Contributions de Charles Méray à l'étude des systèmes d'équations aux dérivées partielles

Colloque en hommage à Charles Méray,
Mathématicien et Vigneron Chalonnais (1835-1911)

Alban Quadrat

INRIA Sophia-Antipolis,
Projet Café,
2004, Route des Lucioles BP 93,
06902 Sophia Antipolis Cedex,
France.

Alban.Quadrat@sophia.inria.fr

Systèmes d'équations aux dérivées partielles

• **Définition :** On appelle **système d'équations aux dérivées partielles** (EDPs) un système d'équations reliant des fonctions inconnues

$$z_1(x_1,\dots,x_n),\dots,z_m(x_1,\dots,x_n),$$

et un nombre fini de leurs dérivées :

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial z_i}{\partial x_n},\frac{\partial^2 z_i}{\partial x_1^2},\dots\frac{\partial^2 z_i}{\partial x_n^2},\frac{\partial^3 z_i}{\partial x_1^3},\dots,i=1,\dots,m.$$

$x_1,\dots,x_n$: **variables indépendantes**.

• **Exemples :** $\Delta\, z=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2}\right)$

$\Delta\, z=0$ (fonctions harmoniques).

$\frac{\partial z}{\partial x_4}-\Delta\, z=0$ (équation de la chaleur, $x_4=t$).

$\frac{\partial^2 z}{\partial x_4^2}-\Delta\, z=0$ (équation des ondes, $x_4=t$)...

• **Problème central :** Etude de l'existence et de l'unicité des solutions de systèmes d'EDPs.

Théorème de Cauchy-Kovaleskaya

• Considérons le système d'EDPs suivant :

$$(\star)\begin{cases} \dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} = & f_1\left(x_1, x_2, z_1, \ldots, z_m, \frac{\partial z_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z_m}{\partial x_2}\right), \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial z_m}{\partial x_1} = & f_m\left(x_1, x_2, z_1, \ldots, z_m, \frac{\partial z_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z_m}{\partial x_2}\right). \end{cases}$$

• Considérons m **fonctions analytiques**

$$\phi_1(x_2), \ldots, \phi_m(x_2)$$

au voisinage de $x_2 = 0$ telles que $f_1, \ldots, f_m$ soient **analytiques** au voisinage de :

$$\left(0, \phi_1(0), \ldots, \phi_m(0), \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}\right)(0), \ldots, \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial x_2}\right)(0)\right).$$

• **($\star$) admet alors une unique solution analytique** $(z_1, \ldots, z_m)$ au voisinage du point $(x_1, x_2) = (0, 0)$ **satisfaisant les conditions initiales :**

$$\begin{cases} z_1(0, x_2) & = & \phi_1(x_2), \\ \vdots & & \vdots \\ z_m(0, x_2) & = & \phi_m(x_2). \end{cases}$$

• **Extension directe** au cas $(x_1, \ldots, x_n)$.

• **Méthode des fonctions des majorantes**.

Contributions de Méray

- Etude des systèmes d'EDPs généraux :

Extension du théorème de Cauchy-Kovaleskaya aux systèmes généraux d'EDPs d'ordre 1

- **Solutions d'un système d'EDPs développables en séries entières** autour d'un point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$:

$$z_i(x) = \sum_{\nu_1=0}^{+\infty} \ldots \sum_{\nu_n=0}^{+\infty} a_{(\nu_1,\ldots,\nu_n)} \, (x_1 - x_1^0)^{\nu_1} \ldots (x_n - x_n^0)^{\nu_n}.$$

- Méray a fortement contribué à cette théorie :

> Depuis les travaux d'Abel et Cauchy, on sait qu'à toute fonction régulière dans un certain cercle correspond un développement de Taylor, et réciproquement.
> **C'est même ce développement que M. Weierstrass, et, en France, M. Méray emploient pour définir la fonction.**
>
> J. Hadamard (Thèse, 1892)

Contributions de Méray

• **Philosophie** :

1. Etude des solutions en séries formelles

$\Rightarrow$ **Etude de l'intégrabilité formelle.**

$\Rightarrow$ **Détermination du nombre et de la nature des conditions initiales** (degré de généralité).

