Une introduction aux théories algébriques différentielles

Alban Quadrat

INRIA Sophia Antipolis, Projet APICS,

2004 route des lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis cedex, France.

Intéractions entre théories algébriques et calcul scientifique: Etat-de-l'art et applications

CNAM, Paris 18/09/07

Introduction

• Le but de cette journée est de développer des intéractions entre deux communautés s'intéressant aux EDP:

1. La communauté des analystes et du calcul scientifique:

   Point de vue de Hadamard: problèmes bien posés, existence et unicité d'une solution dans un espace fonctionnel approprié, physique mathématique, calcul scientifique.

2. La communauté des algébristes et des géomètres différentiels:

   Point de vue de Cartan: systèmes différentiels généraux, étude de la variété formée par un système d'EDP, applications à la géométrie différentielle et à la géométrie algébrique (e.g., études des surfaces, (pseudo-)groupes/algèbres de Lie, symétries, théorie de Galois différentielle), calcul symbolique.

Panorama des théories différentielles algébriques

Systèmes différentiels extérieurs
Cartan
Kuranishi

Algèbre différentielle
Ritt
Kolchin

↑

Cauchy
Kovaleskaya

⟶

Méray
Riquier
Janet

⟶

Théorie formelle des EDP
Spencer
Quillen
Goldschmidt

↓

Analyse algébrique
D-modules
Sato
Kashiwara

Bases de Janet
Janet

⟶

Bases de Gröbner
Buchberger

Théorème de Cauchy-Kovaleskaya

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} = f_1\left(x_1, x_2, z_1, \ldots, z_m, \dfrac{\partial z_1}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial z_m}{\partial x_2}\right), \\ \qquad\qquad \ldots \\ \dfrac{\partial z_m}{\partial x_1} = f_m\left(x_1, x_2, z_1, \ldots, z_m, \dfrac{\partial z_1}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial z_m}{\partial x_2}\right). \end{array}\right. \qquad (\star)$$

- Soient m fonctions analytiques $\phi_1(x_2), \ldots, \phi_m(x_2)$ au voisinage de $x_2 = 0$ telles que $f_1, \ldots, f_m$ soient analytiques au voisinage de:

$$\left(0, \phi_1(0), \ldots, \phi_m(0), \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}\right)(0), \ldots, \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial x_2}\right)(0)\right).$$

- $(\star)$ admet une unique solution analytique $(z_1, \ldots, z_m)$ au voisinage du point $(x_1, x_2) = (0, 0)$ satisfaisant les conditions:

$$\left\{\begin{array}{l} z_1(0, x_2) = \phi_1(x_2), \\ \qquad \ldots \\ z_m(0, x_2) = \phi_m(x_2). \end{array}\right.$$

Intégrabilité formelle (Méray-Riquier-Janet, 1890-1920)

• Problème: Extension du théorème de Cauchy-Kovaleskaya aux systèmes généraux d'EDPs.

1. Etudes des solutions développables en séries formelles autour d'un point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$:

$$z_i(x) = \sum_{\nu_1=0}^{+\infty} \ldots \sum_{\nu_n=0}^{+\infty} a_{(\nu_1,\ldots,\nu_n)}\,(x_1 - x_1^0)^{\nu_1} \ldots (x_n - x_n^0)^{\nu_n}.$$

2. Détermination de conditions d'intégrabilité (saturation des équations).

3. Détermination du nombre et de la nature des conditions initiales (degré de généralité).

4. Preuve de la convergence des solutions formelles (méthode des fonctions majorantes).

Intégrabilité formelle: exemple

- f et g deux fonctions analytiques au voisinage de $(0,0)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = f(x_1, x_2), \\[2ex] \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = g(x_1, x_2), \end{array} \right. \qquad (\star)$$

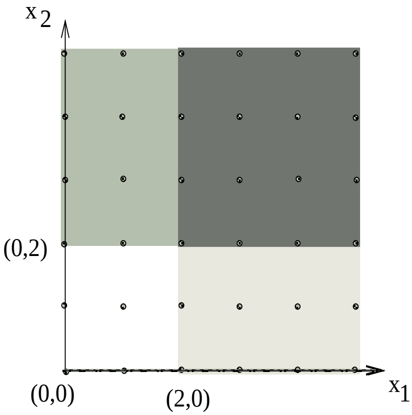
- Détermination des conditions d'intégrabilité et conditions initiales de $(\star)$ afin qu'il existe une solution analytique de $(\star)$ en 0:

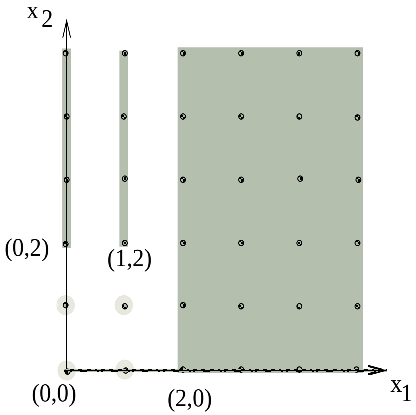
$$z(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{(i,j)}\, x_1^i\, x_2^j. \quad (\star\star)$$

