Connexions sur les systèmes linéaires stabilisables

A. Quadrat *

* *INRIA Saclay - Île-de-France, Projet DISCO, L2S, Supélec, 3 rue Joliot Curie, 91192 Gif-sur-Yvette cédex, France (e-mail : alban.quadrat@inria.fr)*

Résumé En utilisant des concepts et des techniques venant de la géométrie non-commutative, le but de ce papier est de montrer que tout système linéaire stabilisable de manière interne au sens de Desoer, Vidyasagar, Zames... peut être doté d'une structure de connexion de Grassmann/Levi-Civita. Similairement, tout contrôleur stabilisant admet une telle connexion. Nous explicitons cette construction dans le cas des systèmes SISO. Nous présentons aussi le calcul différentiel quantique en dimension 1. L'introduction du concept géométrique de connexion dans les problèmes de stabilisation est le premier pas vers des travaux futurs exploitant la géométrie du système et des ses contrôleurs stabilisants dans l'étude des problèmes H^∞ et H^2.

Keywords: Stabilisation interne, systèmes linéaires de dimension infinie, K-théorie, géométrie non-commutative, calcul différentiel quantique, géométrie différentielle, commande robuste.

1. STABILISATION INTERNE

Rappelons quelques définitions classiques (voir Curtain et Zwart (1991); Vidyasagar (1985) et leurs références).

Définition 1. Soient A un anneau intègre, $K = Q(A)$ son corps de fractions et un système défini par $p \in K$.

(1) Le système p est *stabilisable de manière interne* s'il existe $c \in K$ tel que $1 - p\,c \neq 0$ et :
$$\begin{pmatrix} 1 & -p \\ -c & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (1-p\,c)^{-1} & p\,(1-p\,c)^{-1} \\ c\,(1-p\,c)^{-1} & (1-p\,c)^{-1} \end{pmatrix} \in A^{2\times 2}.$$
La matrice précédente est la matrice de transfert reliant $(u_1 \quad u_2)^T$ à $(e_1 \quad e_2)^T$ (voir Figure 1). On dit alors que c est un *contrôleur stabilisant* p. L'ensemble des contrôleurs stabilisant p est noté $\mathrm{Stab}(p)$.

(2) Le système p admet une *factorisation copremière* s'il existe $d \in A \setminus \{0\}$ et $n, x, y \in A$ tels que :
$$p = d^{-1}\,n, \quad d\,x - n\,y = 1.$$

Définition 2. (Bourbaki (1989)). Soient A un anneau intègre et $K = Q(A)$ son corps de fractions.

(1) Un *idéal fractionnaire* J de A est un A-sous-module de K tel qu'il existe $d \in A \setminus \{0\}$ satisfaisant :
$$(d)\,J := \{d\,j \mid j \in J\} \subseteq A.$$

(2) Si I et J sont deux idéaux fractionnaires, alors leur *somme* et *produit*, respectivement définis par
$$I + J = \{i + j \mid i \in I,\ j \in J\},$$
$$I\,J = \left\{\sum_{k=1}^{n} i_k\,j_k \mid n \in \mathbb{N},\ i_k \in I,\ j_k \in J\right\},$$
sont des idéaux fractionnaires de A.

(3) Un idéal fractionnaire J de A est *principal* s'il existe $k \in K$ tel que $J = (k) := \{a\,k \mid a \in A\}$.

(4) Si I et J sont deux idéaux fractionnaires de A, alors on note $I : J := \{k \in K \mid (k)\,J \subseteq I\}$.

(5) Un idéal fractionnaire J de A est *inversible* s'il existe un idéal fractionnaire I de A tel que $I\,J = A$.

L'anneau A est généralement RH_∞, $H^\infty(\mathbb{C}_+)$, $H^\infty(\mathbb{D})$, $A(\mathbb{D})$ et W_+ (Curtain et Zwart (1991); Vidyasagar (1985)).

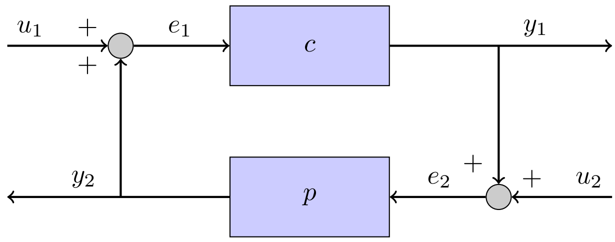

FIGURE 1. Boucle fermée

Théorème 1. (Bourbaki (1989)). Si J est un idéal fractionnaire inversible de A, alors J admet un unique inverse J^{-1} défini par $J^{-1} = A : J = \{k \in K \mid (k)\,J \subseteq A\}$.

Théorème 2. (Quadrat (2003)). Soient A un anneau intègre, $K = Q(A)$ son corps de fractions et $p \in K$.

(1) $J = (1, p) := \{1\,\alpha + p\,\beta = \alpha + p\,\beta \mid \alpha, \beta \in A\}$ est un idéal fractionnaire de A.

(2) Le système p admet une factorisation copremière ssi $J = (1, p)$ est un idéal fractionnaire principal. Si $k \in K$ est tel que $J = (k)$, alors il existe $d \in A \setminus \{0\}$ tel que $k = d^{-1}$, et $p = d^{-1}\,n$ est une factorisation copremière de p avec $n := d\,p \in A$.

(3) Le système p est stabilisable de manière interne ssi J est un idéal fractionnaire inversible. L'inverse J^{-1} de J est alors $J^{-1} = (a, b) := \{a\,\alpha + b\,\beta \mid \alpha, \beta \in A\}$, où $a, b \in A : J = \{d \in A \mid d\,p \in A\}$ sont tels que :
$$a - p\,b = 1. \quad (1)$$
Si $a \neq 0$, alors $c := b\,a^{-1}$ stabilise p et :
$$a = (1 - p\,c)^{-1}, \quad b = c\,(1 - p\,c)^{-1}. \quad (2)$$
Si $a = 0$, alors $c = -(1 + b)$ stabilise p.

(4) Soient $c_\star$ un contrôleur stabilisant p et :

$$u = (1 - p\, c_\star)^{-1}, \quad v = c_\star\, (1 - p\, c_\star)^{-1}.$$

Alors, $\mathrm{Stab}(p)$ est paramétré par :

$$\begin{aligned} \forall\, q \in J^{-2} = (u^2, v^2) :\ u + p\, q \neq 0, \\ c(q) = (v + q)\,(u + p\, q)^{-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

(5) Si p admet une factorisation copremière $p = d^{-1}\, n$ avec $d\, x - n\, y = 1$, alors $a = x\, d \in J^{-1}$, $b = y\, d \in J^{-1}$ et $J^{-2} = (d^2)$. Alors, (3) devient la *paramétrisation de Youla-Kučera* des contrôleurs stabilisants de p :

$$\forall\, r \in A :\ x + n\, r \neq 0,\ c(r) = (y + d\, r)\,(x + n\, r)^{-1}.$$

2. MODULES PROJECTIFS

Nous référons à Quadrat (2006a,b) pour une généralisation du Théorème 2 aux systèmes MIMO. Les idéaux fractionnaires (resp., inversibles, principaux) sont alors remplacés par des *réseaux algébriques* (resp., *projectifs*, *libres*).