2. Preuve de la convergence des solutions formelles

$\Rightarrow$ **méthode des fonctions majorantes.**

• Introduction des concepts de **dérivées principales** et **paramétriques** et de **systèmes passifs.**

• **Collaboration avec Riquier** :

$\Rightarrow$ Existence et unicité de solutions analytiques de systèmes immédiats passifs d'ordre 1 (1890).

$\Rightarrow$ Existence et unicité de solutions analytiques de systèmes orthonomes passifs généraux (Riquier, 1910).

• **Etude algorithmique** développée par Janet (1920)

$\Rightarrow$ **Bases de Janet** (Maple, Mupad...).

Exemple

- Considérons le système

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} &= f(x_1, x_2), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} &= g(x_1, x_2), \end{aligned} \right. \qquad (\star)$$

où f et g sont deux fonctions analytiques au voisinage du point $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

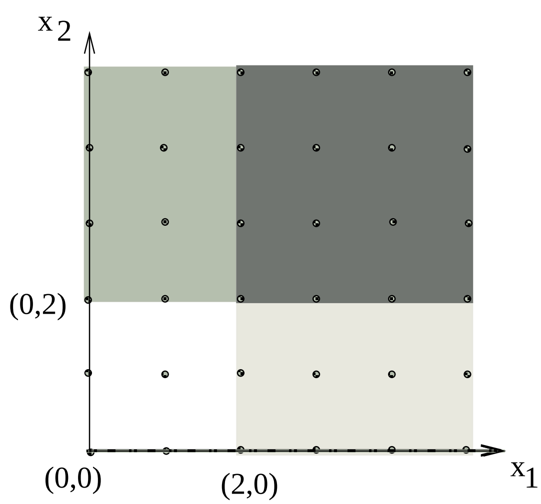
- Détermination des **conditions initiales** de $(\star)$ afin qu'il existe une **solution analytique** de $(\star)$ en 0 :

$$z(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{(i,j)}\, x_1^i\, x_2^j. \quad (\star\star)$$

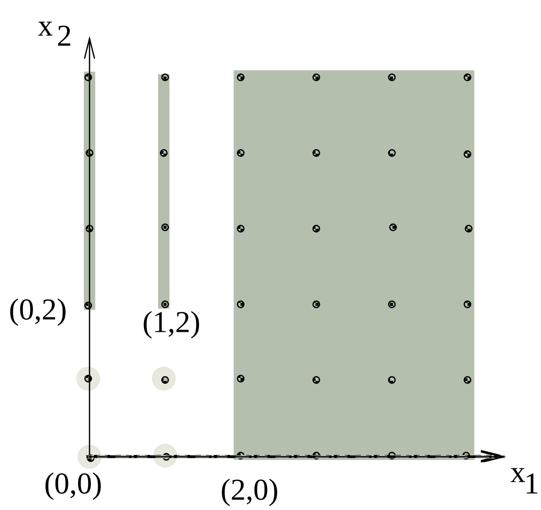
- A tout **monôme** $x_1^i\, x_2^j$ de $(\star\star)$, on fait correspondre un **point entier** $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ **du plan**.

- On fait aussi la correspondance suivante :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \longleftrightarrow x_1^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \longleftrightarrow x_2^2.$$



x 2
(0,2)
(0,0)
(2,0)
x1



x 2
(0,2)
(1,2)
(0,0)
(2,0)
x1

• Les monômes multiples de x_1^2 et x_2^2 se décomposent en 3 classes disjointes deux à deux :

$$M_1 = \{x_1^l\, x_2^m\, (x_1^2) \,|\, l,\, m \in \mathbb{N}\}$$

$$M_2 = \{x_2^l\, (x_1\, x_2^2) \,|\, l \in \mathbb{N}\}$$

$$M_3 = \{x_2^l\, (x_1^2) \,|\, l \in \mathbb{N}\}$$

• $M = \{x_1^2, x_2^2, x_1\, x_2^2\}$ est un **système complet**,

x_1 et x_2 sont des **variables multiplicatrices** de x_1^2,

x_2 est une **variable multiplicatrice** de $x_1\, x_2^2$,

x_2 est une **variable multiplicatrice** de x_1^2.

