THÉORIE ALGÉBRIQUE POUR LES SYSTÈMES DE DIMENSION INFINIE

H. MOUNIER, EN COLLABORATION AVEC J. RUDOLPH, AND F. WOITTENNEK

Résumé. Une théorie algébrique pour la commande des systèmes à paramètres répartis commandés aux bords est présentée. Le systèmes y sont représentés par des modules sur des anneaux d'opérateurs. Plusieurs propriétés de commandabilité, étendant celles précédemment élaborées pour les systèmes à retards, sont exposées.

Table des matières

1. Introduction

Une théorie algébrique pour la commande des systèmes à paramètres répartis commandés aux bords est présentée dans ce chapitre. Un système y est représenté par un module et les notions de commandabilités développées étendent la notion de π-liberté dégagée précédemment pour les systèmes à retards [FM98].

Le point de vue ici adopté trouve ses origines dans l'extension du cadre élaboré pour les systèmes à retards [FMRR96, AFM$^+$97, FM99, FMRR98a, FMRR98b]. Des exposés détaillés se trouvent dans [Rud03b, RWW03]. Une voie possible d'extension au cas non linéaire est réalisée en [LR00, OS01, Rud03b]. Une vue plus proche de l'analyse est développée en [LMR00, Lar00]. La dernière partie de ce document se fonde sur l'article [WM10].

Date: Juin/juillet 2015 – Mini cours L2S.

2. Motivations et méthodologie

Notre philosophie est guidée par deux attentions majeures : la première (*attention pratique*) est de dégager des propriétés structurelles qui surviennent fréquemment dans les applications. La deuxième (*attention de simplicité*), reliée à la première, consiste en l'obtention des propriétés les plus simples pour chaque classe d'applications. Ceci nous a conduit à la découverte d'une nouvelle notion, nommée π-liberté, qui permet de résoudre le suivi d'une trajectoire de référence selon le même cheminement que celui emprunté pour les systèmes non linéaires de dimension finie différentiellement plats.

3. Notion de liberté

Le lien entre la notion de liberté des modules et la commandabilité a d'abord été introduite pour les systèmes linéaires de dimension finie par Michel Fliess [Fli90], puis nous l'avons étendue aux systèmes à retards [Mou], [FM98], [Mou98], [FM01], [MR03] et aux systèmes à paramètres distribués [FM99], [MF04].

3.1. Critères classiques de commandabilité.

La vision classique de la commandabilité correspond en général à une accessibilité de l'espace d'état. Considérant un système de dimension finie mon-entrée Σ donné sous forme d'état comme suit

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + bu(t) \tag{1}$$

avec $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ l'état, $u(t)$ la commande, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. La *commandabilité* du système Σ peut s'exprimer de diverses manières toutes équivalentes. En voici quelques unes :

(1) *Accessibilité de l'espace d'état*
Pour tous états initial $\boldsymbol{x}_{\mathrm{ini}}$ et final $\boldsymbol{x}_{\mathrm{fin}}$ de $\mathbb{R}^n$, et tous temps initial t_{ini} et final t_{fin}, il existe une commande $u \in \mathcal{F}_u$, dans l'espace dit des *commandes admissibles* $\mathcal{F}_u$, amenant le système de l'état initial $\boldsymbol{x}(t_{\mathrm{ini}}) = \boldsymbol{x}_{\mathrm{ini}}$ à l'état final $\boldsymbol{x}(t_{\mathrm{fin}}) = \boldsymbol{x}_{\mathrm{fin}}$.

(2) *Critère de Kalman*
La matrice de commandabilité

$$\mathscr{C} = (b, Ab, \ldots, A^{n-1}b)$$

est de rang plein :

$$\mathrm{rk}\mathscr{C} = n$$

(3) *Critère de Hautus-Popov-Belevitch*

$$\forall s \in \mathbb{C}, \qquad \mathrm{rk}_{\mathbb{C}}[sI - A \mid b] = n$$

(4) *Forme canonique contrôleur*
Il existe un changement d'état $\boldsymbol{z} = F\boldsymbol{x}$, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tel que la représentation

de Σ devienne :

$$\dot{z}_1 = z_2 \tag{2a}$$
$$\dot{z}_2 = z_3 \tag{2b}$$
$$\vdots$$
$$\dot{z}_{n-1} = z_n \tag{2c}$$
$$\dot{z}_n = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_n z_n + \beta u \tag{2d}$$

Si, au lieu de vouloir imposer que l'état $\boldsymbol{x}$ aille de x_{ini} à x_{fin}, nous voulons amener une sortie y d'une valeur initiale à une valeur finale (sachant que le nombre de commandes est en général bien moindre que celui des états), nous pouvons avoir un bien meilleur contrôle sur l'évolution temporelle de y. Considérons z_1 comme sortie de la forme canonique contrôleur :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 & = z_2 \\ \dot{z}_2 & = z_3 \\ & \vdots \\ \dot{z}_{n-1} & = z_n \\ \dot{z}_n & = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_n z_n + \beta u \\ y & = z_1 \end{cases}$$

Alors, connaissant y, toute autre variable est déterminée

$$\begin{aligned} z_1 &= y \\ z_2 &= \dot{z}_1 \\ z_3 &= \ddot{z}_1 \\ &\vdots \\ z_n &= z_1^{(n-1)} \\ u &= -\frac{1}{\beta}\Big(\alpha_1 z_1(t) + \alpha_2 \dot{z}_1(t) + \ldots \alpha_n z_1^{(n-1)}(t) - z_1^{(n)}(t)\Big) \end{aligned}$$

Le modèle est alors différentiellement paramétrisé par y. En particulier, si l'on désire suivre une trajectoire $t \mapsto y_r(t)$ de y, la loi de commande en boucle ouverte assurant le suivi est donnée par :

$$u_r(t) = -\frac{1}{\beta}\Big(\alpha_1 y_r(t) + \ldots \alpha_n y_r^{(n-1)}(t) - y_r^{(n)}(t)\Big)$$

Remarques 3.1. (1) L'expression donnant u_r (de même que celles donnant les autres variables) ne recquière aucune intégration d'équation différentielle.

(2) Le concepteur est libre de choisir la trajectoire de référence qu'il souhaite, pour autant qu'elle soit différentiable jusqu'à l'ordre n.

(3) Cette étape en boucle ouverte, faisant une confiance aveugle en le modèle, suppose ce dernier parfait et suppose également que les conditions initiales sont parfaitement connues. Elle doit être en pratique complétée par une étape de stabilisation.

(4) La fonction de transfert correspondante a un numérateur constant :

$$\frac{\hat{y}}{\hat{u}} = \frac{\beta}{s^n - \alpha_n s^{n-1} - \ldots - \alpha_1}$$

indiquant que la dynamique du modèle inverse (d'entrée y et de sortie u) est triviale.

Exemple 3.1. Le modèle

$$M\ddot{y} + Ky = u$$

s'écrit sous forme d'espace d'état

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{M}\left(-Kx_1 + u\right) \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ u &= Ky + M\ddot{y} \end{aligned}$$

Et la commande en boucle ouverte assurant le suivi de $t \mapsto y_r(t)$ est

$$u_r = Ky_r + M\ddot{y}_r$$

3.2. **Système sans retard libre.** Nous allons généraliser ici de manière d'abord informelle, puis en termes précis, la forme canonique contrôleur précédente. La notion obtenue, que nous nommerons liberté, conserve cette essentielle propriété de paramétrisation.