Définition 3. (Rotman (2009)). (1) Un A-module à droite M est *de type fini* (ou *finiment engendré*) s'il existe $r \in \mathbb{N}$ et $\{m_i\}_{i=1,\ldots,r} \in M^r$ tels que $M = \sum_{i=1}^r m_i\, A$.

(2) Un A-module à droite M de type fini est *libre* s'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que M est *isomorphe* à A^r, ce qui est noté par $M \cong A^r$, i.e., s'il existe un A-*homomorphisme à droite* $\phi : M \longrightarrow A^r$, c-à-d satisfait $\phi(m_1\, a_1 + m_2\, a_2) = \phi(m_1)\, a_1 + \phi(m_2)\, a_2$, pour tous $a_1, a_2 \in A$ et pour tous $m_1, m_2 \in M$, qui est bijectif, c-à-d injectif et surjectif.

(3) Un A-module à droite M de type fini est *projectif* s'il existe un A-module à droite N et $r \in \mathbb{N}$ tels que $M \oplus N \cong A^r$, où $\oplus$ est la somme directe de modules.

Montrons que si $J = (1, p)$ est un idéal fractionnaire inversible, alors J est un A-module projectif (la réciproque étant aussi vraie (Bourbaki (1989); Quadrat (2006b)). Par définition, J est un sous-A-module de K. Considérons les A-homomorphismes suivants :

$$\begin{array}{rcl} \kappa : A^2 & \longrightarrow & J \\ (\alpha \quad \beta)^T & \longmapsto & \alpha - p\,\beta, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \theta : J^{-1} & \longrightarrow & A^2 \\ \beta & \longmapsto & (p\,\beta \quad \beta)^T. \end{array} \tag{4}$$

Nous vérifions facilement que κ est surjectif, θ est injectif et $\ker \kappa = \mathrm{im}\, \theta$. Nous avons donc la *suite exacte* suivante

$$0 \longrightarrow J^{-1} \xrightarrow{\theta} A^2 \xrightarrow{\kappa} J \longrightarrow 0 \tag{5}$$

(Quadrat (2003, 2006b)). Le fait que J soit inversible est équivalent à l'existence de $a, b \in A : J$ vérifiant (1), c-à-d tel que le A-homomorphisme ι défini par

$$\begin{array}{rcl} \iota : J & \longrightarrow & A^2 \\ j & \longmapsto & (a\, j \quad b\, j)^T, \end{array} \tag{6}$$

vérifie $\kappa \circ \iota = \mathrm{id}_J$. Or l'existence de ι tel que $\kappa \circ \iota = \mathrm{id}_J$ implique l'existence d'un *projecteur* $\pi = \iota \circ \kappa : A^2 \longrightarrow A^2$ (i.e., $\pi^2 = \pi$) défini par :

$$\pi\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) = \Pi \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \Pi = \begin{pmatrix} a & -a\, p \\ b & -b\, p \end{pmatrix} \in A^{2\times 2}.$$

Ainsi, $A^2 = \mathrm{im}\, \pi \oplus \ker \pi \cong J \oplus \ker \kappa$ car ι est injectif, et donc $A^2 \cong J \oplus J^{-1}$, ce qui montre que J et J^{-1} sont alors deux A-modules projectifs de rang 1.

Notons que (2) implique :

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} (1 - p\, c)^{-1} (1 \quad -p) = (1 - p\, c)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -p \\ c & -c\, p \end{pmatrix}.$$

De plus, avec les notations de la Figure 1, nous avons :

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \Pi \begin{pmatrix} u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix}.$$

Soit $\tau : A^2 \longrightarrow J^{-1}$ le A-homomorphisme défini par :

$$\forall\, \lambda = (\lambda_1 \quad \lambda_2)^T \in A^2, \quad \tau(\lambda) = -b\, \lambda_1 + a\, \lambda_2. \tag{7}$$

Alors, $\tau \circ \theta = \mathrm{id}_{J^{-1}}$ et $\pi' = \theta \circ \tau : A^2 \longrightarrow A^2$ défini par

$$\pi'\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) = \Pi' \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \Pi' = \begin{pmatrix} -p\, b & p\, a \\ -b & a \end{pmatrix} \in A^{2\times 2}$$

est un projecteur satisfaisant $\pi + \pi' = \mathrm{id}_{A^2}$ ($\Pi + \Pi' = I_2$).

Remarque 1. Dans le cas $A = RH_\infty$ ou $H^\infty(\mathbb{C}_+)$, un problème important de la commande robuste est d'optimiser le *rayon de robustesse*, c-à-d de calculer :

$$b_p = \sup_{c \in \mathrm{Stab}(p)} \| \Pi \|_\infty^{-1} = \sup_{c \in \mathrm{Stab}(p)} \| \Pi' \|_\infty^{-1}.$$

Tout module projectif de type fini admet un *système de coordonnées*, aussi appelé *base projective* (Rotman (2009)). Expliquons ce concept dans le cas de J et J^{-1}. Si l'on considère les A-homomorphismes (A-formes) suivants

$$\begin{array}{rcl} \iota_1 : J & \longrightarrow & A \\ j & \longmapsto & a\, j, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \iota_2 : J & \longrightarrow & A \\ j & \longmapsto & b\, j, \end{array}$$

correspondant respectivement à la projection de ι (défini par (6)) sur la première (resp., seconde) composante de A^2, alors (1) implique

$$\forall\, j \in J, \quad j = (a\, j) - p\, (b\, j) = 1\, \iota_1(j) - p\, \iota_2(j),$$

où 1 et $-p$ sont les deux générateurs de J. Nous appellerons $S = (\{1, -p\}, \{\iota_1, \iota_2\})$ un *système de coordonnées de* J car tout élément j de J est une combinaison A-linéaire des générateurs de J dans laquelle les coefficients sont obtenus à l'aide de A-formes ι_1 et ι_2. Notons que S dépend du choix de $a, b \in J^{-1}$ satisfaisant (1), c-à-d du choix du contrôleur stabilisant $c = b/a$ (voir (2)).

Similairement, si l'on considère les A-homomorphismes

$$\begin{array}{rcl} \theta_1 : J^{-1} & \longrightarrow & A \\ i & \longmapsto & p\, i, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \theta_2 : J^{-1} & \longrightarrow & A \\ i & \longmapsto & i, \end{array}$$

correspondant respectivement à la projection de θ (défini par (4)) sur la première (resp., seconde) composante de A^2, alors (1) implique

$$\forall\, i \in J^{-1}, \quad i = a\, i - b\, (p\, i) = a\, \theta_2(i) - b\, \theta_1(i),$$

ce qui montre que $S' = (\{a, -b\}, \{\theta_2, \theta_1\})$ est un système de coordonnées du A-module projectif J^{-1}.

3. CALCULS DIFFÉRENTIELS

Donnons la définition d'un *calcul différentiel*.

