simplifiable*, c-à-d :

$$\forall\, J, L \in \mathcal{F}(A),\ I\,J = I\,L \Rightarrow J = L.$$

En particulier, cela implique que l'inverse d'un idéal inversible est défini de manière unique. On note cet inverse par I^{-1}. On peut montrer que si I est un idéal fractionnaire inversible, alors nous avons [2], [10] :

$$I^{-1} = A : I = \{k \in K = Q(A) \mid k\,I \subseteq A\}.$$

On note par $\mathcal{I}(A)$ le groupe multiplicatif des idéaux fractionnaires de A non nuls inversibles et, puisque $\mathcal{P}(A)$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathcal{I}(A)$, on désignera par

$$\mathcal{C}(A) = \mathcal{I}(A)/\mathcal{P}(A)$$

le groupe des classes d'isomorphies des idéaux fractionnaires non nuls inversibles, appelé le *groupe des classes* [2].

Maintenant, appliquons le Théorème 1 à un système SISO défini par $p = n/d$ $(0 \neq d, n \in A)$. Alors, p est stabilisable de manière interne ssi le A-module $A^2/\overline{A\,(d :\ -n)}$ est projectif et donc, par la Proposition 2, ssi l'idéal

$$A^2\,(d :\ -n)^T = A\,d + A\,(-n) = (d, n)$$

est projectif. Nous avons donc le corollaire suivant.

Corollaire 6: [7] Les propositions sont équivalentes :

1. un système SISO défini par $p = n/d$ $(0 \neq d, n \in A)$ est stabilisable de manière interne,
2. l'idéal $I = (d, n)$ engendré par d et n est projectif,
3. l'idéal entier $I \neq 0$ est *inversible*, c-à-d $I\,I^{-1} = A$,
4. il existe $x,\, y \in K = Q(A)$ tels que :

$$\begin{cases} d\,x - n\,y = 1, \\ d\,x,\ d\,y,\ n\,x,\ n\,y \in A. \end{cases} \tag{11}$$

Alors, le contrôleur $c = y/x = (d\,y)/(d\,x)$ stabilise de manière interne le système $p = n/d$ et $I^{-1} = (x,\, y)$.

Remarque 3: On vérifie facilement par le calcul que le contrôleur $c = y/x$, défini précédemment, stabilise de manière interne le système $p = n/d$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -n/d \\ -y/x & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d\,x & n\,x \\ d\,y & d\,x \end{pmatrix} \in A^{2\times 2}.$$

De plus, on peut montrer que $I\,I^{-1} = (d) :_A (n) + (n) :_A (d)$ [7], où l'on note ici $(d) :_A (n) = \{a \in A \mid a\,n \in (d)\}$ (attention à la confusion possible avec $(d) : (n)$). Donc, par le Corollaire 6, le système $p = n/d$ est stabilisable de manière interne ssi $(d) :_A (n) + (n) :_A (d) = A$. Ainsi, on retrouve le résultat de [11]. Cependant, l'approche de la stabilisation interne des systèmes SISO par les idéaux fractionnaires permet de traiter similairement tout système défini par $P \in K^{1\times p}$ [7]. De plus, elle montre qu'il existe des connexions entre l'automatique et une partie de l'algèbre commutative développée à partir des travaux de E. Kummer et R. Dedekind [9]. Finalement, l'idée que la stabilisation revient à l'existence d'un (idéal) inverse a l'avantage d'être simple et intuitive : le contrôleur est "l'inverse" du système (compensation des pôles instables).

Exemple 5: Considérons le système instable suivant :

$$p = (1 - e^{-s})/(s\,(s-1)).$$

Si $A = H_\infty(\mathbb{C}_+)$, alors p peut s'écrire $p = n/d$, où :

$$n = \tfrac{1-e^{-s}}{(s+1)^2} \in A, \quad d = \tfrac{s\,(s-1)}{(s+1)^2} \in A.$$

Alors, p est stabilisable de manière interne ssi l'idéal

$$I = \left(\tfrac{1-e^{-s}}{(s+1)^2},\ \tfrac{s\,(s-1)}{(s+1)^2}\right)$$

est inversible. Nous vérifions que $A : I = (1,\,(s+1)/s)$ car :

$$\begin{cases} \left(\frac{s+1}{s}\right) \frac{1-e^{-s}}{(s+1)^2} = \frac{1-e^{-s}}{s}\,\frac{1}{(s+1)} \in A, \\ \left(\frac{s+1}{s}\right) \frac{s\,(s-1)}{(s+1)^2} = \frac{(s-1)}{(s+1)} \in A. \end{cases}$$