Un modèle de dimension finie muni d'une entrée indépendante $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$ est dit *libre* (voir [Fli90] et l'annexe A.1 pour une définition précise) s'il existe

$$\boldsymbol{\omega}(t) = (\omega_1(t), \ldots, \omega_m(t))$$

que l'on nomme *base* (ou sortie basique), telle que :

(1) Elle fait partie du système (caractère *endogène*) :
les ω_i s'expriment comme combinaison linéaire des variables du système (par ex. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}$) et de leurs dérivées :

$$\omega_i = L\boldsymbol{x} + N_0\boldsymbol{u} + N_1 \tfrac{d}{dt}\boldsymbol{u} + \ldots + N_\alpha \tfrac{d^\alpha}{dt^\alpha}\boldsymbol{u}$$

$L \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $N_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $i = 0, \ldots, \alpha$.

(2) Ses composantes sont indépendantes (*indépendance*) :
Il n'existe aucune relation différentielle entre les ω_i :

$$M_0\boldsymbol{\omega} + M_1 \tfrac{d}{dt}\boldsymbol{\omega} + \ldots + M_\beta \tfrac{d^\beta}{dt^\beta}\boldsymbol{\omega} = 0 \quad \Longrightarrow \quad M_i = 0$$

$M_i \in \mathbb{R}^{q\times m}$, $i = 0, \ldots \beta$.

(3) Elle fournit une paramétrisation complète du système (*forme canonique de suivi*) :

$$\boldsymbol{x} = P_0\boldsymbol{\omega} + P_1 \tfrac{d}{dt}\boldsymbol{\omega} + \ldots + P_\gamma \tfrac{d^\gamma}{dt^\gamma}\boldsymbol{\omega} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u} = Q_0\boldsymbol{\omega} + Q_1 \tfrac{d}{dt}\boldsymbol{\omega} + \ldots + Q_\mu \tfrac{d^\mu}{dt^\mu}\boldsymbol{\omega} \tag{4}$$

$P_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $Q_j \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $i = 0, \ldots, \gamma$, $j = 0, \ldots, \mu$,

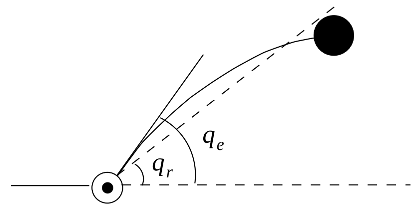

FIGURE 1. Premier mode souple d'un bras de robot.

La dernière propriété, et plus spécialement l'équation (4) fournit une solution simple et naturelle au suivi de la sortie $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\omega}$.

Remarque 3.1. Les deux dernières propriétés (indépendance et paramétrisation du système) sont en correspondance directe avec les propriétés caractéristiques d'une base d'un espace vectoriel (ensemble maximalement indépendant et minimalement générateur).

3.3. **Exemple de système libre.** Considérons un modèle du premier mode souple d'un bras de robot à un degré de liberté, actionné par un moteur. Notons :
— q_r le déplacement rigide,
— q_e le premier mode du déplacement élastique (par rapport au déplacement rigide),
— u le couple moteur actionnant le bras.

Le bilan des couples donne :

$$\begin{pmatrix} J_{rr} & J_{re} \\ J_{er} & J_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ K_e q_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$$

où J_{xy} sont des inerties équivalentes et K_e une raideur élastique. Les équations du système sont :

$$J_{rr}\ddot{q}_r + J_{re}\ddot{q}_e = u \tag{5a}$$

$$J_{er}\ddot{q}_r + J_{ee}\ddot{q}_e = -K_e q_e \tag{5b}$$

Ce système est libre, de base

$$\omega = J_{er}q_r + J_{ee}q_e$$

En effet, le premier membre de l'équation (5b) est la dérivée seconde de ω :

$$\ddot{\omega} = -K_e q_e \quad \text{ou encore} \quad q_e = -\frac{1}{K_e}\,\ddot{\omega}$$

puis, nous obtenons

$$q_r = \frac{1}{J_{er}}\,(\omega - J_{ee}q_e)$$

Et, finalement

$$q_r = \frac{1}{J_{er}}\,\omega - \frac{J_{ee}}{K_e J_{er}}\,\ddot{\omega} \tag{6a}$$

$$q_e = -\frac{1}{K_e}\,\ddot{\omega} \tag{6b}$$

$$u = \frac{J_{rr}}{J_{er}}\,\ddot{\omega} + \frac{1}{K_e}\left(\frac{J_{rr}J_{ee}}{J_{er}} - J_{re}\right)\omega^{(4)} \tag{6c}$$

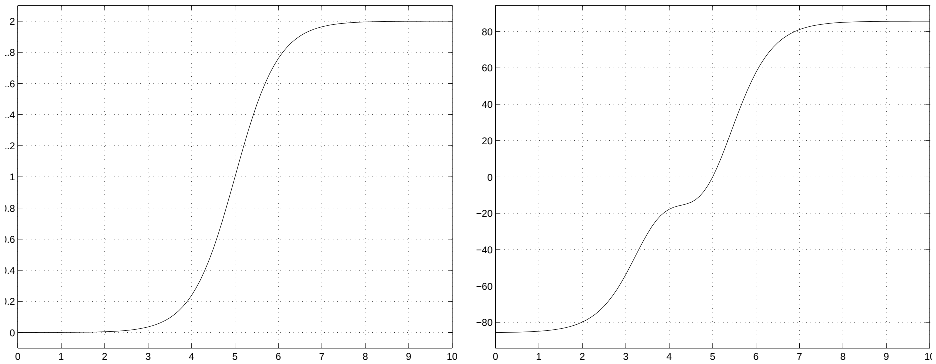

FIGURE 2. Trajectoire de référence $t \mapsto \omega_r(t)$ (à gauche) et commande en boucle ouverte u_r (à droite).

Se donnant une trajectoire de référence $t \mapsto \omega_r(t)$, la dernière formule nous fournit une loi en boucle ouverte assurant un suivi exact sous l'hypothèse d'un modèle parfait et de conditions initiales connues. Pour une trajectoire désirée d'allure décrite en figure 2 à gauche, nous obtenons la loi en boucle ouverte illustrée à droite. Les systèmes linéaires sont, dans notre approche, modélisés par des structures linéaires analogues aux espaces vectoriels : des modules (diverses notions d'algèbre sont rappelées en annexe A, p. 26). Les axiomes de définition sont les mêmes pour les deux structures, mais les coefficients d'un espace vectoriel sont pris dans un corps, tel $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors que ceux d'un module sont pris dans un anneau. Pour les systèmes sans retards, cet anneau sera celui des polynômes différentiels $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$; pour les systèmes à retards, l'anneau sera $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta}]$ où $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_r)$, chaque δ_i étant un opérateur retard tel que, pour tout f, $(\delta_i f)(t) = f(t-h_i)$, où h_i est un réel positif, l'amplitude du retard ; pour des systèmes modélisés par des EDPs, les anneaux seront adaptés au système étudié.

Cette augmentation du nombre d'indéterminées dans l'anneau des opérateurs entraîne une bien plus grande complexité des modules associés, ce qui se retrouve dans les propriétés de commandabilité.

3.4. R-système, entrée.

Définitions 3.1. Soit R un anneau commutatif[1], unifère et sans diviseurs de zéros.