Définition 4. (Karoubi (1987)). Soit A une algèbre associative unitaire sur un anneau commutatif k contenant $\mathbb{Q}$.

(1) L'algèbre A est dite *graduée* s'il existe une famille de k-modules $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tels que :

(a) $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

(b) $\forall\, i \in \mathbb{N}$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$, $A_i\, A_j \subseteq A_{i+j}$, i.e., $a_i\, a_j \in A_{i+j}$ pour tout $a_i \in A_i$ et pour tout $a_j \in A_j$.

En particulier, A_0 est une k-sous-algèbre de A.

(2) Une algèbre graduée A est dite *commutative* si :

$$\forall\, a_i \in A_i,\ \forall\, a_j \in A_j,\ a_i\, a_j = (-1)^{i\,j}\, a_j\, a_i.$$

Notons que A_0 est nécessairement commutative car :

$$\forall\, a_0, a_0' \in A_0, \quad a_0\, a_0' = a_0'\, a_0.$$

(3) Une algèbre graduée A est dite *différentielle* s'il existe des applications k-linéaires $\delta_i : A_i \longrightarrow A_{i+1}$ pour $i \in \mathbb{N}$ satisfaisant les conditions suivantes :

   (a) $\forall\, i \in \mathbb{N},\ \delta_{i+1} \circ \delta_i = 0$.

   (b) Pour tout $a_i \in A_i$ et pour tout $a_j \in A_j$:
$$\delta_{i+j}(a_i\, a_j) = \delta_i(a_i)\, a_j + (-1)^i\, a_i\, \delta_j(a_j). \qquad (8)$$

   En particulier, les k-modules A_i ont une structure de A_0-*bimodules*, c-à-d :
$$\forall\, a,\, a' \in A_0, \quad \forall\, a_i \in A_i, \quad (a\, a_i)\, a' = a\,(a_i\, a').$$

(4) Un *calcul différentiel* sur A est une algèbre différentielle graduée $(\Omega_A^\bullet = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \Omega_A^i, \delta)$ telle que $\Omega_A^0 = A$.

Pour simplifier les notations, nous notons $\delta = \delta_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Les conditions 3.a et 3.b se réécrivent alors :
$$\delta^2 = 0, \quad \delta(a_i\, a_j) = \delta(a_i)\, a_i + (-1)^i\, a_i\, \delta(a_j).$$

Exemple 1. Si X est une variété différentielle, $A = C^\infty(X)$ l'algèbre des fonctions différentiables sur X et $\Omega_A^i = \Omega^i(X)$ le k-espace vectoriel des i-formes différentielles sur X, alors $\Omega_A^\bullet = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \Omega_A^i$ muni du produit extérieur $\wedge$ des formes différentielles et de la dérivée extérieure $\delta = d$ forme une algèbre différentielle graduée. Puisque
$$\forall\, \omega_i \in \Omega_A^i, \quad \forall\, \omega_j \in \Omega_A^j, \quad \omega_i \wedge \omega_j = (-1)^{ij}\, \omega_j \wedge \omega_i,$$
$\Omega_A^\bullet$ est alors une algèbre graduée commutative définissant un calcul différentiel sur A avec $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Un calcul différentiel important pour la théorie des systèmes de dimension infinie est le *calcul différentiel quantique en dimension 1* développé par Connes (Connes (1994)). Pour plus de détails, voir Quadrat (2012).

Exemple 2. Considérons :
$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}, \quad \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$
Le calcul différentiel quantique de dimension 1 sur $\mathbb{T}$ est défini par le triplet $(L^\infty(\mathbb{T}), L^2(\mathbb{T}), F)$, appelé *module de Fredholm*, où F est la *transformée de Hilbert* définie par
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad F(e_n) = \mathrm{sign}(n)\, e_n,$$
où $\{e_n = e^{in\theta}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ est la base standard de $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T})$ ($\theta \in \mathbb{T}$), et *sign* est la fonction *signe* définie par $\mathrm{sign}(n) = 1$ si $n \in \mathbb{N}$ ($\mathrm{sign}(0) = 1$) et $\mathrm{sign}(n) = -1$ si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Clairement, F satisfait $F^2 = 1$, où $1 = \mathrm{id}$ est l'opérateur identité de $\mathcal{H}$. Notons que $\mathcal{H}$ est un $A = L^\infty(\mathbb{T})$-module car $a\,h \in \mathcal{H}$ pour tout $a \in A$ et pour tout $h \in \mathcal{H}$. Pour tout $a \in A$, nous pouvons introduire l'opérateur borné suivant :
$$\begin{aligned} \overline{a} : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ h &\longmapsto a\,h. \end{aligned}$$

Si l'on note $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ la $C^\star$-*algèbre* non-commutative formée par les opérateurs bornés de $\mathcal{H}$, alors l'application χ qui associe à $a \in A$ l'opérateur $\overline{a}$ est une *représentation fidèle* de $\mathcal{H}$. Puisque χ est injective, on peut identifier a à $\overline{a}$. La différentielle de $a \in A$ est alors définie par $d\overline{a} := [F, \overline{a}]$, où $[L_1, L_2] := L_1 \circ L_2 - L_2 \circ L_1$ est le *commutateur* de $L_1,\, L_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $\circ$ la composition d'opérateurs, c-à-d :
$$\begin{aligned} d\overline{a} := [F, \overline{a}] : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ h &\longmapsto F(a\,h) - a\,F(h). \end{aligned}$$

Notons que $d\overline{1} = 0$. Pour tout $a,\, a' \in A$, nous avons :
$$\begin{aligned} d(\overline{a\,a'}) &= F \circ \overline{a\,a'} - \overline{a\,a'} \circ F \\ &= (F \circ \overline{a} - \overline{a} \circ F) \circ \overline{a'} + \overline{a} \circ (F \circ \overline{a'} - \overline{a'} \circ F) \\ &= d\overline{a} \circ \overline{a'} + \overline{a} \circ d\overline{a'}. \end{aligned}$$

On peut alors définir le $\mathbb{C}$-module des 1-formes sur A par :
$$\Omega_A^1 = \left\{ \sum_{i=1}^n \overline{a}_0 \circ d\overline{a}_i \mid n \in \mathbb{N},\ a_0,\, a_i \in A,\ i = 1, \ldots, n \right\}.$$
Notons que Ω_A^1 a une structure de A-module à gauche car :
$$\forall\, a,\, b,\, c \in A, \quad \overline{c} \circ (\overline{b} \circ d\overline{a}) = (\overline{c} \circ \overline{b}) \circ d\overline{a}.$$
De plus, Ω_A^1 est un A-module à droite car :
$$\forall\, a,\, b \in A, \quad d\overline{a} \circ \overline{b} = d(\overline{a\,b}) - \overline{a} \circ d(\overline{b}).$$
Finalement, Ω_A^1 est un $A - A$-bimodule car :
$$\forall\, a,\, b,\, c \in A, \quad (\overline{c} \circ d\overline{a}) \circ \overline{b} = \overline{c} \circ (d\overline{a} \circ \overline{b}).$$