- A tout monôme $x_1^i\, x_2^j$ de $(\star\star)$, on fait correspondre un point entier $(i,j) \in \mathbb{Z}_+^2$ du plan. On fait la correspondance suivante:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \longleftrightarrow x_1^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \longleftrightarrow x_2^2. \quad \text{(dérivées principales)}$$

Intégrabilité formelle: exemple





Intégrabilité formelle: exemple

- Les monômes multiples de x_1^2 et x_2^2 se décomposent en 3 classes disjointes deux à deux:
  1. $M_1 = \{x_1^i \, x_2^j \, x_1^2 \mid i, j \in \mathbb{Z}_+\}$,
  2. $M_2 = \{x_2^j \, x_1 \, x_2^2 \mid i \in \mathbb{Z}_+\}$,
  3. $M_3 = \{x_2^j \, x_2^2 \mid j \in \mathbb{Z}_+\}$.
- $M = \{x_1^2, x_2^2, x_1 \, x_2^2\}$ est un système complet de monômes:
  1. x_1 et x_2 sont des variables multiplicatrices de x_1^2,
  2. x_2 est une variable multiplicatrice de $x_1 \, x_2^2$,
  3. x_2 est une variable multiplicatrice de x_2^2.
- L'ensemble des monômes complémentaires de M est:

$$N = \{1, x_1, x_2, x_2 \, x_1\}, \text{ i.e., } M \cup N = \mathbb{Z}_+^2.$$

Intégrabilité formelle: exemple

- Nous obtenons le système suivant:

$$(\star)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = f(x_1, x_2), & \boxed{2 \mid 1} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = g(x_1, x_2), & \boxed{2 \mid \bullet} \\ \dfrac{\partial^3 z}{\partial x_1\, \partial x_2^2} = \dfrac{\partial\, g(x_1, x_2)}{\partial x_1}. & \boxed{2 \mid \bullet} \end{cases}$$

- Les conditions d'intégrabilité du système $(\star)$ s'obtiennent en réduisant les dérivées des équations par rapport à leurs variables non-multiplicatrices:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}\right) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}.$$

Intégrabilité formelle: exemple

- Nous faisons les coupures suivantes:

$$z(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{(2+i,j)}\, x_1^{2+i}\, x_2^{j} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{(0,2+j)}\, x_2^{2+j}$$
$$+ \sum_{k=0}^{+\infty} a_{(1,2+j)}\, x_1\, x_2^{2+j} + a_{(0,0)} + a_{(1,0)}\, x_1 + a_{(0,1)}\, x_2 + a_{(1,1)}\, x_1\, x_2.$$

- Les conditions initiales sont alors données par les dérivées correspondantes aux monômes complémentaires évaluées au point obtenu en annulant les variables non-multiplicatrices:

$$\left\{ \begin{array}{l} z(0,0) = A, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_1}(0,0) = B, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_2}(0,0) = C, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1\, \partial x_2}(0,0) = D, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{(0,0)} = A, \\ a_{(1,0)} = B, \\ a_{(0,1)} = C, \\ a_{(1,1)} = D. \end{array} \right.$$

Intégrabilité formelle: exemple

- Nous vérifions les expressions suivantes:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{(2+i,j)}\, x_1^{2+i}\, x_2^{j}\right) = f(x_1,x_2),\\[2ex] \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}(0,x_2) = \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} a_{(0,2+j)}\, x_2^{2+j}\right) = g(0,x_2),\\[2ex] \dfrac{\partial^3 z}{\partial x_1\,\partial x_2^2}(0,x_2) = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x_1\,\partial x_2^2}\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} a_{(1,2+j)}\, x_1\, x_2^{2+j}\right) = \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(0,x_2), \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{(2+i,j)}\, x_1^{2+i}\, x_2^{j} = \int_0^{x_1}\left(\int_0^{x_1} f(x_1,x_2)\,dx_1\right)dx_1,\\[1ex] \sum_{j=0}^{+\infty} a_{(0,2+j)}\, x_2^{2+j} = \int_0^{x_2}\left(\int_0^{x_2} g(0,x_2)\,dx_2\right)dx_2,\\[1ex] \sum_{j=0}^{+\infty} a_{(1,2+j)}\, x_1\, x_2^{2+j} = x_1\, \int_0^{x_2}\left(\int_0^{x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1}(0,x_2)\,dx_2\right)dx_2. \end{array}\right.$$

Intégrabilité formelle: exemple

• Une solution analytique autour du point $(0,0)$ du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = f(x_1, x_2), \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = g(x_1, x_2), \end{array} \right.$$

existe ssi la condition d'intégrabilité $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}$ est vérifiée.

• Cette solution dépend de 4 constantes arbitraires déterminées par les conditions initiales:

$$a_{(0,0)} = A, \quad a_{(1,0)} = B, \quad a_{(0,1)} = C, \quad a_{(1,1)} = D.$$

$$\Rightarrow z(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} (x_1 - \xi_1)\, f(x_1, \xi_2)\, d\xi_1 + \int_0^{x_2} (x_2 - \xi_2)\, g(0, \xi_2)\, d\xi_2$$
$$+ x_1 \int_0^{x_2} (x_2 - \xi_2) \frac{\partial g}{\partial x_1}(0, \xi_2)\, d\xi_2 + A + B\, x_1 + C\, x_2 + D\, x_1\, x_2.$$

Intégrabilité formelle: exemple

- Etudions le système suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_1^2\, z = x_1\, z, \\ \partial_2^2\, z = 0. \end{array}\right. \qquad (\star)$$

- Nous adjoignons $\partial_1\, \partial_2^2\, z = 0$ à $(\star)$ afin d'obtenir un système dont les dérivées principales forment un système complet $\{x_1^2, x_2^2, x_1\, x_2^2\}$.