— Un *R-système* Λ, ou un *système sur* R est un R-module.
— Une *R-dynamique*, ou une *dynamique sur* R, est un R-système Λ équippé d'une *entrée*, c.à.d., un sous-ensemble $\boldsymbol{u}$ de Λ tel que le R-module quotient $\Lambda/[\boldsymbol{u}]$ est de torsion.
— L'entrée $\boldsymbol{u}$ est *indépendante* si le R-module $[\boldsymbol{u}]$ est libre, de base $\boldsymbol{u}$.
— Une *sortie* $\boldsymbol{y}$ est un sous ensemble de Λ.
— Soit A une R-algèbre et Λ un R-système. Le A-module $A \otimes_R \Lambda$ est un A-système, qui *étend* Λ.

Remarques 3.2. (1) Pour un système de dimension finie, $R = k[\frac{d}{dt}]$ avec $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour un système à retards, $R = k[\frac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta}]$, avec $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_r)$, les δ_i

1. On se restreint ici au cas commutatif. Pour le cas non commutatif, voir [Fli89, Rud03a] pour certaines extensions.

étant des opérateurs retards algébriquement indépendants (c.à.d. les amplitudes des différents retards sont indépendantes sur $\mathbb{Q}$). On parle également d'incommensurabilité dans la littérature.

(2) En termes informels, un système d'équation

$$a\,y = b\,u$$

où $a, b \in R = \mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$ ou $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$ sera représenté par une structure linéaire formée de toutes les combinaisons linéaires de y, u et de leurs dérivées, telles que la relation ci-dessus soit satisfaite

$$\Lambda = \left\{ p\,y + q\,u \;\middle|\; p, q \in R,\ a\,x = b\,u \right\}$$

(3) Dans les mêmes termes informels, une entrée $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ est telle que toute variable z du système satisfait une relation de la forme :

$$p\,z = \sum_{i=1}^{m} q_i\,u_i$$

où p, $q_i \in R$, $p \neq 0$.

3.5. Cas des systèmes à retards.

Définition 3.1. Un *système linéaire stationnaire à retards* Λ est un $k[\frac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta}]$-module finiment engendré.

Cette définition appelle quelques commentaires. Tout d'abord, un module finiment engendré sur $k[\frac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta}]$ est entièrement déterminé par la donnée de générateurs et d'un ensemble de relations (ce dernier constituant lui-même un module) vérifiées par ces derniers. Le module est alors dit donné par *générateurs et relations* (voir l'annexe A.2, p. 27 ou [Eis95, 0.3 p. 17] pour une définition précise). Nous disposons donc de générateurs, $\Lambda = [w_1, \ldots, w_\alpha] = [\boldsymbol{w}]$ et de relations,

$$P_\Lambda(\tfrac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta})\,\boldsymbol{w} = 0$$

où $P_\Lambda \in k[\frac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta}]^{\beta\times\alpha}$ et $\mathrm{rg}_{k[\frac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta}]} P_\Lambda = \beta$.

Ici P_Λ se nomme une *matrice de présentation*[2] de Λ. Remarquons que cette matrice n'est pas unique.

Exemple 3.2. Prenons comme exemple le système d'équation

$$\dot{y}(t) - y(t) = u(t-1)$$

Soient $[U, Y]$ le $k[\frac{d}{dt}, \delta]$-module libre engendré par U et Y et $[E] = [\dot{Y} - Y - \delta U]$ un sous-module libre de $[U, Y]$. Posons alors $[u, y] = [U, Y]/[E]$; le système considéré est représenté par le module

$$\Lambda = [u, y]$$

avec comme relation

$$\dot{y} - y = \delta u$$

qui peut alors s'écrire :

$$\begin{bmatrix} -\delta \mid \frac{d}{dt} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} = 0$$

2. De manière rigoureuse, la matrice de présentation est P_Λ^T. Nous conserverons dans la suite cet abus de langage commode.

avec comme matrice de présentation

$$P_\Lambda(\tfrac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta}) = \left[\, -\delta \mid \tfrac{d}{dt} - 1 \,\right]$$

4. Notions de commandabilité

4.1. **Sans torsion, liberté, projectivité.** Explicitons une notion importante pour l'étude de la commandabilité : celle de torsion (voir également l'annexe A.1, p. 26). Considérons un système linéaire (sans retards) Σ, modélisé par un module sur l'anneau $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$. Un élément w de Σ est dit *de torsion* s'il existe un polynôme non nul p de $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$ tel que

$$p(\tfrac{d}{dt})\, w = 0$$

Notons que ce phénomène ne peut se produire de manière non triviale dans un espace vectoriel ; en effet une relation de la forme $pw = 0$ dans un espace vectoriel implique $w = 0$, puisque p est inversible en tant qu'élément d'un corps. Un élément de torsion de Σ satisfait une équation différentielle à coefficients dans $\mathbb{R}$. Un module dont tous les éléments sont de torsion est dit *de torsion*. A l'inverse, un module dont aucun élément n'est de torsion est dit *sans torsion*. L'abscence de torsion signifie qu'il n'y a pas de variable satisfaisant à une équation (différentielle, différentielle aux différences, ..., selon l'anneau R) autonome, c.à.d. non influencée par l'entrée.

La liberté, notion en général différente de la précédente, signifie qu'il existe m (où m désigne le nombre d'entrées indépendantes) variables fournissant une paramétrisation complète du système.

Une notion supplémentaire est celle de projectivité (voir l'annexe A.1, p. 26).

Définition 4.1. Un R-système Λ est dit *R-commandable sans torsion* (resp. *R-commandable projectif*, *R-commandable libre*) si le R-module Λ est sans torsion (resp. projectif, libre).

Quelques considérations classiques d'algèbre homologique (voir, par exemple, [Rot79]) conduisent au résultat suivant.

Proposition 4.1. *La R-commandabilité libre (resp. R-commandabilité projective) implique la R-commandabilité projective (resp. R-commandabilité sans torsion).*

4.2. **Critères de liberté et d'absence de torsion sur un anneau polynomial.** Nous considérerons, tout au long de cette section un anneau R d'opérateurs qui est un anneau de polynômes du type $k[\boldsymbol{\xi}]$ où $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \dots, \xi_r\}$ et $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Critère de liberté. Notons que, sur $k[\boldsymbol{\xi}]$, les deux notions de commandabilité projective et commandabilité libre coïncident ; ceci constitue l'un des énoncés de la résolution de la "conjecture de Serre" ([Qui76], [Sus76]).

Proposition 4.2 (Quillen, Suslin)**.** *Un $k[\boldsymbol{\xi}]$-système est $k[\boldsymbol{\xi}]$-commandable libre si, et seulement s'il est $k[\boldsymbol{\xi}]$-commandable projectif.*

Cette proposition permet d'obtenir le critère suivant, où $\bar{k}$ désigne la *clôture algébrique*[3] de k :

Proposition 4.3. *Un $k[\boldsymbol{\xi}]$-système Λ est $k[\boldsymbol{\xi}]$-commandable libre si, et seulement si*

$$\forall (s_1, \dots, s_r) \in \bar{k}^r, \quad rg_{\bar{k}} P_\Lambda(s_1, \dots, s_r) = \beta$$

3. Le corps contenant toutes les racines d'équations polynomiales à coefficients dans k.

Ici β désigne le rang générique de la matrice de présentation P_Λ, c.à.d. $rg_{k[\boldsymbol{\xi}]}P_\Lambda$. Ce critère de rang équivaut à l'absence de zéros communs dans $\bar{k}^r$ des mineurs d'ordre β de P_Λ.