• L'ensemble des **monômes complémentaires** de M est $N = \{1, x_1, x_2, x_2\, x_1\}$, i.e., $M \cup N = \mathbb{N}^2$.

• **Condition nécessaire** (condition d'intégrabilité) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}\right) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}, \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}.$$

- Nous faisons les **coupures** suivantes :

$$
\begin{aligned}
z(x_1,x_2) = \;& \textstyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{(2+i,k)}\, x_1^{2+i}\, x_2^{k} \\
& + \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{(0,2+k)}\, x_2^{2+k} \\
& + \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{(1,2+k)}\, x_1\, x_2^{2+k} \\
& + a_{(0,0)} + a_{(1,0)}\, x_1 \\
& + a_{(0,1)}\, x_2 + a_{(1,1)}\, x_1\, x_2.
\end{aligned}
$$

- Les **conditions initiales** sont alors données par :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
z(0,0) = A, \\
\dfrac{\partial z}{\partial x_1}(0,0) = B, \\
\dfrac{\partial z}{\partial x_2}(0,0) = C, \\
\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = D,
\end{array}
\right.
\quad \Rightarrow \quad
\left\{
\begin{array}{l}
a_{(0,0)} = A, \\
a_{(1,0)} = B, \\
a_{(0,1)} = C, \\
a_{(1,1)} = D.
\end{array}
\right.
$$

- Nous vérifions les **expressions suivantes** :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{(2+i,k)}\, x_1^{2+i}\, x_2^{k}\right), \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}(0,x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{(0,2+k)}\, x_2^{2+k}\right), \\
\frac{\partial^3 z}{\partial x_1 \partial x_2^2}(0,x_2) = \frac{\partial^3 z}{\partial x_1 \partial x_2^2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{(1,2+k)}\, x_1\, x_2^{2+k}\right),
\end{array}
\right.
$$

$$
\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = f(x_1,x_2), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = g(x_1,x_2).
$$

• Nous obtenons alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{(2+i,k)}\, x_1^{2+i}\, x_2^{k}\right) = f(x_1,x_2), \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{(0,2+k)}\, x_2^{2+k}\right) = g(0,x_2), \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x_1 \partial x_2^2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{(1,2+k)}\, x_1\, x_2^{2+k}\right) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(0,x_2), \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{(2+i,k)}\, x_1^{2+i}\, x_2^{k} = \int_0^{x_1}(\int_0^{x_1} f(x_1,x_2)\, dx_1)\, dx_1, \\ \sum_{k=0}^{+\infty} a_{(0,2+k)}\, x_2^{2+k} = \int_0^{x_2}(\int_0^{x_2} g(0,x_2)\, dx_2)\, dx_2, \\ \sum_{k=0}^{+\infty} a_{(1,2+k)}\, x_1\, x_2^{2+k} = x_1\ \int_0^{x_2}(\int_0^{x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1}(0,x_2)\, dx_2)\, dx_2, \end{cases}$$

• La **solution de ($\star$)** est alors donnée par :

$$\boxed{\begin{aligned} z(x_1,x_2) = \ & \int_0^{x_1}(x_1-\xi_1)\, f(x_1,\xi_2)\, d\xi_1 \\ & + \int_0^{x_2}(x_2-\xi_2)\, g(0,\xi_2)\, d\xi_2 \\ & + x_1\ \int_0^{x_2}(x_2-\xi_2)\frac{\partial g}{\partial x_1}(0,\xi_2)\, d\xi_2 \\ & + A + B\, x_1 + C\, x_2 + D\, x_1\, x_2. \end{aligned}}$$

Exemple

- Etudions le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = x_1\, z, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0. \end{array}\right. \qquad (\star)$$

- Nous adjoignons $\frac{\partial^3 z}{\partial x_1 \partial x_2^2} = 0$ à $(\star)$ afin d'obtenir le **système complet** $\{x_1^2, x_2^2, x_1\, x_2^2\}$.