Considérons les deux *projecteurs* suivants :
$$P_+ = (1 + F)/2, \quad P_- = (1 - F)/2.$$
Nous avons $P_+^2 = P_+$, $P_-^2 = P_-$, $P_+ \circ P_- = P_- \circ P_+ = 0$, et $P_+ + P_- = 1$, ce qui donne $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, avec :
$$\mathcal{H}_+ = \mathrm{im}(P_+) = H^2(\mathbb{D}), \quad \mathcal{H}_- = \mathrm{im}(P_-) = H^2(\mathbb{D})^\perp.$$
Voir, e.g., Curtain et Zwart (1991). Pour tout $a \in A$, l'identité $F^2 = 1$ implique
$$\begin{aligned} F \circ d\overline{a} + d\overline{a} \circ F = {} & F \circ (F \circ \overline{a} - \overline{a} \circ F) \\ & + (F \circ \overline{a} - \overline{a} \circ F) \circ F = \overline{a} - \overline{a} = 0, \end{aligned}$$
ce qui montre que $d\overline{a}$ anti-commute avec F. D'où :
$$d\overline{a} + F \circ d\overline{a} = d\overline{a} - d\overline{a} \circ F \Leftrightarrow P_+ \circ d\overline{a} = d\overline{a} \circ P_-. \qquad (9)$$
L'identité (9) implique alors :
$$\begin{cases} P_+ \circ d\overline{a} \circ P_+ = d\overline{a} \circ (P_- \circ P_+) = 0, \\ P_- \circ d\overline{a} \circ P_- = (P_- \circ P_+) \circ d\overline{a} = 0. \end{cases} \qquad (10)$$
Maintenant, si l'on décompose $d\overline{a}$ comme suit
$$\begin{aligned} d\overline{a} : \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- &\longrightarrow \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \\ h = \begin{pmatrix} h_+ \\ h_- \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_+ \\ h_- \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
alors (10) implique
$$(P_+ \circ d\overline{a} \circ P_+)(\mathcal{H}) = (P_+ \circ d\overline{a})(\mathcal{H}_+) = P_+(d\overline{a}(\mathcal{H}_+)) = 0,$$
$$(P_- \circ d\overline{a} \circ P_-)(\mathcal{H}) = (P_- \circ d\overline{a})(\mathcal{H}_-) = P_-(d\overline{a}(\mathcal{H}_-)) = 0,$$
c-à-d $X = V = 0$. Si $a \in A$, $h_+ \in \mathcal{H}_+$ et $h_- \in \mathcal{H}_-$, alors
$$\begin{cases} d\overline{a}(h_+) = F(a\,h_+) - a\,h_+ = -2\,P_-(a\,h_+), \\ d\overline{a}(h_-) = F(a\,h_-) + a\,h_- = 2\,P_+(a\,h_-), \end{cases}$$
i.e., $U = -2\,P_- \circ \overline{a}$ et $Y = 2\,P_+ \circ \overline{a}$. Ainsi, nous obtenons :
$$\begin{aligned} d\overline{a} : \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- &\longrightarrow \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \\ h = \begin{pmatrix} h_+ \\ h_- \end{pmatrix} &\longmapsto 2 \begin{pmatrix} P_+(a\,h_-) \\ -P_-(a\,h_+) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Considérons la sous-algèbre de Banach $H^\infty(\mathbb{D})$ de l'*algèbre de von Neumann A*. En utilisant le fait que $\mathcal{H}_+$ est un $H^\infty(\mathbb{D})$-module et $F(\mathcal{H}_+) = \mathcal{H}_+$, nous obtenons
$$d\overline{a}(h_+) = F(a\,h_+) - a\,F(h_+) = a\,h_+ - a\,h_+ = 0,$$
pour tout $a \in H^\infty(\mathbb{D})$ et pour tout $h_+ \in \mathcal{H}_+$, et donc :
$$P_- \circ d\overline{a} \circ P_+ = 0 \ \Rightarrow\ U = 0.$$
Ainsi, pour tout $a \in H^\infty(\mathbb{D})$, nous obtenons
$$\begin{aligned} d\overline{a} : \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- &\longrightarrow \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \\ h = \begin{pmatrix} h_+ \\ h_- \end{pmatrix} &\longmapsto 2 \begin{pmatrix} P_+(a\,h_-) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \qquad (11)$$
c-à-d la différentielle $d\overline{a}$ de $a \in H^\infty(\mathbb{D})$ est un *opérateur de Hankel*. Nous rappelons que les opérateurs de Hankel jouent un rôle fondamental en théorie des systèmes (e.g.,

réduction de modèles, commande H^∞). Pour plus de détails, voir, e.g., Curtain et Zwart (1991).

Un théorème de Kronecker montre que $d\overline{a}$ est un opérateur de rang fini ssi a est une fraction rationnelle (voir Connes (1994)). En particulier, la différentielle d'un élément de $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ est un opérateur de rang fini de $\mathcal{H}$.

Le $A-A$-bimodule des n-formes Ω_A^n sur A est défini par l'espace vectoriel engendré par les éléments de la forme :

$$\overline{a}_0 \circ d\overline{a}_1 \circ \cdots \circ d\overline{a}_n = \overline{a}_0 \circ [F, \overline{a}_1] \circ \cdots \circ [F, \overline{a}_n], \quad a_i \in A.$$

Utilisant (11), on montre facilement que $d\overline{a}_1 \circ d\overline{a}_2 = 0$ pour tout a_1, $a_2 \in H^\infty(\mathbb{D})$, c-à-d les 2-formes sur $H^\infty(\mathbb{D})$ sont nulles. Le produit $\Omega_A^i \times \Omega_A^j \longrightarrow \Omega_A^{i+j}$ est simplement défini par la composition des opérateurs $\omega_i \circ \omega_j$, où $\omega_i \in \Omega_A^i$ et $\omega_j \in \Omega_A^j$. La différentielle d'une i-forme ω_i est définie par :

$$d\omega_i = F \circ \omega_i - (-1)^i \, \omega_i \circ F \in \Omega_A^{i+1}.$$

$(\Omega_A^\bullet = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \Omega_A^i, d)$ est alors un calcul différentiel sur A (Connes (1994)). Voir Quadrat (2012) pour des applications de ce calcul différentiel en théorie des systèmes.

4. CONNEXIONS

4.1 Définition et propriétés

Dans ce qui suit, nous supposerons que $(\Omega_A^\bullet, \delta)$ est un calcul différentiel sur une k-algèbre A (voir Section 3) non nécessairement commutative.

Nous introduisons une version algèbrique du concept de *connexion* dûe à Connes (1994) et Karoubi (1987). De nos jours, ce concept joue un rôle important en géomètrie différentielle et en physique mathématique.