Démonstration. Indiquons simplement comment déduire le présent critère du résultat de Quillen et Suslin (proposition précédente). Il y a équivalence, pour le $k[\boldsymbol{\xi}]$-module Λ, entre projectivité et égalité à $k[\boldsymbol{\xi}]$ de l'idéal de Fitting $\mathfrak{I}$ engendré par les mineurs d'ordre β de P_Λ (voir [Eis95, proposition 20.8 p. 495])

D'après le Nullstellensatz de Hilbert (voir par exemple [Mat90] ou [Eis95, corollaire 1.7 p. 34]) $\mathfrak{I} = k[\boldsymbol{\xi}]$ équivaut à ne pas avoir de zéros communs dans $\bar{k}$ entre les mineurs d'ordre β de P_Λ, ou encore :

$$\forall (s_1, \dots, s_r) \in \bar{k}^r, \quad \mathrm{rg}_{\bar{k}} P_\Lambda(s_1, \dots, s_r) = \beta$$

c'est-à-dire aucune chute de rang de la matrice de présentation, ce rang étant partout égal au rang générique $\mathrm{rg}_{k[\boldsymbol{\xi}]}P_\Lambda$. □

Critère d'absence de torsion. Nous allons maintenant énoncer un critère de $k[\boldsymbol{\xi}]$-commandabilité sans torsion.

Proposition 4.4. *Un $k[\boldsymbol{\xi}]$-système Λ est $k[\boldsymbol{\xi}]$-commandable sans torsion si, et seulement si les mineurs $\beta \times \beta$ de P_Λ sont premiers[4] entre eux.*

Démonstration. Ce critère découle directement d'une proposition de [YG79]. Elle établit que les mineurs $\beta \times \beta$ de P_Λ sont premiers entre eux si, et seulement si pour tout i dans $\{0, \dots, r\}$, il existe des matrices Q_i à coefficients dans $k[\boldsymbol{\xi}]$ telles que :

$$P_\Lambda Q_i = \psi_i I_\beta$$

où ψ_i est un polynôme de $k[\boldsymbol{\xi}]$ indépendant de la variable d'indice i.

L'équation $P_\Lambda Q_0 = \psi_0 I_\beta$ exprime la liberté de $\Lambda_0 \triangleq k(\xi_2, \dots, \xi_r)[\xi_1] \otimes_{k[\boldsymbol{\xi}]} \Lambda$, l'équation $P_\Lambda Q_1 = \psi_1 I_\beta$ celle de $\Lambda_1 \triangleq k(\xi_1, \xi_3, \dots, \xi_r)[\xi_2] \otimes_{k[\boldsymbol{\xi}]} \Lambda$ et ainsi de suite jusqu'à $P_\Lambda Q_r = \psi_r I_\beta$ exprimant la liberté de $\Lambda_r \triangleq k(\xi_1, \dots, \xi_{r-1})[\xi_r] \otimes_{k[\boldsymbol{\xi}]} \Lambda$. Tous les anneaux qui viennent d'être cités étant principaux, la liberté des Λ_i équivaut à leur caractère sans torsion. Et de manière évidente, Λ est sans torsion si, et seulement si chacun des Λ_i l'est. Plus précisément, lorsqu'un élément w d'un $k[\boldsymbol{\xi}]$-module est de torsion, il existe un polynôme p de $k[\boldsymbol{\xi}]$ non nul et non inversible (c'est-à-dire non constant), tel que $p(\boldsymbol{\xi})\, w = 0$. Or p peut-être considéré comme un polynôme en ξ_1 à coefficients dans $k[\xi_2, \dots, \xi_r]$, comme polynôme en ξ_2 à coefficients dans $k[\xi_1, \xi_3, \dots, \xi_r]$ et ainsi de suite ; puisque p n'est pas constant, il sera nécessairement non inversible dans l'un des anneaux $k(\xi_2, \dots, \xi_r)[\xi_1]$, $k(\xi_1, \xi_3, \dots, \xi_r)[\xi_2]$, $\dots$, $k(\xi_1, \dots, \xi_{r-1})[\xi_r]$. □

4.3. **π-liberté.** Afin de recouvrer les avantages de la liberté pour un système qui n'est que sans torsion, nous disposons du résultat suivant, qui découle directement d'une proposition de [Row91].

Thèorème et définition 4.1. *Soit R un anneau, M un R-module finiment présenté et $\mathcal{S}$ une partie multiplicative de R. Supposons que $\mathcal{S}^{-1}M$ (le localisé de M en $\mathcal{S}$) soit un $\mathcal{S}^{-1}R$-module libre. Alors il existe un π dans S tel que $R[\pi^{-1}] \otimes_R M$*

4. Premiers entre eux signifiant que leur PGCD est un élément de k.

est[5] *un* $R[\pi^{-1}]$*-module libre avec une base de même taille que celle de* $\mathcal{S}^{-1}M$ *sur* $\mathcal{S}^{-1}R$*.*

Un tel R-système est dit π-libre *(ou* π-commandable libre*) et toute base du module* $R[\pi^{-1}] \otimes_R M$ *est nommée une* π-base*.*

Exemples 4.1. (1) Le système $\dot{y} = (1+\delta)u$ n'est pas $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$-commandable libre, mais il est $(1+\delta)$-libre. En effet, on a $u = (1+\delta^{-1})\frac{d}{dt}\, y$

(2) Le système d'équation $\dot{y} = \delta u$ n'est pas $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$-commandable libre, mais il est δ-libre.

4.4. **Cas des systèmes à retards.** L'unicité de la commandabilité de Kalman en dimension finie est perdue dans le cas avec retards. De multiples généralisations ont vu le jour dans la littérature, sans que les liens soient toujours explicites. Une explication possible de ce phénomène est la complexification de l'anneau des opérateurs R évoquée en sous-section précédente.

Pour les systèmes de dimension finie, c.à.d. sur $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$, l'absence de torsion et la liberté se confondent. Pour les systèmes à retards, c.à.d. sur $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta}]$, la situation est plus complexe, la liberté étant en particulier plus forte que le caractère sans torsion.

Exemples 4.2. (1) Le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \delta x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \delta u \end{aligned}$$

n'est pas $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$-sans torsion, puisque x_1 est un élément de torsion.

(2) Le système $\dot{y} = (1+\delta)u$ est $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$-commandable sans torsion, mais non $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$-commandable libre.

(3) Le système $\dot{y} + \delta y = u$ est $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$-commandable libre, de base y.

5. Des systèmes à retards aux systèmes à paramètres distribués

5.1. **Exemple d'une équation des ondes.** Un exemple de système régi par une équation aux dérivées partielles est celui d'une barre flexible en torsion avec un couple appliqué à l'une de ses extrémités (voir [MRR97]), et une charge J est attachée à l'autre. Les équations du modèle suivent celles d'une équation des ondes unidimensionnelle. La commande est le couple appliqué à l'une des extrémités, un couple de réaction dû à la charge agissant à l'autre :

$$\sigma^2 \partial_\tau^2 q(\tau, z) = \partial_z^2 q(\tau, z) \tag{7a}$$

$$\partial_z q(\tau, 0) = -u(\tau), \qquad \partial_z q(\tau, L) = -J\partial_\tau^2 q(\tau, L) \tag{7b}$$

$$q(0, z) = 0, \qquad \partial_\tau q(0, z) = 0 \tag{7c}$$

Ici, $q(\tau, z)$ désigne le déplacement angulaire de la position au repos au point $z \in [0, L]$ et au temps $\tau \geqslant 0$; L est la longueur de la barre, σ est l'inverse de la vitesse de propagation des ondes, J le moment d'inertie de la charge, u le couple de commande.