De là, nous avons $I\,(A : I) = \left(\frac{1-e^{-s}}{s\,(s+1)},\ \frac{(s-1)}{(s+1)}\right)$. Ceci montre que la représentation de p la plus judicieuse pour tester la stabilité interne est $p = n'/d'$ avec :

$$n' = \tfrac{1-e^{-s}}{s\,(s+1)} \in A, \quad d' = \tfrac{(s-1)}{(s+1)} \in A.$$

Nous vérifions facilement que

$$\inf_{\{s\in\mathbb{C}\,\mid\,\mathrm{Re}\,s>0\}} \left(\left|\tfrac{1-e^{-s}}{s\,(s+1)}\right| + \left|\tfrac{s-1}{s+1}\right|\right) > 0,$$

car d' n'a qu'un zéro en 1. Donc, nous avons $1 \in I\,(A : I)$ [3], [7], [14], c-à-d I est inversible et p est stabilisable.

Remarque 4: Si n/d $(0 \neq d,\, n \in A)$ est une factorisation faiblement copremière [8] de $p \in K$, c-à-d nous avons $A : (d,\, n) = A$, alors p est stabilisable de manière interne ssi $I = (d,\, n) = A$, c-à-d ssi n/d est une factorisation copremière de p (il existe $x,\, y \in A$ tels que $d\,x - n\,y = 1$ et $p = n/d$). Alors, $c = y/x$ stabilise p.

Théorème 4: Nous avons les équivalences suivantes :

1. un système SISO défini par $p \in K$ est stabilisable de manière interne,
2. l'idéal fractionnaire $J = (1, p) = A + A\,p$ est projectif,
3. l'idéal $J \neq 0$ est *inversible*, c-à-d $J\,J^{-1} = A$, où :

$$J^{-1} = \{k \in K \mid k\,J \subseteq A\} = \{k \in A \mid k\,p \in A\},$$

4. il existe $a,\, b \in A$ tels que :

$$\begin{cases} a - p\,b = 1, \\ p\,a,\ p\,b \in A. \end{cases} \qquad (12)$$

Alors, le contrôleur $c = b/a$ stabilise de manière interne le système p et nous avons $J^{-1} = (a,\, b)$.

Preuve : En utilisant le Corollaire 6, nous avons juste besoin de montrer que l'idéal fractionnaire $J = (1,\, p)$ est inversible ssi l'idéal entier $I = (d,\, n)$ l'est aussi, où $p = n/d$ avec $0 \neq d,\, n \in A$. Cependant, nous avons $J = (1/d)\,I$, et donc, J est inversible ssi I est inversible puisque l'idéal principal fractionnaire $(1/d)$ est inversible. Le dernier point du théorème résulte directement de l'explicitation du fait que $J\,J^{-1} = A$ et de la définition de J^{-1}.

Notons que l'on peut aussi vérifier $4 \Rightarrow 1$ par le calcul :

$$1 - p\,c = 1 - p\,(ba^{-1}) = (a - p\,b)\,a^{-1} = a^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -p \\ -c & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & p\,a \\ b & a \end{pmatrix} \in A^{2\times 2},$$

ce qui prouve que c stabilise de manière interne p.

Exemple 6: Considérons $A = H_\infty(\mathbb{C}_+)$ et le système :

$$p = e^{-s}/(s-1) \in K = Q(A).$$

Par le Théorème 4, p est stabilisable de manière interne ssi l'idéal $J = (1,\, p)$ est inversible. Par un simple calcul, nous obtenons alors $A : J = ((s-1)/(s+1))$ et donc :

$$J\,(A : J) = \left(\tfrac{s-1}{s+1},\ \tfrac{e^{-s}}{s+1}\right).$$

Nous avons alors

$$\left(\tfrac{s-1}{s+1}\right)\left(1 + 2\left(\tfrac{1-e^{-(s-1)}}{s-1}\right)\right) + \left(\tfrac{e^{-s}}{s+1}\right) 2\,e = 1, \qquad (13)$$

donc, $J\,(A : J) = A$, J est inversible et $J^{-1} = A : J$. Ainsi, p est stabilisable. En utilisant (13), nous obtenons :

$$\left(\tfrac{s-1}{s+1}\right)\left(1 + 2\left(\tfrac{1-e^{-(s-1)}}{s-1}\right)\right) - p\left(-2\,e\,\tfrac{s-1}{s+1}\right) = 1,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{(s-1)}{(s+1)}\left(1 + 2\left(\frac{1-e^{-(s-1)}}{s-1}\right)\right) \in J^{-1}, \\ b = -2\,e\,\frac{(s-1)}{(s+1)} \in J^{-1}. \end{cases}$$

Un contrôleur stabilisant de p est donné par $c = b/a$.