Définition 5. Une connexion sur un A-module à droite M est une application k-linéaire $\nabla : M \longrightarrow M \otimes_A \Omega_A^1$ satisfaisant la *règle de Leibniz* suivante :

$$\forall\, m \in M,\ \forall\, \alpha \in A,\ \nabla(m\, \alpha) = (\nabla\, m)\, \alpha + m \otimes \delta(\alpha). \quad (12)$$

Nous pouvons étendre ∇ en une application k-linéaire

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad M \otimes_A \Omega_A^n \longrightarrow M \otimes_A \Omega_A^{n+1},$$

aussi dénotée par ∇ par simplicité, satisfaisant :

$$\begin{array}{c} \forall\, \omega_n \in M \otimes_A \Omega_A^n, \quad \forall\, \omega_m \in \Omega_A^m : \\ \nabla(\omega_n \otimes \omega_m) = \nabla\, \omega_n \otimes \omega_m + (-1)^n\, \omega_n \otimes \delta(\omega_m). \end{array} \quad (13)$$

Un résultat important de Cuntz et Quillen est le suivant.

Théorème 3. (Connes (1994)). Un A-module à droite M admet une connexion ssi M est un A-module à droite projectif de type fini.

Le Théorème 3 et la Section 2 montrent que tout système stabilisable et tout contrôleur stabilisant admettent des connexions. Le but de ce papier est d'expliciter ce résultat.

Soient ∇_1 et ∇_2 deux connexions sur un A-module à droite projectif M de type fini. Pour $m \in M$ et pour tout $\alpha \in A$:

$$\begin{aligned} (\nabla_1 - \nabla_2)(m\, \alpha) &= \nabla_1(m\, \alpha) - \nabla_2(m\, \alpha) \\ &= \nabla_1(m)\, \alpha + m \otimes \delta(\alpha) - \nabla_2(m)\, \alpha - m \otimes \delta(\alpha) \\ &= (\nabla_1(m) - \nabla_2(m))\, \alpha. \end{aligned}$$

Ainsi, $\nabla_1 - \nabla_2$ est un A-homomorphisme droite de M dans $M \otimes_A \Omega_A^1$. Du fait que M est un A-module projectif à droite, nous avons alors (voir, e.g., Rotman (2009)) :

$$\nabla_1 - \nabla_2 \in \hom_A(M, M \otimes_A \Omega_A^1) \cong \mathrm{end}_A(M) \otimes_A \Omega_A^1. \quad (14)$$

Exemple 3. Si $M = A^r$ est un A-module à droite, alors $M \otimes_A \Omega_A^1 \cong (\Omega_A^1)^r$. Considérons la k-application linéaire :

$$\begin{array}{rcl} \delta : M & \longrightarrow & M \otimes_A \Omega_A^1 \\ m = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \delta(a_1) \\ \vdots \\ \delta(a_r) \end{pmatrix}. \end{array}$$

Puisque $\delta(a_i\, \alpha) = \delta(a_i)\, \alpha + a_i\, \delta(\alpha)$ pour tout $\alpha \in A$, nous obtenons $\delta(m\, \alpha) = \delta(m)\, \alpha + m\, \delta(\alpha)$ pour tout $m \in M$, ce qui montre que δ est une connexion sur M. Maintenant, si ∇ est une autre connexion sur M, alors (14) montre que $\nabla - \delta \in \mathrm{end}_A(M) \otimes \Omega_A^1 \cong (\Omega_A^1)^{r \times r}$. Soit $\Theta \in (\Omega_A^1)^{r \times r}$ une matrice $r \times r$ de 1-formes différentielles telle que $\nabla - \delta = \gamma$, où γ est l'application A-linéaire à droite suivante :

$$\begin{array}{rcl} \gamma : M & \longrightarrow & M \otimes_A \Omega_A^1 \\ m & \longmapsto & \Theta\, m. \end{array}$$

Nous avons alors $\nabla(m) = \delta(m) + \Theta\, m$ pour tout $m \in M$.

Considérons le calcul différentiel sur $X = \mathbb{R}$ défini dans l'Exemple 1. Alors, $A = C^\infty(X)$, $\delta = d$ et $M = A^r$ est le A-module libre correspondant aux sections du *fibré vectoriel trivial* $E = X \times X^r$ de coordonnées locales (t, m). Ainsi, $\Theta = F\, dt \in \Omega^1(X)^{r \times r}$, où $F \in A^{r \times r}$, et donc

$$\nabla(m(t)) = d(m(t)) + F(t)\, m(t)\, dt = (\dot{m}(t) + F(t)\, m(t))\, dt,$$

où $\dot{m}(t) = dm(t)/dt$ est la dérivée de $m \in A^r$. Les sections $(t, m(t))$ de E annulées par la connexion ∇ satisfont donc le système différentiel linéaire d'ordre 1 suivant :

$$\dot{m}(t) + F(t)\, m(t) = 0.$$

Si $X = \mathbb{R}^n$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est un système de coordonnées locales de X, alors $\Theta = \sum_{i=1}^n \Theta_i\, dx_i$, où $\Theta_i \in A^{r \times r}$. Nous obtenons alors

$$\nabla(m(x)) = d(m(x)) + \sum_{i=1}^n \Theta_i\, m(x)\, dx_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial m(x)}{\partial x_i} + \Theta_i\, m(x) \right) dx_i,$$

ce qui montre que les sections $(x, m(x))$ du fibré trivial E annulées par la connexion ∇ satisfont le système d'équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre 1 suivant :

$$\frac{\partial m(x)}{\partial x_i} + \Theta_i\, m(x) = 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

4.2 Connexion sur un système stabilisable

Soient A une k-algèbre commutative unitaire formant un anneau intègre, $p \in K = Q(A)$ et $J = (1, p)$ un idéal fractionnaire inversible de A. Il existe alors $a, b \in J^{-1}$ tels que $a - p\, b = 1$. Considérons les applications suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} J & \xrightarrow{\iota} & A^2 & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \delta} & A^2 \otimes_A \Omega_A^1 & \xrightarrow{\kappa \otimes \mathrm{id}} & J \otimes_A \Omega_A^1 \\ j & \longmapsto & \begin{pmatrix} a\, j \\ b\, j \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \delta(a\, j) \\ \delta(b\, j) \end{pmatrix} & \longmapsto & 1 \otimes \delta(a\, j) - p \otimes \delta(b\, j). \end{array}$$

Nous obtenons ainsi la connexion suivante sur J

$$\begin{array}{rcl} \nabla : J & \longrightarrow & J \otimes_A \Omega_A^1 \\ j & \longmapsto & 1 \otimes \delta(a\, j) - p \otimes \delta(b\, j), \end{array} \quad (15)$$

appelée *connexion de Grassmann/Levi-Civita* de J par analogie avec la situation en géométrie différentielle.