5. La notation $R[\pi^{-1}]$ désigne le localisé de R en $\widetilde{\mathcal{S}} = \{\pi^i \mid i \in \mathbb{N}\}$, qui se note de manière précise $\widetilde{\mathcal{S}}^{-1}R = \{\pi^i \mid i \in \mathbb{N}\}^{-1}R$.

5.2. **Modèle à retards.** Il est bien connu (voir [CH37]), que la solution générale de (7a) peut s'écrire sous la forme d'ondes progressive et rétrograde

$$q(\tau, z) = \phi(\tau + \sigma z) \; + \; \psi(\tau - \sigma z)$$

où ϕ et ψ désignent des fonctions d'une variable réelle arbitraire. Posant $\xi = \tau + \sigma z$, $\eta = \tau - \sigma z$, les conditions aux bords (7b) s'écrivent

$$\phi'(\tau) - \psi'(\tau) = -\frac{u(\tau)}{\sigma}$$
$$\phi'(\tau + T) - \psi'(\tau - T) = -\frac{J}{\sigma}\Big(\phi''(\tau + T) - \psi''(\tau - T)\Big)$$

où $T = \sigma L$. L'objectif de commande sera d'assigner une trajectoire $\tau \mapsto y(\tau) = q(\tau, L)$ (prescrite à l'avance) à la position angulaire de la charge ; la sortie est donc

$$y(\tau) = q(\tau, L)$$

Alors, considérant ϕ et ψ comme des fonctions du temps τ, on obtient

$$\phi(\tau + T) + \psi(\tau - T) = y(\tau) \tag{8a}$$
$$\phi'(\tau) - \psi'(\tau) = -\frac{1}{\sigma}u(\tau) \tag{8b}$$
$$\phi'(\tau + T) - \psi'(\tau - T) = -\frac{J}{\sigma}y''(\tau) \tag{8c}$$

D'après (8a) il vient $\phi(\tau) = y(\tau - T) - \psi(\tau - 2T)$ ce qui conduit à

$$y'(\tau - T) - \psi'(\tau) - \psi'(\tau - 2T) = -\frac{1}{\sigma}u(\tau)$$
$$y'(\tau) - 2\psi'(\tau - T) = -\frac{J}{\sigma}y''(\tau)$$

L'élimination de ψ' donne

$$\frac{2}{\sigma}u(\tau - T) = \frac{J}{\sigma}\big(y''(\tau) + y''(\tau - 2T)\big) + y'(\tau) - y'(\tau - 2T)$$

Opérant le changement de temps $t = \kappa\tau$, avec κ constant, on obtient $y'(\tau) = \frac{dy}{d\tau}(\tau) = \kappa\frac{dy}{dt}(t) = \kappa\dot{y}(t)$ et

$$\frac{2}{\sigma\kappa}u(t - T) = \frac{J\kappa}{\sigma}\big(\ddot{y}(t) + \ddot{y}(t - 2T)\big) + \dot{y}(t) - \dot{y}(t - 2T) \tag{9}$$

Puis, posant $\kappa = \sigma/J$ et $v(t) = (2/\sigma\kappa)u(t)$, on obtient le système à retards suivant :

$$\ddot{y}(t) + \ddot{y}(t - 2T) + \dot{y}(t) - \dot{y}(t - 2T) = v(t - T) \tag{10}$$

Nous voyons sur l'équation ci-dessus qu'il suffit d'inverser l'opérateur de retard (c'est-à-dire s'autoriser des avances) pour obtenir un système libre :

$$v(t) = \ddot{y}(t + T) + \ddot{y}(t - T) + \dot{y}(t + T) - \dot{y}(t - T)$$

Ce système est δ_T-libre, de δ_T-base y (où δ_T, l'opérateur retard d'amplitude T est celui qu'on a inversé). On écrit ceci de la manière formelle suivante :

$$v = (\delta_T^{-1} + \delta_T)\ddot{y} + (\delta_T^{-1} - \delta_T)\dot{y}$$

Pour une trajectoire de référence $t \mapsto y_r(t)$ de la forme décrite en figure 3 à gauche, on obtient une loi de commande en boucle ouverte $u_r(t)$ reproduite en figure 3 à droite.

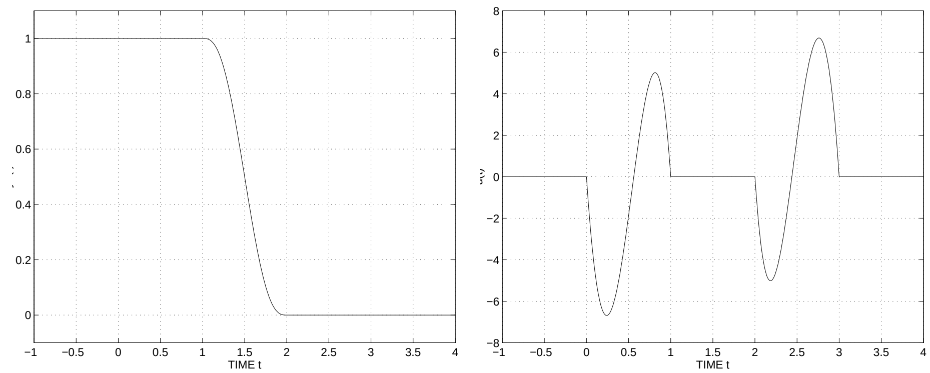

FIGURE 3. Trajectoire de référence $t \mapsto y_r(t)$ (à gauche) et commande en boucle ouverte u_r.

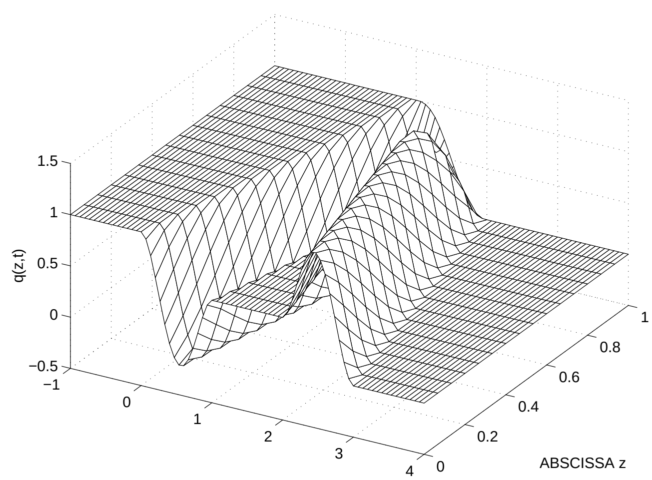

FIGURE 4. Déplacements en boucle ouverte $q_r(z,t)$.

Il est intéressant de remarquer que le déplacement des autres points de la barre s'obtient par

$$q_r(z,t) = \frac{1}{2}\left[y_r(t-z+T) + \dot{y}_r(t-z+T) + y_r(t-T+z) - \dot{y}_r(t-T+z)\right]$$

ou encore, formellement

$$q_r = \frac{1}{2}\left[\delta_{z-T}\, y_r + \delta_{z-T}\, \dot{y}_r + \delta_{T-z}\, y_r - \delta_{T-z}\, \dot{y}_r\right]$$

Ces déplacements sont reproduits en figure 4.