- La condition d'intégrabilité devient alors:

$$\partial_2^2\, (\partial_1^2\, z - x_1\, z) - \partial_1^2\, (\partial_2^2\, z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_2^2\, z = 0.$$

- Nous obtenons le système complet et passif:

$$\text{(base de Janet)} \quad \left\{\begin{array}{l} \partial_1^2\, z = x_1\, z, \\ \partial_2^2\, z = 0, \\ \partial_1\, \partial_2^2\, z = 0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} z(0, 0) = A, \\ (\partial_1\, z)(0, 0) = B, \\ (\partial_2\, z)(0, 0) = C, \\ (\partial_1\, \partial_2\, z)(0, 0) = D. \end{array}\right. \qquad (\star\star)$$

$\Rightarrow$ Il existe une solution analytique de $(\star\star)$ au voisinage de $(0, 0)$.

Intégrabilité formelle: exemple

- Etudions le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_1^2 \, z = x_2 \, z, \\ \partial_2^2 \, z = 0. \end{array} \right. \qquad (\star)$$

- Nous adjoignons $\partial_1 \, \partial_2^2 \, z = 0$ à $(\star)$ afin d'obtenir un système dont les dérivées principales forment un système complet $\{x_1^2, x_2^2, x_1 \, x_2^2\}$.

- La condition d'intégrabilité devient alors:

$$\begin{array}{rll} \partial_2^2 \, (\partial_1^2 \, z - x_2 \, z) - \partial_1^2 \, (\partial_2^2 \, z) = & x_2 \, \partial_2^2 \, z - 2 \, \partial_2 \, z = 0 & \\ & -x_2 \, \partial_2^2 \, z = 0 & \Rightarrow \partial_2 \, z = 0. \end{array}$$

- On recommence avec le nouveau système:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_1^2 \, z = x_2 \, z, \\ \partial_2^2 \, z = 0, \\ \partial_2 \, z = 0, \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad z = 0. \quad \text{(base de Janet)}$$

- Conclusion: En saturant $(\star)$, nous obtenons $(\star) \Leftrightarrow z = 0$.

Conditions de compatibilité

• En appliquant le même procédé que précédemment, nous pouvons calculer les conditions de compatibilité du système:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_1^2\, z - x_1\, z = u, \\ \partial_2^2\, z = v, \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \partial_2^2\, u - \partial_1^2\, v + x_1\, v = 0.$$

• Idem pour le deuxième système:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_1^2\, z - x_2\, z = u, \\ \partial_2^2\, z = v, \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \partial_2^3\, u + (-\partial_1^2\, \partial_2 + x_2\, \partial_2 + 3)\, v = 0, \quad (w) \\ (\partial_1^4\, \partial_2^2 - 2\, x_2\, \partial_1^2\, \partial_2^2 + 2\, \partial_1^2\, \partial_2 + x_2^2\, \partial_2^2 - 2\, x_2\, \partial_2 + 2)\, u \\ \qquad + (-\partial_1^6 + 3\, x_2\, \partial_1^4 - 3\, x_2^2\, \partial_1^2 + x_2^3)\, v = 0. \quad (t) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow (\partial_1^4 - 2\, x_2\, \partial_1^2 + x_2^2)\, w - \partial_2\, t = 0.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_1^2\, z - x_1\, z = u, \\ \partial_2^2\, z = v, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \partial_2^2\, u - \partial_1^2\, v + x_1\, v = 0.$$

$$0 \longrightarrow \ker_{\mathcal{F}}\left(\left(\begin{array}{c} \partial_1^2 - x_1 \\ \partial_2^2 \end{array}\right).\right) \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\left(\begin{array}{c} \partial_1^2 - x_1 \\ \partial_2^2 \end{array}\right).} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{(\partial_2^2 \quad -\partial_1^2 + x_1).} \mathcal{F}.$$

$$\left(\begin{array}{c} \partial_1^2 - x_1 \\ \partial_2^2 \end{array}\right) z = \left(\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right) \Rightarrow (\partial_2^2 \quad -\partial_1^2 + x_1)\left(\begin{array}{c} \partial_1^2 - x_1 \\ \partial_2^2 \end{array}\right) = 0.$$

$$0 \longleftarrow M \xleftarrow{\pi} D \xleftarrow{.\left(\begin{array}{c} \partial_1^2 - x_1 \\ \partial_2^2 \end{array}\right)} D^{1\times 2} \xleftarrow{.(\partial_2^2 \quad -\partial_1^2 + x_1)} D \longleftarrow 0.$$