Notons que nous avons utilisé le système de coordonnées $S = (\{1, -p\}, \{\iota_1, \iota_2\})$ de J pour définir ∇ comme suit :

$$\forall\, j \in J, \quad \nabla\, j = 1 \otimes \delta(\iota_1(j)) - p \otimes \delta(\iota_2(j)).$$

Vérifions que la condition (12) est bien satisfaite. Pour tout $j \in J$ et pour tout $\alpha \in A$, en utilisant (1), nous avons :

$$\begin{aligned}\nabla(j\,\alpha) &= 1 \otimes \delta(a\,j\,\alpha) - p \otimes \delta(b\,j\,\alpha)\\ &= 1 \otimes (\delta(a\,j)\,\alpha + (a\,j)\,\delta(\alpha)) - p \otimes (\delta(b\,j)\,\alpha + (b\,j)\,\delta(\alpha))\\ &= (\nabla\,j)\,\alpha + 1 \otimes (a\,j)\,\delta(\alpha) - p \otimes (b\,j)\,\delta(\alpha)\\ &= (\nabla\,j)\,\alpha + (a\,j - p\,b\,j) \otimes \delta(\alpha) = (\nabla\,j)\,\alpha + j \otimes \delta(\alpha).\end{aligned}$$

Proposition 1. La connexion ∇ satisfait la relation

$$\forall\, j \in J, \quad (\nabla\,1)\,(a\,j) - (\nabla\,p)\,(b\,j) = 0, \tag{16}$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} \nabla\,1 = 1 \otimes \delta(a) - p \otimes \delta(b),\\ \nabla\,p = 1 \otimes \delta(a\,p) - p \otimes \delta(b\,p). \end{cases} \tag{17}$$

Preuve 1. Pour tout $j \in J$, $j = (a\,j) - p\,(b\,j)$. Nous avons alors $\nabla\,j = \nabla\,(a\,j) - \nabla\,(p\,b\,j)$. Puisque $a\,j$, $b\,j \in A$, nous pouvons utiliser (12) pour obtenir :

$$\begin{cases} \nabla(a\,j) = (\nabla\,1)\,(a\,j) + 1 \otimes \delta(a\,j),\\ \nabla(p\,(b\,j)) = (\nabla\,p)\,(b\,j) + p \otimes \delta(b\,j). \end{cases}$$

En utilisant (15), nous avons alors (16) car :

$$\nabla\,j = \nabla\,(a\,j) - \nabla\,(p\,b\,j) = (\nabla\,1)\,(a\,j) - (\nabla\,p)\,(b\,j) + \nabla\,j.$$

Remarque 2. $a - p\,b = 1$ implique $\delta(a) - \delta(p\,b) = \delta(1) = 0$, c-à-d $\delta(a) = \delta(p\,b)$. Alors (17) se réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \nabla\,1 = 1 \otimes \delta(p\,b) - p \otimes \delta(b),\\ \nabla\,p = 1 \otimes \delta(a\,p) - p \otimes \delta(a). \end{cases} \tag{18}$$

Du fait que tout élément $j \in J$ a la forme $j = \alpha - p\,\beta$, avec $\alpha, \beta \in A$, nous avons donc :

$$\begin{aligned}\nabla\,j &= \nabla\,\alpha - \nabla\,(p\,\beta)\\ &= ((\nabla\,1)\,\alpha + 1 \otimes \delta(\alpha)) - (\nabla\,p)\,\beta + p \otimes \delta(\beta))\\ &= (\nabla\,1)\,\alpha - (\nabla\,p)\,\beta + 1 \otimes \delta(\alpha) - p \otimes \delta(\beta).\end{aligned}$$

Notons que la connexion ∇ est définie à l'aide du plongement particulier $\iota : J \hookrightarrow A^2$, c-à-d à partir d'une solution particulière a, $b \in J^{-1}$ de (15). Supposons que $u - p\,v = 1$, avec u, $v \in J^{-1}$, et introduisons la nouvelle connexion $\nabla' : J \longrightarrow J \otimes_A \Omega_A^1$ définie par :

$$\forall\, j \in J, \quad \nabla'\,j = 1 \otimes \delta(u\,j) - p \otimes \delta(v\,j). \tag{19}$$

Alors, ∇' satisfait l'identité (16), avec (18), où a (resp., b) est remplacé par u (resp., v). 4 du Théorème 2 montre alors qu'il existe $q \in J^{-2}$ tel que :

$$v - b = q, \quad u - a = p\,q. \tag{20}$$

Combinant (15) et (19), nous obtenons alors

$$(\nabla - \nabla')\,j = 1 \otimes \delta((u - a)\,j) - p \otimes \delta((v - b)\,j),$$

ce qui avec (20) donne :

$$\forall\, j \in J, \quad (\nabla - \nabla')\,j = 1 \otimes \delta(p\,q\,j) - p \otimes \delta(q\,j). \tag{21}$$

Notons $\nabla - \nabla'$ par φ_q. Vérifions que φ_q est bien un A-homomorphisme (voir (14)). Pour tout $\alpha \in A$, nous avons

$$\begin{aligned}\varphi_q(j\,\alpha) &= 1 \otimes \delta(p\,q\,j\,\alpha) - p \otimes \delta(q\,j\,\alpha)\\ &= 1 \otimes (\delta(p\,q\,j)\,\alpha + (p\,q\,j)\,\delta(\alpha))\\ &\quad - p \otimes (\delta(q\,j)\,\alpha + (q\,j)\,\delta(\alpha))\\ &= \varphi_q(j)\,\alpha + ((p\,q\,j) - p\,(q\,j)) \otimes \delta(\alpha) = \varphi_q(j)\,\alpha,\end{aligned}$$

puisque $p\,q\,j$, $q\,j \in A$.

Montrons que $\varphi_q \in \mathrm{end}_A(J) \otimes \Omega_A^1$. Soient q_1, $q_2 \in J^{-2}$, $\alpha \in A$ et $j \in J$. Clairement, nous avons :

$$\begin{cases} \varphi_{q_1+q_2} = \varphi_{q_1} + \varphi_{q_2},\\ \varphi_{\alpha\,q_1}(j) = \varphi_{q_1}(j\,\alpha) = \varphi_{q_1}(j)\,\alpha. \end{cases}$$

Tout élément q de J^{-2} a la forme de $q = \alpha\,a^2 + \beta\,b^2$, avec α, $\beta \in A$. D'où, $\varphi_q = \varphi_{\alpha\,a^2+\beta\,b^2} = \varphi_{a^2}\,\alpha + \varphi_{b^2}\,\beta$, avec

$$\begin{aligned}\varphi_{a^2}(j) &= 1 \otimes \delta(p\,a^2\,j) - p \otimes \delta(a^2\,j)\\ &= 1 \otimes \delta((p\,a)\,(a\,j)) - p \otimes \delta(a\,(a\,j))\\ &= 1 \otimes (\delta(p\,a)\,(a\,j) + (p\,a)\,\delta(a\,j))\\ &\quad - p \otimes (\delta(a)\,(a\,j) + a\,\delta(a\,j))\\ &= (1 \otimes \delta(p\,a) - p \otimes \delta(a))\,(a\,j) + ((p\,a) - p\,a) \otimes \delta(a\,j)\\ &= (1 \otimes \delta(p\,a) - p \otimes \delta(a))\,(a\,j) = (\nabla\,p)\,(a\,j),\end{aligned}$$

grâce à (18) et $\delta(a) = \delta(p\,b)$. De même, nous avons : $\forall\, j \in J$, $\varphi_{b^2}(j) = (1 \otimes \delta(p\,b) - p \otimes \delta(b))\,(b\,j) = (\nabla\,1)\,(b\,j)$. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}\varphi_q(j) &= (\nabla\,p)\,(a\,j\,\alpha) + (\nabla\,1)\,(b\,j\,\beta)\\ &= (a\,j\,\alpha) \otimes \delta(p\,a) - (a\,j\,\alpha)\,p \otimes \delta(a)\\ &\quad + (b\,j\,\beta) \otimes \delta(p\,b) - (b\,j\,\beta)\,p \otimes \delta(b)\\ &= j \otimes [(a\,\delta(p\,a) - a\,p\,\delta(a))\,\alpha + (b\,\delta(p\,b) - b\,p\,\delta(b))\,\beta].\end{aligned}$$