Le Théorème 4 a l'avantage sur le Corollaire 6 de ne pas utiliser de représentation fractionnaire n/d de p. Cependant, puisque la stabilisation interne est une propriété structurelle des systèmes, par la Proposition 5, elle ne doit dépendre que de la classe $[(1,\, p)]$ de $J = (1,\, p)$ dans $\mathcal{S}(A)$.

Corollaire 7: Un système, défini par $p \in K = Q(A)$, est stabilisable de manière interne ssi $[(1,\, p)]$ est un élément inversible de $\mathcal{S}(A)$, c-à-d $[(1,\, p)] \in \mathcal{C}(A)$.

Preuve : $\Rightarrow$ Si p est stabilisable de manière interne, alors, par le Théorème 4, l'idéal fractionnaire $J = (1,\, p)$ est inversible dans $\mathcal{F}(A)$, c-à-d $J\,J^{-1} = A$. Donc, $[J\,J^{-1}] = [J]\,[J^{-1}] = A$, c-à-d $[J]$ est inversible dans $\mathcal{S}(A)$.

$\Leftarrow$ Si $[(1,\, p)]$ est inversible dans $\mathcal{S}(A)$, alors il existe $[I]$ tel que $[(1,\, p)]\,[I] = A$, c-à-d, il existe $k \in K = Q(A)$ tel que $(1,\, p)\,I = (k)$. D'où, $(1,\, p)\,((k^{-1})\,I) = A$, c-à-d $(1,\, p)$ est inversible dans $\mathcal{F}(A)$. Par le Théorème 4, p est stabilisable.

Grâce au Corollaire 5, nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 8: [14] Un système SISO, défini par une fonction de transfert $p = n/d$ $(0 \neq d,\, n \in A)$ admet une factorisation doublement copremière ssi l'idéal $I = (d,\, n)$ est libre, c-à-d *principal* (de la forme $I = A\,a$ avec $a \in A$).

Grâce à la Proposition 5, nous savons qu'il doit exister une formulation du corollaire précédent en termes de la classe d'isomorphie $[(1,\, p)]$ de l'idéal fractionnaire $(1,\, p)$.

Corollaire 9: Un système SISO, défini par une fonction de transfert $p \in K = Q(A)$, admet une factorisation doublement copremière ssi l'idéal fractionnaire $J = (1,\, p)$ est principal, c-à-d ssi $[(1,\, p)] = A$.

Preuve : $\Rightarrow$ Si p admet une factorisation doublement copremière $p = n/d$, avec $a\, n - b\, d = 1$, $a, b \in A$, alors $I = (d,\, n) = A$, donc $J = (1,\, p) = (1/d)\, I = (1/d) \in \mathcal{P}(A)$.

$\Leftarrow$ Si l'idéal fractionnaire $J = (1,\, p)$ est principal, c-à-d de la forme $J = (k)$ avec $k \in K = Q(A)$, alors il existe $a,\, b,\, n,\, d \in A$ tel que nous avons :

$$k = a - b/p, \quad 1 = d\, k, \quad p = n\, k.$$

De la seconde équation, nous déduisons que $k = 1/d$, et donc, la troisième équation devient alors $p = n/d$. En substituant k et p dans la première équation, nous obtenons alors l'identité de Bézout $a\, d - b\, n = 1$, ce qui prouve que $p = n/d$ est une factorisation doublement copremière de p.

V. Domaines de Prüfer

Définition 6: [2], [5], [10] Un anneau A est un *domaine de Prüfer* s'il satisfait l'une des équivalences suivantes :

1. $\forall\, 0 \neq d, n \in A$, $\exists\, x, y \in K = Q(A)$ tels que :

$$\begin{cases} x\, d - y\, n = 1, \\ x\, d,\ x\, n,\ y\, d,\ y\, n \in A. \end{cases}$$

2. Tout idéal finiment engendré I de A est projectif ou, de manière équivalente, si tout idéal $I \neq 0$ de A est inversible.

3. $\forall\, p \in K$, l'idéal fractionnaire $J = (1,\, p)$ est inversible.

4. Tout A-module sans-torsion de type fini est projectif.

Exemple 7: Les domaines de Prüfer sont des domaines souvent utilisés en géométrie algébrique et en théorie des nombres. La clôture entière de $\mathbb{Z}$ dans une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}$ (par exemple, $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ [1], [7]) ou l'anneau affine d'une surface algébrique non-singulière (par exemple $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ [7]) sont des domaines de Dedekind [2], [10], c-à-d des domaines de Prüfer noethériens. Plusieurs anneaux de fonctions sont des domaines de Prüfer (l'anneau des fonctions entières $E(k)$ [8], $\mathcal{E}$ [8], l'anneau des *fonctions de Nash méromorphes bornées* [7]...)