$\Rightarrow$ $D = \mathbb{Q}(x_1, x_2)[\partial_1, \partial_2]$-module à gauche de présentation fini:

$$M = D/(D\,(\partial_1^2 - x_1) + D\,\partial_2^2).$$

Bases de Janet- Bases de Gröbner

• Considérons $D = \mathbb{Q}(x_1, x_2)[\partial_1, \partial_2]$ l'algèbre non-commutative des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathbb{Q}(x_1, x_2)$:

$$P = \sum_{0 \leq i+j \leq r} a_{i,j}(x_1, x_2)\, \partial_1^i\, \partial_2^j \in D, \quad a_{i,j} \in \mathbb{Q}(x_1, x_2)$$

$$\begin{cases} \partial_i\, \partial_j = \partial_j\, \partial_i, \\ \partial_i\,(a\,y) = a\,\partial_i\,y + (\partial_i\,a)\,y \;\Rightarrow\; \partial_i(a\,\cdot) = a\,\partial_i\;\cdot + (\partial_i\,a)\,\cdot \end{cases}$$

• Une base de Gröbner est en gros le dual d'une base de Janet pour la dualité "systèmes-modules différentiels".

• Il existe un algorithme similaire au calcul des bases de Janet pour les bases de Gröbner (algorithme de Buchberger).

• Implantations dans de nombreux systèmes de calcul formel (e.g., Maple, Mathematica, Singular, Cocoa).

Bases de Janet- Bases de Gröbner

- Intérêts des bases de Janet et de Gröbner:

1. Intégrabilité formelle, développement en séries, généralisation du théorème de Cauchy-Kovaleskaya, thm. de Cartan-Kähler.
2. Calcul du degré de généralité des systèmes différentiels.
3. Calcul des conditions de compatibilité & calcul de $\ker_D(.R)$.
4. Calcul de factorisations de matrices d'opérateurs.
5. Calcul d'inverses (à gauche, à droite, généralisés) sur D.
6. Elimination différentielle...

- Version intrinsèque: théorie formelle des EDP de Spencer:

variété fibrée dans un espace des jets, prolongations & projections, cohomologie de Spencer, involution, suites de Spencer...

Exemples

- Le premier système dépend de 4 constantes, le second est 0.
- $R = (\partial_1^2 - x_2 \quad \partial_2^2)^T$. Nous avons $\ker_D(.R) = D^{1\times 2}\, Q$ avec:

$$Q = \begin{pmatrix} \partial_2^3 & -\partial_1^2\,\partial_2 + x_2\,\partial_2 + 3 \\ \partial_1^4\,\partial_2^2 - 2\,x_2\,\partial_1^2\,\partial_2^2 + 2\,\partial_1^2\,\partial_2 + x_2^2\,\partial_2^2 - 2\,x_2\,\partial_2 + 2 & -\partial_1^6 + 3\,x_2\,\partial_1^4 - 3\,x_2^2\,\partial_1^2 + x_2^3 \end{pmatrix}.$$

- $\ker_D(.Q) = D\,P, \quad P = (\partial_1^4 - 2\,x_2\,\partial_1^2 + x_2^2 \quad -\partial_2)$.
- La matrice R admet l'inverse à gauche ($S\,R = 1$):

$$S = \frac{1}{2}\,(-\partial_1^2\,\partial_2^2 + x_2\,\partial_2^2 - 2\,\partial_2 \quad \partial_1^4 - 2\,x_2\,\partial_1^2 + x_2^2).$$

- La matrice Q admet l'inverse généralisée ($Q\,T\,Q = Q$):

$$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_1^2\,\partial_2 - x_2\,\partial_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- La matrice P admet l'inverse à droite ($P\,U = 1$):

$$U = \frac{1}{2}\,(\partial_2^2 \quad \partial_1^4\,\partial_2^2 - 2\,x_2\,\partial_1^2\,\partial_2 + 2\,\partial_1^2 + x_2^2\,\partial_2 - 2\,x_2)^T.$$

Paramétrisations & problème de Monge

- Problème direct: recherche des conditions de compatibilité

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_1^2\, z - x_1\, z = u, \\ \partial_2^2\, z = v, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \partial_2^2\, u - \partial_1^2\, v + x_1\, v = 0.$$

- Problème inverse: recherche de paramétrisations

$$? \quad \Rightarrow \quad \partial_2^2\, u - \partial_1^2\, v + x_1\, v = 0.$$

$$\vec{\nabla}\, .\, \vec{A} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B}, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \vec{B} = \vec{\nabla}\, f.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}, \\ \vec{\nabla}\, .\, \vec{B} = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{E} = -\vec{\nabla}\, V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_1\, \xi_1 = \epsilon_{11} \\ \frac{1}{2}\, (\partial_2\, \xi_1 + \partial_1\, \xi_2) = \epsilon_{12} \\ \partial_2\, \xi_2 = \epsilon_{22} \end{array}\right. \Leftrightarrow \; \partial_2^2\, \epsilon_{11} - 2\, \partial_1\, \partial_2\, \epsilon_{12} + \partial_1^2\, \epsilon_{22} = 0.$$