Théorème 4. Avec les notations précédentes, nous avons

$$\forall\, j \in J, \quad \forall\, q = \alpha\,a^2 + \beta\,b^2 \in J^{-2}, \quad \varphi_q(j) = j \otimes \vartheta,$$

avec $\vartheta = (a\,\delta(p\,a) - a\,p\,\delta(a))\,\alpha + (b\,\delta(p\,b) - b\,p\,\delta(b))\,\beta \in \Omega_A^1$.

Définissons maintenant une connexion sur un contrôleur c stabilisant p. Par le Théorème 3, l'idéal fractionnaire J^{-1}, simplement noté par I dans la suite, admet une connexion. En considérant les applications suivantes

$$\begin{array}{ccccccc} I & \xrightarrow{\theta} & A^2 & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\delta} & A^2 \otimes_A \Omega_A^1 & \xrightarrow{\tau\otimes\mathrm{id}} & I \otimes_A \Omega_A^1\\ i & \longmapsto & \begin{pmatrix} p\,i\\ i \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \delta(p\,i)\\ \delta(i) \end{pmatrix} & \longmapsto & a \otimes \delta(i) - b \otimes \delta(p\,i), \end{array}$$

la connexion de Grassmann/Levi-Civita sur I est alors :

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla} : I &\longrightarrow I \otimes_A \Omega_A^1\\ i &\longmapsto a \otimes \delta(i) - b \otimes \delta(p\,i).\end{aligned} \tag{22}$$

Le système de coordonnées $S' = (\{a, -b\}, \{\theta_1, \theta_2\})$ de I peut être utilisé pour obtenir directement $\widetilde{\nabla}$:

$$\forall\, i \in I, \quad \widetilde{\nabla}\,i = a \otimes \delta(\theta_2(i)) - b \otimes \delta(\theta_1(i)).$$

I étant un idéal de A, c-à-d $I \subseteq A$, $I \otimes_A \Omega_A^1 \cong I\,\Omega_A^1$, où cet isomorphisme envoie $i \otimes \sigma$ sur $1 \otimes i\,\sigma$, avec $i \in I$ et $\sigma \in \Omega_A^1$. Ainsi, $\widetilde{\nabla}\,i = 1 \otimes (a\,\delta(i) - b\,\delta(p\,i))$ s'identifie à la 1-forme différentielle $a\,\delta(i) - b\,\delta(p\,i) \in \Omega_A^1$. Notons que l'identité $\delta(a) = \delta(b\,p)$ implique :

$$\begin{cases} \widetilde{\nabla}\,a = a \otimes \delta(a) - b \otimes \delta(p\,a) = a \otimes \delta(b\,p) - b \otimes \delta(p\,a)\\ \quad = 1 \otimes (a\,\delta(b\,p) - b\,\delta(p\,a)),\\ \widetilde{\nabla}\,b = a \otimes \delta(b) - b \otimes \delta(p\,b) = a \otimes \delta(b) - b \otimes \delta(a)\\ \quad = 1 \otimes (a\,\delta(b) - b\,\delta(a)). \end{cases} \tag{23}$$

Proposition 2. La connexion $\widetilde{\nabla}$ satisfait la relation

$$\forall\, i \in I, \quad (\widetilde{\nabla}\,a)\,i - (\widetilde{\nabla}\,b)\,(p\,i) = 0, \tag{24}$$

où $\widetilde{\nabla}\,a$ et $\widetilde{\nabla}\,b$ sont définis par (23).

Preuve 2. L'identité (1) donne $i = a\,i - b\,p\,i$ pour tout $i \in I$ et puisque $i \in A$, $a \in I$, $b \in I$ et $p\,i \in A$, nous avons

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}\,i &= \widetilde{\nabla}(a\,i) - \widetilde{\nabla}(b\,(p\,i))\\ &= (\widetilde{\nabla}\,a)\,i + a \otimes \delta(i) - (\widetilde{\nabla}\,b)\,(p\,i) - b \otimes \delta(p\,i)\\ &= (\widetilde{\nabla}\,a)\,i - (\widetilde{\nabla}\,b)\,(p\,i) + \widetilde{\nabla}\,i,\end{aligned}$$

d'où $(\widetilde{\nabla}\,a)\,i - (\widetilde{\nabla}\,b)\,(p\,i) = 0$ pour tout $i \in I$.

4.3 Connexion sur une factorisation copremière

Supposons maintenant que p admet une factorisation copremière $p = d^{-1}\, n$ avec $d\,x - n\,y = 1$, où $x,\, y \in A$. Alors, $J = (1, p) = \left(d^{-1}\right)$, c-à-d J est un idéal fractionnaire principal de A. Nous avons l'isomorphisme suivant :

$$J \underset{\xrightarrow{d.}}{\xleftarrow{d^{-1}.}} A.$$

Considérons les applications suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} J & \xrightarrow{d.} & A & \xrightarrow{\delta} & \Omega_A^1 & \xrightarrow{d^{-1}.\otimes \mathrm{id}} & J \otimes_A \Omega_A^1 \\ j & \longmapsto & d\,j & \longmapsto & \delta(d\,j) & \longmapsto & d^{-1} \otimes \delta(d\,j). \end{array}$$

Nous pouvons alors définir la connexion suivante sur J :

$$\begin{aligned} \nabla' : J &\longrightarrow J \otimes_A \Omega_A^1 \\ j &\longmapsto d^{-1} \otimes \delta(d\,j). \end{aligned} \tag{25}$$

Vérifions que la condition (12) est satisfaite. Pour tout $j \in J$ et pour tout $\alpha \in A$, $d\,j \in A$ implique :

$$\begin{aligned} \nabla'(j\,\alpha) &= d^{-1} \otimes \delta(d\,j\,\alpha) = d^{-1} \otimes (\delta(d\,j)\,\alpha + (d\,j)\,\delta(\alpha)) \\ &= (\nabla'\,j)\,\alpha + d^{-1}\,(d\,j) \otimes \delta(\alpha) = (\nabla'\,j)\,\alpha + j \otimes \delta(\alpha). \end{aligned}$$

Notons que $\nabla'\,d^{-1} = d^{-1} \otimes \delta(1) = 0$.