Théorème 5: [7] Nous avons les équivalences suivantes :

1. Tout système MIMO, défini par une matrice de transfert à coefficients dans K, est stabilisable de manière interne,

2. Tout système SISO, défini par une fonction de transfert dans $K = Q(A)$, est stabilisable de manière interne,

3. A est un domaine de Prüfer.

Ce résultat répond entièrement à la question 2 de [8].

VI. Un résultat de M. Vidyasagar

Définition 7: Un *domaine de Bézout* est un anneau intègre dans lequel tout idéal finiment engendré, c-à-d de la forme $I = \sum_{i=1}^{n} A\, a_i$ où n est fini et $a_i \in A$, est principal, c-à-d de la forme $I = A\, a$ pour un certain élément $a \in A$.

Exemple 8:
- Tout anneau principal (un anneau intègre dont tout idéal est principal) est un domaine de Bézout. RH_∞ et $k[s]$, où k est un corps, sont deux anneaux intègres principaux [14], donc de Bézout.
- L'anneau des fonctions entières $E(k)$ à coefficients réels ou complexes ($k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) et $\mathcal{E} = \mathbb{R}(s)\,[e^{-s}] \cap E(\mathbb{R})$ sont des domaines de Bézout (voir [7], [8]).

Proposition 6: [2], [10] Un domaine A est de Bézout ssi tout A-module sans-torsion de type fini est libre.

En utilisant le Théorème 3 et le Corollaire 8, la proposition précédente permet de retrouver le résultat suivant.

Théorème 6: [14] Nous avons les équivalences suivantes :

1. Tout système MIMO, défini par une matrice de transfert à coefficients dans $K = Q(A)$, admet une factorisation doublement copremière,

2. Tout système SISO, défini par une fonction de transfert à coefficients dans $K = Q(A)$, admet une factorisation doublement copremière,

3. A est un domaine de Bézout.

On peut aussi retrouver ce résultat si l'on note :

$$\text{domaines de Sylvester cohérents} \cap \text{domaines de Prüfer} = \text{domaines de Bézout}.$$

L'existence d'une factorisation doublement copremière pour un système implique celle d'une paramétrisation de Youla des contrôleurs stabilisants [7], [14]. Voir [9] pour une généralisation de la paramétrisation de Youla.

Proposition 7: [7] Si A est un domaine pour lequel tout A-module projectif de type fini est libre [10], alors tout système stabilisable admet une paramétrisation de Youla. Ainsi, si A est *un domaine projectif-libre*, c-à-d tout A-module projectif de type fini est libre, alors nous avons équivalence entre stabilisation interne et existence d'une paramétrisation de Youla des contrôleurs stabilisants.

Nous renvoyons le lecteur à [7], [9] pour d'autres résultats sur l'approche fractionnaire des problèmes de stabilisation.

Références

[1] V. Anantharam, « On stabilization and existence of coprime factorizations », *IEEE Trans. Autom. Contr.*, vol. 30, pp. 1030-1031, 1985.

[2] N. Bourbaki, *Algèbre Commutative*, Chap. 5-7, Masson, 1985.

[3] R. F. Curtain, H. J. Zwart, *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*, TAM vol. 21, Springer-Verlag, 1991.

[4] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, GTM, vol. 150, Springer, 1995.

[5] C. U. Jensen, « On characterizations of Prüfer rings », *Math. Scand.*, vol 13, pp. 90-98, 1963.

[6] K. Mori, K. Abe, « Feedback stabilization over commutative rings : further study of coordinate-free approach », *SIAM J. Contr. and Optim.*, vol. 39, pp. 1952-1973, 2001.

[7] A. Quadrat, « The fractional representation approach to synthesis problems : an algebraic analysis viewpoint », à paraître dans *SIAM J. Contr. and Optim.*, 2002.

[8] A. Quadrat, « Une approche de la stabilisation interne par l'analyse algébrique I. Factorisations doublement faiblement copremières », CIFA 2002, Nantes, France.

[9] A. Quadrat, « Algebraic K-theory & Internal stabilization », en préparation.

[10] J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press, 1979.

[11] S. Shankar, V. R. Sule, « Algebraic geometric aspects of feedback stabilization », *SIAM J. Contr. Optim.*, vol. 30, pp. 11-30, 1992.

[12] M. C. Smith, « On stabilization and the existence of coprime factorizations », *IEEE. Trans. Autom. Contr.*, vol. 34, pp. 1005-1007, 1989.

[13] V. R. Sule, « Feedback stabilization over commutative rings : the matrix case », *SIAM J. Contr. Optim.*, vol. 32, pp. 1675-1695, 1994 et "Corrigendum", vol. 36, pp. 2194-2195, 1998.

[14] M. Vidyasagar, *Control System Synthesis*, MIT Press, 1985.