- Exemple plus difficile à trouver à la main:

$$\begin{cases} \partial_1^2 z - x_2 z = u, \\ \partial_2^2 z = v, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_2^3 u + (-\partial_1^2 \partial_2 + x_2 \partial_2 + 3) v = 0, \\ (\partial_1^4 \partial_2^2 - 2 x_2 \partial_1^2 \partial_2^2 + 2 \partial_1^2 \partial_2 + x_2^2 \partial_2^2 - 2 x_2 \partial_2 + 2) u \\ \qquad + (-\partial_1^6 + 3 x_2 \partial_1^4 - 3 x_2^2 \partial_1^2 + x_2^3) v = 0. \end{cases}$$

- Quid du système $\mathrm{grad}(\mathrm{div}\, \vec{A}) = \vec{0}$?

$$? \quad \Rightarrow \vec{\nabla} (\vec{\nabla} . \vec{A}) = \vec{0}.$$

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} . \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \vec{\nabla} (\vec{\nabla} . \vec{A}) = \vec{0}.$$

$$\vec{A}_\star = (C\, x_1 \quad 0 \quad 0)^T \Rightarrow \vec{\nabla} (\vec{\nabla} . \vec{A}_\star) = \vec{0} \quad \& \quad \vec{A}_\star \neq \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_\star.$$

Théorie des modules

- Soit $D = A[\partial_1, \ldots, \partial_n]$ un anneau d'opérateurs différentiels à coefficients dans un anneau différentiel A

$$(\text{e.g., } A = \mathbb{Q},\ \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n],\ \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)).$$

- Soient $R \in D^{q \times p}$ et le D-module à gauche $M = D^{1 \times p}/(D^{1 \times q}\, R)$.

- Théorème de Malgrange: Soit $\mathcal{F}$ un D-module à gauche. Alors:

$$\ker_{\mathcal{F}}(R.) = \{\eta \in \mathcal{F}^p \mid R\,\eta = 0\}$$
$$\cong$$
$$\hom_D(M, \mathcal{F}) = \{f : M \to \mathcal{F},\ f \text{ D-linéaire}\}.$$

- Exemple: $D = \mathbb{R}[\partial_1, \ldots, \partial_n]$, $\mathcal{F} = C^\infty(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{S}'(\Omega)$, où Ω ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$.

- Version locale: faisceaux de modules différentiels, opérateurs différentiels entre fibrés vectoriels.

Classification des modules

- Définition: 1. M est libre si $\exists\, r \in \mathbb{Z}_+$ tel que $M \cong D^{1\times r}$.

2. M est stablement libre si $\exists\, r,\, s \in \mathbb{Z}_+$ tels que:

$$M \oplus D^{1\times s} \cong D^{1\times r}.$$

3. M est projectif si $\exists\, r \in \mathbb{Z}_+$ et un D-module P tels que:

$$M \oplus P \cong D^{1\times r}.$$

4. M est réflexif si $\varepsilon : M \longrightarrow \hom_D(\hom_D(M, D), D)$ est un isomorphisme, où:

$$\varepsilon(m)(f) = f(m), \quad \forall\, m \in M, \quad f \in \hom_D(M, D).$$

5. M est sans-torsion si:

$$t(M) = \{m \in M \,|\, \exists\, 0 \neq P \in D : P\, m = 0\} = 0.$$

6. M est de torsion si $t(M) = M$.

Adjoint formel & module transposé

- Définition: Soient $D = A[\partial_1, \ldots, \partial_n]$ et $R \in D^{q \times p}$. L'adjoint formel $\lambda \mapsto \widetilde{R}\,\lambda$ de l'opérateur différentiel $\eta \mapsto R\,\eta$ est défini par:

$$\forall\, \lambda \in \mathcal{D}^{1 \times p}, \quad < \lambda, R\,\eta > = < \widetilde{R}\,\lambda, \eta > .$$

- Nous avons: $(\lambda, R\,\eta) \ = \ (\widetilde{R}\,\lambda, \eta) + \mathrm{div}(\Phi(\lambda, \eta)).$

- Définition: Soient $R \in D^{q \times p}$ et $M = D^{1 \times p}/(D^{1 \times q}\, R)$. Le module transposé de M est le D-module à gauche défini par:

$$\widetilde{N} = D^{1 \times q}/(D^{1 \times p}\, \widetilde{R}).$$

Exemple

- Calculons l'adjoint formel de $(u \quad v)^T \longmapsto \partial_2^2\, u - \partial_1^2\, v + x_1\, v$:

$$\begin{aligned}
\lambda\,(\partial_2^2\, u - \partial_1^2\, v + x_1\, v) &= -\partial_2\,\lambda\,\partial_2\, u + \partial_1\,\lambda\,\partial_1\, v + (x_1\,\lambda)\, v \\
&\quad +\partial_1(-\lambda\,\partial_1\, v) + \partial_2(\lambda\,\partial_2\, u) \\
&= (\partial_2^2\,\lambda)\, u + (-\partial_1^2\,\lambda + x_1\,\lambda)\, v \\
&\quad +\partial_1(v\,\partial_1\,\lambda - \lambda\,\partial_1\, v) + \partial_2(\lambda\,\partial_2\, u - u\,\partial_2\,\lambda).
\end{aligned}$$

- L'adjoint formel est alors défini par:

$$\lambda \longmapsto \begin{cases} \partial_2^2\,\lambda = \mu_1 \\ -\partial_1^2\,\lambda + x_1\,\lambda = \mu_2. \end{cases}$$