6. Généralisation de paramétrisation à d'autres systèmes à paramètres répartis : exemple de l'équation de la chaleur

Un système à paramètres distribués est composé d'une (ou plusieurs) équation(s) reliant les dérivées d'espace à celle de temps, ainsi que diverses conditions aux bords, incluant généralement les commandes. Nous verrons, comme dans le cas de la section précédente, qu'il est bon d'élargir la notion de paramétrisation reliée à la liberté.

Nous considérerons d'abord l'un des exemples mathématiquement les plus simples, l'équation de la chaleur unidimensionnelle, ce qui permettra de ne pas alourdir l'exposé par des calculs fastidieux.

6.1. **Liberté pour l'équation de la chaleur.** Considérons le système d'équations suivant :

$$\partial_x^2 w(x,t) = \partial_t w(x,t), \quad x \in [0,1],\ t \in [0,+\infty[\tag{11a}$$

$$\partial_x w(0,t) = 0 \tag{11b}$$

$$w(1,t) = u(t) \tag{11c}$$

Ces équations décrivent un processus de diffusion de chaleur dans une barre de longueur unité, $w(x,t)$ désignant la température de la barre à l'abscisse x et à l'instant t. La première des conditions aux limites indique qu'il n'y a pas de flux de chaleur en $x = 0$; la deuxième que la température est fixée par la commande $u(t)$ en $x = 1$.

Deux cadres opérationnels sont notamment possibles, développés respectivement par Miksiński et par Komatsu. Mikusiński [Mik59] utilise des anneaux de fonctions continues munis du produit de convolution ; Komatsu [Kom96] se sert de transformées de Laplace d'hyperfonctions et d'ultradistributions Gevrey. Ces cadres sont reliés aux techniques de resommation développées par Écalle [É92], Ramis [Ram93], Balser [Bal01], [Bal04], . . .

6.1.1. *Perspective Symbolique. Obtention de premières relations.* Considérons la transformée de Laplace temporelle, ou bien l'équation opérationnelle de Mikusiński associée à l'équation (11a) :

$$s\widehat{w}(x,s) = \partial_x^2 \widehat{w}(x,s)$$

et considérons cette équation à s fixé ; nous obtenons l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d^2 \widehat{w}}{dx^2}(x,s) - s\widehat{w}(x,s) = 0 \tag{12}$$

L'équation caractéristique associée à (12) s'écrit

$$\zeta^2 - s = 0, \quad \text{c.à.d.} \quad \zeta = \pm\sqrt{s}$$

La solution générale de (11a) peut alors se mettre sous la forme

$$\widehat{w}(x,s) = e^{x\sqrt{s}}\lambda_1(s) + e^{-x\sqrt{s}}\lambda_2(s)$$

ou bien

$$\widehat{w}(x,s) = \cosh(x\sqrt{s})\lambda_1(s) + \frac{\sinh(x\sqrt{s})}{\sqrt{s}}\lambda_2(s) \tag{13}$$

La deuxième forme est préférable, les dérivées des solutions fondamentales étant reliées de manière agréable. En effet, notant

$$C_x = \cosh(x\sqrt{s}), \quad S_x = \frac{\sinh(x\sqrt{s})}{\sqrt{s}}$$

nous disposons des relations, désignant la dérivation spatiale par un prime :

$$\partial_x C_x = C'_x = sS_x$$
$$\partial_x S_x = S'_x = C_x$$

Nous pouvons déduire de ce qui précède les formes générales de la solution et de la première dérivée spatiale

$$\widehat{w}(x,s) = C_x\lambda_1(s) + S_x\lambda_2(s)$$
$$\partial_x\widehat{w}(x,s) = sS_x\lambda_1(s) + C_x\lambda_2(s)$$

Les conditions aux limites (11b) et (11c) donnent alors successivement

$$\lambda_2(s) = 0 \qquad (\partial_x\widehat{w}(0,s) = 0)$$
$$C_1\lambda_1(s) = \widehat{u}(s)$$

et nous obtenons l'équation

$$\cosh(\sqrt{s})\,\widehat{w}(x,s) = \cosh(x\sqrt{s})\,\widehat{u}(s)$$

ou encore

$$C_1\,\widehat{w}(x) = C_x\,\widehat{u}$$

Paramétrisation. Introduisant une nouvelle variable

$$\omega(t) = w(0,t)$$

Ayant

$$\widehat{w}(x) = C_x\lambda_1 + S_x\lambda_2$$

Nous avons donc :

$$\lambda_2 = 0$$
$$C_1\lambda_1 = \widehat{u}$$
$$\lambda_1 = \widehat{\omega}$$

et

$$\widehat{u} = C_1\widehat{\omega} \tag{14a}$$
$$\widehat{w}(x) = C_x\widehat{\omega} \tag{14b}$$

On recouvre une paramétrisation en termes de $\widehat{\omega}$ qui, dans le cadre de modules sur un anneau approprié, pourra correspondre à la liberté.

Expression dans le domaine temporel. Écrivons formellement

$$\cosh(\sqrt{s}) = \sum_{i\geqslant 0}\frac{s^i}{(2i)!}$$

nous obtenons, dans le domaine temporel :

$$w(x,t) = \sum_{i\geqslant 0}\frac{x^{2i}}{(2i)!}\,\omega^{(i)}(t)$$
$$u(t) = \sum_{i\geqslant 0}\frac{1}{(2i)!}\,\omega^{(i)}(t)$$

Ces séries ont été écrites dans l'anneau des séries formelles $k[[\frac{d}{dt}]]$.

Remarque 6.1. Notons au passage que l'anneau $k[[\frac{d}{dt}]]$ est doté de très agréables propriétés algébriques : c'est un anneau principal (tout idéal y est principal, c.à.d. engendré par un unique élément ; sur la notion d'idéal, le lecteur pourra se reporter à l'annexe A.3, p. 27). Les notions d'absence de torsion (cf. annexe A.1, p. 26), de projectivité (cf. annexe A.7, p. 28) et de liberté y coïncident, tout comme sur $k[\frac{d}{dt}]$ (anneau des systèmes de dimension finie). Remarquons également que $k[\frac{d}{dt}^{-1}][[\frac{d}{dt}]]$ est un corps. Ceci étant, rien ne garantit que les séries formelles mises en jeu soient convergentes.

Il est possible de donner un sens relativement général à ces séries en discutant de leur convergence (voir l'annexe B.1, p. 30).