- La **condition d'intégrabilité** devient alors

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} - x_1\, z\right) - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0.$$

- Nous obtenons le **système complet** et **passif** :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = x_1\, z, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^3 z}{\partial x_1 \partial x_2^2} = 0, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} z(0,0) = A, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_1}(0,0) = B, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_2}(0,0) = C, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = D. \end{array}\right. \qquad (\star\star)$$

$\Rightarrow$ **Il existe une solution analytique au voisinage de $(0,0)$ ayant $(\star\star)$ pour conditions initiales.**

Exemple

- Etudions le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = x_2\, z, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0. \end{array}\right. \qquad (\star)$$

- Nous adjoignons $\frac{\partial^3 z}{\partial x_1 \partial x_2^2} = 0$ à $(\star)$ afin d'obtenir le **système complet** $\{x_1^2, x_2^2, x_1\, x_2^2\}$.

- La **condition d'intégrabilité** devient alors

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} - x_2\, z\right) - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0,$$

- **On recommence** avec le nouveau système :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = x_2\, z, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_2} = 0, \end{array}\right. \qquad \Rightarrow z = 0.$$

- **Conclusion :** En saturant $(\star)$ des conséquences différentielles d'ordre plus bas, nous obtenons $z = 0$.

Conclusion

"...Mais aucun des systèmes différentiels qui précèdent ne peut être employé pour résoudre, dans toute sa généralité, le problème de l'existence des solutions. Pour y arriver, en effet, on doit considérer un système quelconque et chercher à le ramener à un système particulier tel que l'existence de ses solutions puisse être établie, en même temps que le nombre et la nature des éléments arbitraires qu'elles comportent.

Dès 1880, Ch. Méray avait publié un mémoire où il étudiait le problème général. La lecture approfondie de ce travail engagea pour longtemps Ch. Riquier dans l'étude du sujet, tout en lui donnant des notions et des dénominations qu'il a adoptés."

E. von Weber & G. Floquet, Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées, Tome II, Equations aux dérivées partielles (1916).

• Introduction des concepts des **dérivées principales** et **paramétriques** et des **systèmes passifs**.

• **Développement de l'approche moderne :**

1. Théorie formelle (séries formelles).

2. Preuve de l'existence de solutions analytiques.

• **Résolution des systèmes d'ordre 1 (Riquier)**.

Conclusion

- Quelques conséquences :

1. **Résultats généraux**, Riquier (1910).

2. **Aspects algorithmiques**, Janet (1920).

3. **Algèbre différentielle**, Ritt, Kolchin (1950).

4. **Théorie formelle des EDPs**, Spencer, Quillen, Goldschmidt (1960).

5. **Implémentation des bases de Janet** dans des systèmes de calcul formel (1990).

- "Nul n'est prophète en son pays" :

Riquier rend un vibrant hommage scientifique à Méray dans "Les systèmes d'équations aux dérivées partielles", Gauthier-Villars, 1910. Cependant :

> "**comme j'ai pu me convaincre d'ailleurs que son contenu [Mémoire de Méray 1880] est ignoré du public et des auteurs**, je crois devoir entrer à ce sujet dans quelques détails. . . "

Bibliographie

• C. Méray, **Démonstration générale de l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles**, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3$^{\text{ième}}$ série, tome VI, 1880, 235-265.

• C. Méray, C. Riquier, **Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles partielles**, Annales de l'Ecole Normale, 3$^{\text{ième}}$ série, tome 7, 1890, 23-88, `http ://www.numdam.org`.

• C. Méray, **Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques**, 1$^{\text{ière}}$ partie, 1894, `http ://gallica.bnf.fr`.

• C. Riquier, **Les systèmes d'équations aux dérivées partielles**, Gauthier-Villars, 1910.

• M. Janet, **Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles**, Cahiers scientifiques IV, Gauthier-Villars, 1929.

• J. Molk, **Equations aux dérivées partielles**, Encyclopédie des Sciences Pures et Appliquées, tome 2, 1916, édition Jacques Gabay, 1991.