Module M	**Algèbre homologique**	$\mathcal{F}$ **injectif cogénérateur**
avec torsion	$t(M) \cong \mathrm{ext}^1_D(\widetilde{N}, D)$	$\emptyset$
sans-torsion	$\mathrm{ext}^1_D(\widetilde{N}, D) = 0$	$\ker_{\mathcal{F}}(R.) = Q\,\mathcal{F}^{l_1}$
réflexif	$\mathrm{ext}^i_D(\widetilde{N}, D) = 0$ $i = 1, 2$	$\ker_{\mathcal{F}}(R.) = Q_1\,\mathcal{F}^{l_1}$ $\ker_{\mathcal{F}}(Q_1.) = Q_2\,\mathcal{F}^{l_2}$
projectif = stablement libre	$\mathrm{ext}^i_D(\widetilde{N}, D) = 0$ $1 \leq i \leq n$	$\ker_{\mathcal{F}}(R.) = Q_1\,\mathcal{F}^{l_1}$ $\ker_{\mathcal{F}}(Q_1.) = Q_2\,\mathcal{F}^{l_2}$ $\dots$ $\ker_{\mathcal{F}}(Q_{n-1}.) = Q_n\,\mathcal{F}^{l_n}$
libre	Théorème de Quillen-Suslin Théorème de Stafford	$\ker_{\mathcal{F}}(R.) = Q\,\mathcal{F}^{l}$ $\exists\ T :\ T\,Q = I$

$\mathrm{ext}^1_D(\widetilde{N}, D)$ & algorithme

- Nous suivons les étapes 1, 2, 3 et 4:

$$\begin{array}{ccc}
4. \quad Q\,\xi = \eta & \Longrightarrow & R\,\eta = 0 \quad 1. \\
\Uparrow & & \Downarrow \\
\text{adjoint formel} & & \text{adjoint formel} \\
\Uparrow & & \Downarrow \\
3. \quad 0 = \widetilde{Q}\mu & \stackrel{\text{B.J.}}{\Longleftarrow} & \mu = \widetilde{R}\,\lambda \quad 2.
\end{array}$$

- Remarque: $\widetilde{Q} \circ \widetilde{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\widetilde{Q} \circ \widetilde{R}} = R \circ Q = 0.$

- Etape 5: $\quad Q\,\xi = \eta \quad \stackrel{\text{B.J.}}{\Longrightarrow} \quad R'\eta = 0.$

$$\mathrm{ext}^1_D(\widetilde{N}, D) = (D^{1 \times q'}\, R')/(D^{1 \times q}\, R).$$

$$\mathrm{ext}^1_D(\widetilde{N}, D) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, U \in D^{q' \times q} : \; R' = U\,R \quad (\text{B.J.}).$$

Exemple

- Le système $\partial_2^2\, u - \partial_1^2\, v + x_1\, v = 0$ est-il paramétrisable?
- L'adjoint formel de $(u \quad v)^T \longmapsto \partial_2^2\, u - \partial_1^2\, v + x_1\, v$ est défini par:

$$\lambda \longmapsto \begin{cases} \partial_2^2\, \lambda = \mu_1 \\ -\partial_1^2\, \lambda + x_1\, \lambda = \mu_2. \end{cases} \qquad (\star)$$

- Rendant le système $(\star)$ formellement intégrable (base de Janet), nous obtenons les conditions de compatibilité suivantes:

$$\partial_1^2\, \mu_1 - x_1\, \mu_1 + \partial_2^2\, \mu_2 = 0.$$

- L'adjoint formel de $(\mu_1 \quad \mu_2)^T \longmapsto \partial_1^2\, \mu_1 - x_1\, \mu_1 + \partial_2^2\, \mu_2$ est:

$$z \longmapsto \begin{cases} \partial_1^2\, z - x_1\, z = u, \\ \partial_2^2\, z = v. \end{cases} \qquad (\star\star)$$

- Rendant le système $(\star\star)$ formellement intégrable (base de Janet), nous obtenons les conditions de compatibilité suivantes:

$$\partial_2^2\, u - \partial_1^2\, v + x_1\, v = 0.$$

Exemple

- Le système $\mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{A}) = \vec{0}$ est-il paramétrisable?

- L'opérateur $\vec{A} \longmapsto \vec{\nabla}\,(\vec{\nabla}\,.\vec{A})$ est auto-adjoint.
- Les conditions de compatibilité du système $\vec{\nabla}\,(\vec{\nabla}\,.\vec{A}) = \vec{B}$ sont:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{0}.$$

- L'opérateur $\vec{B} \longmapsto \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$ est auto-adjoint.
- Les conditions de compatibilité du système $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{A}$ sont:

$$\vec{\nabla}\,.\,\vec{A} = 0.$$

- Nous obtenons $\mathrm{ext}^1_D(\widetilde{N}, D) = (D\,\mathrm{div})/(D^{1\times 3}\,(\mathrm{grad}\circ\mathrm{div})) \neq 0$.

$$\Rightarrow z = \partial_1\,A_1 + \partial_2\,A_2 + \partial_3\,A_3 \in M : \quad \partial_i\,z = 0, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

$$\Rightarrow z \in t(M) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{A}) = \vec{0} \text{ n'est pas paramérisable.}$$

Exemple

- Si l'on veut paramétrer toutes les solutions $\mathcal{F} = C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ de

$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{A}) = \vec{0},$$

nous devons utiliser une paramétrisation plus générale:

$$\forall\ \vec{B} \in \mathcal{F}^3, \quad \forall\ C \in \mathbb{R}, \quad \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} + \begin{pmatrix} C\,x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Cette paramétrisation est dite paramétrisation de Monge.