6.1.2. *Perspective temporelle.* Une vue légèrement différente repose sur le théorème classique de Cauchy-Kovaleski. Le système

$$\partial_x^2 w(x,t) = \partial_t w(x,t), \qquad x \in [0,1], t \in [0,\infty[\tag{15a}$$

$$\partial_x w(0,t) = 0 \tag{15b}$$

$$w(0,t) = \omega(t) \tag{15c}$$

est effectivement sous forme de Cauchy-Kovaleski, nous permettant de chercher une solution formelle sous forme analytique

$$w(x,t) = \sum_{i\geqslant 0} a_i(t)\frac{x^i}{i!}$$

où les a_i sont des fonctions indéfiniment dérivables. Une verification formelle, utilisant (15), mène à

$$\begin{aligned} a_{i+2}(t) &= \dot{a}_i(t), \quad i \geqslant 0 \\ a_1(t) &= 0 \\ a_0(t) &= \omega(t) \end{aligned}$$

D'où, pour $i \geqslant 0$

$$\begin{aligned} a_{2i}(t) &= \omega^{(i)}(t) \\ a_{2i+1}(t) &= 0 \end{aligned}$$

de sorte que nous retrouvons

$$w(x,t) = \sum_{i\geqslant 0} \frac{x^{2i}}{(2i)!}\,\omega^{(i)}(t) \tag{16a}$$

$$u(t) = \sum_{i\geqslant 0} \frac{\omega^{(i)}(t)}{(2i)!} \tag{16b}$$

6.2. **Paramétrisation pour d'autres conditions aux limites.** Considérons toujours l'équation de la chaleur, mais avec cette fois des conditions aux limites de Dirichlet :

$$\partial_x^2 w(x,t) = \partial_t w(x,t), \quad x \in [0,1], \ t \in [0,+\infty[\tag{17a}$$

$$w(0,t) = 0 \tag{17b}$$

$$w(1,t) = u(t) \tag{17c}$$

La solution générale et sa dérivée spatiale s'expriment de la même manière :

$$\begin{aligned}\widehat{w}(x) &= C_x\lambda_1 + S_x\lambda_2\\ \partial_x\widehat{w}(x) &= sS_x\lambda_1 + C_x\lambda_2\end{aligned}$$

Seules les conditions aux limites se trouvent modifiées :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0 \quad (\widehat{w}(0)=0)\\ S_1\lambda_2 &= \widehat{u}\end{aligned}$$

et la solution générale s'exprime comme

$$\widehat{w}(x) = S_x\lambda_2$$

Ainsi λ_2 apparaît comme le paramètre libre pouvant jouer le rôle d'une base. Remarquons que l'on a

$$\partial_x\widehat{w}(x) = sS_x\lambda_1 + C_x\lambda_2 = C_x\lambda_2$$

ce qui permet d'obtenir

$$\lambda_2 = \partial_x\widehat{w}(0)$$

Et $\partial_x\widehat{w}(0)$ peut jouer le rôle d'une base d'un module sur un anneau approprié.

Le système correspondant aux équations (17) doit alors contenir non seulement chacun des $\widehat{w}(x)$ pour $x \in [0,1]$, mais également toutes ses dérivées temporelles et spatiales.

Les divers exemples examinés nous ont menés à des structures linéaires sur des anneaux. Nous allons maintenant discuter des structures d'anneaux appropriés.

7. Calcul opérationnel utilisé

Nous utiliserons comme calcul opérationnel la transformation de Laplace des ultradistributions. Commençons par rappeler quelques éléments sur ces fonctions généralisées.

7.1. **Bref panorama de classes de fonctions et d'opérateurs.** Parmi les plus importantes classes de fonctions (généralisées ou non), on compte, du plus au moins régulier, en mettant le nom des protagonistes les plus marquants :

$\mathcal{O}$	Fonctions holomorphes	Cauchy
$\mathcal{A}$	Fonctions analytiques réelles	Martineau
$\mathcal{E}^{(\rho)}$	Fonctions ultradifférentiables Gevrey de Beurling	
$\mathcal{E}^{\{\rho\}}$	Fonctions ultradifférentiables Gevrey de Roumieu	Gevrey
$\mathcal{D}$	Fonctions indéfiniment différentiables à support compact	
$\mathcal{S}$	Fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide	
$\mathcal{E}$	Fonctions indéfiniment différentiables	Borel, Whitney
C^n	Fonctions n fois différentiables	Cauchy
C	Fonctions continues	Cauchy
L^p	Fonctions p fois sommables	Riesz
L^1	Fonctions sommables	Riesz
M^1	Mesures complexes	Riesz, Kakutani
$\mathcal{E}'$	Distributions à support compact	Schwartz
$\mathcal{S}'$	Distributions tempérées	Schwartz
$\mathcal{D}'$	Distributions	Schwartz
$\mathcal{E}'^{\{\rho\}}$	Ultradistributions de Roumieu	Roumieu

$\mathcal{E}'^{(\rho)}$	Ultradistributions de Beurling	Beurling
$\mathcal{B}$	Hyperfonctions	Sato
$\mathcal{O}'$	Fonctionnelles analytiques	Frantappié, Martineau

Parmi toutes ces classes, la plus générale est celle des fonctionnelles analytiques. Malheureusement, elle manque d'un minimum de structure algébrique, en ce sens que $\mathcal{O}'(\Omega)$, l'ensemble de telles fonctionnelles définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ ne constitue pas un faisceau ; ce dernier fait interdit de définir la notion de support pour ces fonctionnelles. C'est donc la classe des hyperfonctions, que l'on peut identifier au dual de $\mathcal{A}$, qui est, au sens de la classification précédente, la plus générale tout en conservant un minimum de propriétés algébriques agréables (voir [Kom91]).

7.2. **Ultradistributions.** Étant donné un entier positif n, considérons le multi-indice $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ d'entiers positifs, on note $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ et $\boldsymbol{\alpha}! = \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!$. Pour une fonction à valeurs complexe f indéfiniment différentiable définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on note

$$D^{\boldsymbol{\alpha}} f(x) = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

où $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert considérons M_p $(p = 0, 1, \ldots)$ une suite de nombres positifs soumise aux conditions suivantes :

(M.0) (Normalisation)

$$M_0 = M_1 = 1$$

(M.1) (Convexité logarithmique)

$$M_p^2 \leqslant M_{p-1} M_{p+1}, \quad p = 1, 2, \ldots$$

(M.2) (Stabilité par opérateurs différentiels)

$$\exists\, G, H, \text{ tels que } M_{p+1} \leqslant G H^p M_p, \quad p = 0, 1, \ldots$$

(M.3) (Non quasi-analycité)

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} < \infty$$

Définition 7.1. Soit M_p une suite de nombres positifs et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Une fonction $f \in \mathcal{E} = C^\infty(\Omega)$ est dite ultradifférentiable de classe (M_p) (resp. $\{M_p\}$) si pour tout compact $K \subset \Omega$ et pour tout $h > 0$, il existe une constante C (resp. pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe des constantes h et C) telle que

$$\sup_{x \in K} |D^{\boldsymbol{\alpha}} \phi(x)| \leqslant C h^{|\boldsymbol{\alpha}|} M_{|\boldsymbol{\alpha}|} \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\alpha}$$

On désigne par $\mathcal{E}^*(\Omega)$ l'ensemble des *fonctions ultradifférentiables de classe* $*$ sur Ω (où $* = (M_p)$ ou $\{M_p\}$) et par $\mathcal{D}^*(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{E}^*(\Omega)$ à support compact dans Ω.

Notons que l'on peut remplacer $(M.3)$ par la condition de quasi-analycité suivante :

(M.3') (i) Il existe des constantes strictement positives L et C telles que, pour tous p

$$p\,! \leqslant CL^p M_p$$

(ii) La série écrite en (M.3) diverge

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} = \infty$$

De plus, si une suite M_p satisfaisant (M.3') est telle que

$$\liminf_{p\to\infty} \sqrt[p]{\frac{p\,!}{M_p}} > 0$$

alors $\mathcal{E}^{\{M_p\}}$ est la classe des fontions analytiques.