Proposition 3. La connexion ∇' définie par (25) vérifie :

$$\forall\, j = d^{-1}\,\alpha \in J, \quad \alpha \in A, \quad \nabla'\,j = d^{-1} \otimes \delta(\alpha).$$

Preuve 3. Tout élément $j \in J = \left(d^{-1}\right)$ a la forme de $j = d^{-1}\,\alpha$ avec $\alpha \in A$, et la condition (12) implique donc :

$$\nabla'\,j = d^{-1} \otimes \delta(d\,d^{-1}\,\alpha) = d^{-1} \otimes \delta(\alpha).$$

Comparons maintenant ∇ et ∇' dans le cas où p admet une factorisation copremière $p = d^{-1}\,n$. Nous avons alors $a = x\,d$, $b = y\,d$ et $j = d^{-1}\,\alpha$ avec $\alpha \in A$ (voir 2 et 5 du Théorème 2), et donc :

$$\begin{aligned} \nabla\,j &= 1 \otimes \delta(x\,d\,d^{-1}\,\alpha) - d^{-1}\,n \otimes \delta(y\,d\,d^{-1}\,\alpha) \\ &= d^{-1}\,d \otimes \delta(x\,\alpha) - d^{-1}\,n \otimes \delta(y\,\alpha) \\ &= d^{-1} \otimes (d\,\delta(x\,\alpha) - n\,\delta(y\,\alpha)) = d^{-1} \otimes \phi, \end{aligned}$$

où $\phi = d\,\delta(x\,\alpha) - n\,\delta(y\,\alpha) \in \Omega_A^1$. Notons que :

$$\begin{aligned} \phi &= d\,(\delta(x)\,\alpha + x\,\delta(\alpha)) - n\,(\delta(y)\,\alpha + y\,\delta(\alpha)) \\ &= (d\,x - n\,y)\,\delta(\alpha) + (d\,\delta(x) - n\,\delta(y))\,\alpha \\ &= \delta(\alpha) + (d\,\delta(x) - n\,\delta(y))\,\alpha. \end{aligned}$$

Utilisant le fait que $d\,j \in A$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} \nabla\,j &= d^{-1} \otimes (\delta(\alpha) + (d\,\delta(x) - n\,\delta(y))\,\alpha) \\ &= \nabla'\,j + d^{-1} \otimes (d\,\delta(x) - n\,\delta(y))\,\alpha \\ &= \nabla'\,j + d^{-1}\,\alpha \otimes (d\,\delta(x) - n\,\delta(y)) \\ &= \nabla'\,j + j \otimes (d\,\delta(x) - n\,\delta(y)). \end{aligned}$$

Théorème 5. Soient $p = d^{-1}\,n$ une factorisation copremière de p, $d\,x - n\,y = 1$, $x,\, y \in A$, et :

$$\sigma = d\,\delta(x) - n\,\delta(y) = -\delta(d)\,x + \delta(n)\,y \in \Omega_A^1. \tag{26}$$

Les connexions ∇ et ∇' définies par (15) et (25) satisfont :

$$\forall\, j \in J, \quad (\nabla - \nabla')\,j = j \otimes \sigma \in \mathrm{end}_A(J) \otimes_A \Omega_A^1.$$

Preuve 4. Il ne nous reste plus qu'à prouver la deuxième expression pour la forme σ. L'identité $d\,x - n\,y = 1$ donne $\delta(d\,x) - \delta(n\,y) = \delta(1) = 0$, c-à-d $\delta(d\,x) = \delta(n\,y)$, et donc $\delta(d)\,x + d\,\delta(x) = \delta(n)\,y + n\,\delta(y)$, d'où (26). En accord avec (14), $\psi : J \longrightarrow J \otimes_A \Omega_A^1$ défini par $\psi(j) = j \otimes \sigma$ est un A-homomorphisme.

Utilisant $\delta(d\,x) = \delta(n\,y)$, nous obtenons alors :

$$\begin{cases} \nabla\,1 &= d^{-1} \otimes (d\,\delta(x\,d) - n\,\delta(y\,d)), \\ &= d^{-1} \otimes (d\,\delta(n\,y) - n\,\delta(y\,d)), \\ &= d^{-1} \otimes (d\,(\delta(n)\,y + n\,\delta(y)) - n\,(\delta(d)\,y + d\,\delta(y)), \\ &= d^{-1} \otimes (d\,\delta(n) - n\,\delta(d))\,y, \\ \nabla\,p &= d^{-1} \otimes (d\,\delta(x\,n) - n\,\delta(y\,n)), \\ &= d^{-1} \otimes (d\,\delta(x\,n) - n\,\delta(d\,x)), \\ &= d^{-1} \otimes (d\,(\delta(x)\,n + x\,\delta(n)) - n\,(\delta(d)\,x + d\,\delta(x)), \\ &= d^{-1} \otimes (d\,\delta(n) - n\,\delta(d))\,x. \end{cases}$$

Calculons maintenant la connexion de Grassmann/Levi-Civita sur $I = J^{-1} = (d)$. Considérons l'isomorphisme

$$I \underset{\xrightarrow{d^{-1}.}}{\xleftarrow{d.}} A,$$

et les applications suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} I & \xrightarrow{d^{-1}.} & A & \xrightarrow{\delta} & \Omega_A^1 & \xrightarrow{d.\otimes \mathrm{id}} & J \otimes_A \Omega_A^1 \\ i & \longmapsto & d^{-1}\,i & \longmapsto & \delta(d^{-1}\,i) & \longmapsto & d \otimes \delta(d^{-1}\,i). \end{array}$$

Nous pouvons alors définir la connexion suivante sur J :

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}' : J &\longrightarrow J \otimes_A \Omega_A^1 \\ i &\longmapsto d \otimes \delta(d^{-1}\,i). \end{aligned}$$

Dans Quadrat (2012), nous montrons comment calculer les courbures des connexions introduites dans ce papier ainsi que les caractères de Chern. Dans de futures publications, nous montrerons comment utiliser le calcul différentiel quantique de dimension 1 et ces notions géométriques pour étudier les problèmes de stabilisation, H^∞ et H^2.

RÉFÉRENCES

N. Bourbaki. *Commutative algebra.* 1-7, Springer, 1989.

A. Connes. *Noncommutative Geometry.* Academic Press, 1994.

R. F. Curtain, H. J. Zwart, *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*, Springer, 1991.

M. Karoubi. *Homologie cyclique et K-théorie.* Astérique 149, Société Mathématique de France, 1987.

A. Quadrat. On a generalization of the Youla-Kučera parametrization. Part I : The fractional ideal approach to SISO systems. *Systems Control Lett.*, 50, 135–148, 2003.

A. Quadrat. A lattice approach to analysis and synthesis problems. *Math. Control, Signals Systems*, 18, 147–186, 2006.

A. Quadrat. On a generalization of the Youla-Kučera parametrization. Part II : The lattice approach to MIMO systems. *Math. Control, Signals Systems*, 18, 199–235, 2006.

A. Quadrat. A noncommutative geometry approach to infinite-dimensional systems theory A paraître, 2012.

J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra.* Springer, 2nd edition, 2009.

M. Vidyasagar. *Control System Synthesis : A Factorization Approach.* MIT Press, Cambridge, 1985.