Exemple

- Considérons le système d'EDP suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1\,\partial_3\,y_1 + x_2\,\partial_3\,y_2 = 0, \\ -x_1\,\partial_2\,y_1 + x_2\,\partial_1\,y_1 - y_2 + x_2\,\partial_3\,y_3 = 0, \\ -y_1 - x_2\,\partial_1\,y_2 + x_1\,\partial_2\,y_2 + x_1\,\partial_3\,y_3 = 0. \end{array}\right. \qquad (\star)$$

- En appliquant la méthode précédente, nous obtenons:

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = x_1\,y_1 + x_2\,y_2, \\ z_2 = (-x_1^2\,\partial_2 + x_1\,x_2\,\partial_1 - x_2)\,y_1 - x_1^3\,\partial_3\,y_3, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_3\,z_i = 0, \\ (-x_1\,\partial_2 + x_2\,\partial_3)\,z_i = 0, \end{array}\right. \qquad i = 1, 2.$$

- Le système $(\star)$ n'est donc pas paramétrisable.

Exemple

- Considérons le système d'EDP suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \, \vec{\nabla} \, . \, \vec{v}(x,t) + \dfrac{1}{c^2} \, \dfrac{\partial \, p(x,t)}{\partial t} = 0, \\ \rho_0 \, \dfrac{\partial \, \vec{v}(x,t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \, p(x,t) = 0. \end{array} \right. \qquad (\star)$$

- En étudiant l'intégrabilité formelle de $(\star)$, on montre qu'il n'admet pas de conditions de compatibilité.

Le $D = \mathbb{Q}(\rho_0, c)[\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t]$-module associé à $(\star)$ est de torsion:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\partial_t^2 - c^2 \, \Delta) \, \partial_t \, v_i = 0, \; i = 1, 2, 3, \\ (\partial_t^2 - c^2 \, \Delta) \, p = 0. \end{array} \right.$$

Exemple

- Le système $\vec{\nabla} \,.\, \vec{A} = 0$ est-il paramétrisable?
- L'adjoint formel de l'opérateur $\vec{A} \longmapsto \vec{\nabla} \,.\, \vec{A}$ est l'opérateur

$$\lambda \longmapsto -\vec{\nabla}\,\lambda.$$

- Les conditions de compatibilité du système $-\vec{\nabla}\,\lambda = \vec{\mu}$ sont alors:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\mu} = \vec{0}.$$

- L'opérateur différentiel $\vec{\mu} \longmapsto \vec{\nabla} \wedge \vec{\mu}$ est auto-adjoint.
- Les conditions de compatibilité du système $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{A}$ sont:

$$\vec{\nabla} \,.\, \vec{A} = 0.$$

- L'adjoint formel de $\vec{\nu} \longmapsto \vec{\nabla} \,.\, \vec{\nu}$ est $f \longmapsto \vec{\nabla} f$ et les conditions de compatibilité de $\vec{\nabla} f = \vec{B}$ sont $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{0}$.

$\Rightarrow$ Le $D = \mathbb{Q}[\partial_1, \partial_2, \partial_3]$-module défini par la divergence est réflexif.

Exemple

1. Le système $(\partial_1^4 - 2\,x_2\,\partial_1^2 + x_2^2)\,w - \partial_2\,t = 0$ est paramétré par:

$$\left\{\begin{array}{l} w = \partial_2^3\,u + (-\partial_1^2\,\partial_2 + x_2\,\partial_2 + 3)\,v \\ t = (\partial_1^4\,\partial_2^2 - 2\,x_2\,\partial_1^2\,\partial_2^2 + 2\,\partial_1^2\,\partial_2 + x_2^2\,\partial_2^2 - 2\,x_2\,\partial_2 + 2)\,u \\ \qquad\qquad + (-\partial_1^6 + 3\,x_2\,\partial_1^4 - 3\,x_2^2\,\partial_1^2 + x_2^3)\,v. \end{array}\right.$$

2. De plus, le système

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_2^3\,u + (-\partial_1^2\,\partial_2 + x_2\,\partial_2 + 3)\,v = 0, \\ (\partial_1^4\,\partial_2^2 - 2\,x_2\,\partial_1^2\,\partial_2^2 + 2\,\partial_1^2\,\partial_2 + x_2^2\,\partial_2^2 - 2\,x_2\,\partial_2 + 2)\,u \\ \qquad\qquad + (-\partial_1^6 + 3\,x_2\,\partial_1^4 - 3\,x_2^2\,\partial_1^2 + x_2^3)\,v = 0, \end{array}\right.$$

est paramétré par:

$$\left\{\begin{array}{l} u = \partial_1^2\,z - x_2\,z, \\ v = \partial_2^2\,z. \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ le $D = \mathbb{Q}[x_1, x_2][\partial_1, \partial_2]$-module à gauche

$M = D^{1\times 2}/(D\,(\partial_1^4 - 2\,x_2\,\partial_1^2 + x_2^2 \quad - \partial_2))$ est projectif $(n = 2)$.

Exemple

- Considérons le système contrôlé suivant ($l_1 \neq l_2$):

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) + \frac{g}{l_1}\, x_1(t) - \frac{g}{l_1}\, u(t) = 0, \\ \ddot{x}_2(t) + \frac{g}{l_2}\, x_2(t) - \frac{g}{l_2}\, u(t) = 0. \end{cases} \qquad (\star)$$

- Le système $(\star)$ est paramétrisable:

$$\begin{cases} x_1(t) = l_2\, \ddot{\xi}(t) + g^2\, \xi(t), \\ x_2(t) = l_1\, \ddot{\xi}(t) + g^2\, \xi(t), \\ u(t) = l_1\, l_2 \xi^{(4)}(t) + g\,(l_1 + l_2)\, \ddot{\xi}(t) + g^2\, \xi(t). \end{cases} \qquad (\star\star)$$

- De plus, la paramétrisation $(\star)$ est injective car nous avons:

$$(\star\star) \;\Rightarrow\; \xi(t) = \frac{l_1}{g^2\,(l_1 - l_2)}\, x_1(t) - \frac{l_2}{g^2\,(l_1 - l_2)}\, x_2(t).$$

Exemple: Quid du tenseur de Ricci linéarisé?

$$R = \left(\begin{array}{cccc}
\partial_2^2 + \partial_3^2 - \partial_t^2 & \partial_1^2 & \partial_1^2 & -\partial_1^2 \\
\partial_2^2 & \partial_1^2 + \partial_3^2 - \partial_t^2 & \partial_2^2 & -\partial_2^2 \\
\partial_3^2 & \partial_3^2 & \partial_1^2 + \partial_2^2 - \partial_t^2 & -\partial_3^2 \\
\partial_t^2 & \partial_t^2 & \partial_t^2 & \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^3 \\
0 & 0 & \partial_1\,\partial_2 & -\partial_1\,\partial_2 \\
\partial_2\,\partial_3 & 0 & 0 & -\partial_2\,\partial_3 \\
\partial_3\,\partial_t & \partial_3\,\partial_t & 0 & 0 \\
0 & \partial_1\,\partial_3 & 0 & -\partial_1\,\partial_3 \\
\partial_2\,\partial_t & 0 & \partial_2\,\partial_t & 0 \\
0 & \partial_1\,\partial_t & \partial_1\,\partial_t & 0
\end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{cccccc}
-2\,\partial_1\,\partial_2 & 0 & 0 & -2\,\partial_1\,\partial_3 & 0 & 2\,\partial_1\,\partial_t \\
-2\,\partial_1\,\partial_2 & -2\,\partial_2\,\partial_3 & 0 & 0 & 2\,\partial_2\,\partial_t & 0 \\
0 & -2\,\partial_2\,\partial_3 & 2\,\partial_3\,\partial_t & -2\,\partial_1\,\partial_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2\,\partial_3\,\partial_t & 0 & -2\,\partial_2\,\partial_t & -2\,\partial_1\,\partial_t \\
\partial_2^3 - \partial_t^2 & -\partial_1\,\partial_3 & 0 & -\partial_2\,\partial_3 & \partial_1\,\partial_t & \partial_2\,\partial_t \\
-\partial_1\,\partial_3 & \partial_1^2 - \partial_t^2 & \partial_2\,\partial_t & -\partial_1\,\partial_2 & \partial_3\,\partial_t & 0 \\
0 & -\partial_2\,\partial_t & \partial_1^2 + \partial_2^2 & -\partial_1\,\partial_t & -\partial_2\,\partial_3 & -\partial_1\,\partial_3 \\
-\partial_2\,\partial_3 & -\partial_1\,\partial_2 & \partial_1\,\partial_t & \partial_2^2 - \partial_t^2 & 0 & \partial_3\,\partial_t \\
-\partial_1\,\partial_t & -\partial_3\,\partial_t & -\partial_2\,\partial_3 & 0 & \partial_1^2 + \partial_3^2 & -\partial_1\,\partial_3 \\
-\partial_2\,\partial_t & 0 & -\partial_1\,\partial_3 & -\partial_3\,\partial_t & -\partial_1\,\partial_3 & \partial_2^2 + \partial_3^2
\end{array} \right)$$

Conclusion

• Au cours de notre courte promenade dans les théories algébriques différentielles, nous avons évoqué:

1. Intégrabilité formelle.
2. Bases de Janet et bases de Gröbner.
3. Analyse algébrique (D-modules).

• Implantation des différents algorithmes dans OREMODULES:

http://wwwb.math.rwth-aachen.de/OreModules.

• La théorie des D-modules nous permettra cet après-midi de décomposer certains systèmes linéaires d'EDP, c-à-d, de trouver des matrices d'opérateurs inversibles U et V telles que:

$$V\,R\,U^{-1} = \begin{pmatrix} \star & 0 \\ 0 & \star \end{pmatrix}, \quad R \in D^{q \times p}.$$