Un autre exemple est celui fourni par $M_p = (p\,!)^d$, auquel cas $\mathcal{E}^{\{M_p\}}$ est la classe des fonctions Gevrey d'ordre $d+1$.

Définition 7.2. Soit M_p une suite de nombres positifs satisfaisant (M.1) et (M.3). Pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ le dual $\mathcal{D}^{*'}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{E}^{*'}(\Omega)$) de $\mathcal{D}^*(\Omega)$ (resp. $\mathcal{E}^*(\Omega)$) est l'ensemble des *ultradistributions de classe* $*$ (resp. des *ultradistributions à support compact de classe* $*$) définies sur Ω.

Le calcul opérationnel que nous utiliserons est celui naturellement associé à la transformation de Laplace des ultradistributions.

8. Problèmes d'EDPs frontières comme systèmes de convolution

8.1. Classe de modèles considérés. Par souci de simplicité d'exposition, on se restreindra dans ce qui suit aux systèmes admettant le modèle suivant en les variables distribuées $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_l$ ainsi qu'en les variables concentrées $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_m)$:

$$\begin{aligned} \partial_x \boldsymbol{w}_i = A_i \boldsymbol{w}_i + B_i \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{w}_i : \Omega_i \to (\mathcal{E}^{'*})^2, \quad \boldsymbol{u} \in (\mathcal{E}^{'*})^m \\ A_i \in (\mathbb{R}[s])^{2\times 2}, \quad B_i \in (\mathbb{R}[s])^{2\times m}, \quad i \in \{1, \ldots, l\} \end{aligned} \tag{18a}$$

où $\mathcal{E}^{'*}$ désigne un espace d'ultradistributions à support compact. Nous ferons deux hypothèses cruciales pour notre étude. Premièrement, toutes les matrices $A_1, \ldots, A_l$ donnent lieu au même polynôme caractéristique :

$$\det(\lambda 1 - A_i) = \lambda^2 - \sigma, \quad \sigma = as^2 + bs + c \neq 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \geqslant 0 \tag{18b}$$

Deuxièmement, les intervalles $\Omega_1, \ldots, \Omega_l$ doivent avoir des longueurs rationnellement dépendantes. Plus précisément, nous supposerons que Ω_i $(i = 1, \ldots, l)$ est donné par un intervalle ouvert de

$$\tilde{\Omega}_i = [x_{i,0}, x_{i,1}], \quad \ell_i = x_{i,1} - x_{i,0} = q_i \ell, \quad q_i \in \mathbb{Q}, \quad \ell \in \mathbb{R} \tag{18c}$$

On supposera, sans perte de généralité, que $x_{i,0} = 0$. Le modèle est complété par les conditions aux frontières

$$\sum_{i=1}^{l} L_i \boldsymbol{w}_i(0) + R_i \boldsymbol{w}_i(\ell_i) + D\boldsymbol{u} = 0 \tag{18d}$$

où $D \in (\mathbb{R}[s])^{q\times m}$ et $L_i, R_i \in (\mathbb{R}[s])^{q\times 2}$.

Remarque 8.1. On peut étendre le cadre précédent à tout système d'EDPs où les matrices A_i sont $\xi\times\xi$, $\xi > 0$, pourvu que les polynômes caractéristiques associés $\lambda^\xi - \sigma(s)$, avec $\sigma(s)$ polynôme d'ordre ξ en s donnent lieu à des solutions σ_i telles que les $e^{x\sigma_i}$ correspondent à des fonctions C^∞ de Ω dans un anneau $\mathcal{E}^{'*}$ d'ultradistributions à support compact.

8.2. **Solution du problème de Cauchy.** Rappelons ici quelques propriétés de la solution du problème de Cauchy de la forme (18a) avec les conditions initiales données par $x = \xi$, c.à.d.,

$$\partial_x \boldsymbol{w} = A\boldsymbol{w} + B\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{w}(\xi) = \boldsymbol{w}_\xi \tag{19}$$

avec A, B ayant les mêmes propriétés que les A_i, B_i $(i = 1, \dots, l)$ de la section précédente. Pour ce faire, considérons le problème aux valeurs initiales :

$$(\partial_x^2 - \sigma)v(x) = 0, \quad v(0) = v_0, \quad (\partial_x v)(0) = v_1 \tag{20}$$

associé à l'équation caractéristique (18b). Nommons S une solution non triviale de (20) et $C = \partial_x S$. On suppose que S et $C = \partial_x S$ correspondent à des fonctions C^∞ de Ω dans l'anneau $\mathcal{E}'$ (resp. $\mathcal{E}^{'*}$) des distributions (resp. ultradistributions) à support compact. (voir l'appendice App. C pour des expressions explicites de $C(x)$ et $S(x)$).

Exemple 8.1. Pour une équation de la chaleur, telle que (11) les expressions sont

$$C_x = \cosh(x\sqrt{s}), \quad S_x = \frac{\sinh(x\sqrt{s})}{\sqrt{s}}$$

et pour tout $x \in \Omega$ fixé, $S(x), C(x)$ sont (par transformée de Laplace inverse) des ultradistributions (éléments de $\mathcal{E}^{'*}$).

La solution unique $x \mapsto \Phi(x,\xi)$ du problème aux valeurs initiales

$$\partial_x \Phi(x,\xi) = A\Phi(x,\xi), \quad \Phi(\xi,\xi) = 1$$

avec 1 désignant l'identité de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, est alors donnée par

$$\Phi(x,\xi) = AS(x-\xi) + 1C(x-\xi) \tag{21}$$

De l'unicité de la solution, on déduit la formule de composition

$$\Phi(x,\xi)\Phi(\xi,\zeta) = \Phi(x,\zeta)$$

Pour A la matrice compagnon du polynôme caractéristique, c.à.d.,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(x,\xi) = \begin{pmatrix} C(x-\xi) & S(x-\xi) \\ \sigma S(x-\xi) & C(x-\xi) \end{pmatrix} \tag{22}$$

cela donne en particulier

$$\begin{pmatrix} C(x) & S(x) \\ \sigma S(x) & C(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(y) & S(y) \\ \sigma S(y) & C(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(x+y) & S(x+y) \\ \sigma S(x+y) & C(x+y) \end{pmatrix}$$

et donc

$$C(x+y) = C(x)C(y) + \sigma S(x)S(y), \quad S(x+y) = C(x)S(y) + S(x)C(y). \tag{23}$$

La solution du problème associé à l'équation inhomogène

$$\partial_x \Psi(x,\xi) = A\Psi(x,\xi) + B \tag{24}$$

avec des conditions initiales homogènes prescrites à $x = \xi$, s'obtient par variation des constantes. Ceci donne

$$\Psi(x,\xi) = \int_\xi^x \Phi(x,\zeta)d\zeta B \tag{25}$$

La solution générale du problème (19) est alors

$$\boldsymbol{w}(x) = \Phi(x,\xi)\boldsymbol{w}_\xi + \Psi(x,\xi)\boldsymbol{u}$$

ou, de manière équivalente

$$\boldsymbol{w}(x) = W(x,\xi)\boldsymbol{c},\ W(x,\xi) = \begin{pmatrix}\Phi(x,\xi) & \Psi(x,\psi)\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}_\xi = \begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_\xi \\ \boldsymbol{u}\end{pmatrix}$$

Les composantes de la matrice Φ appartiennent à $\mathbb{C}[s,C,S]$. Au contraire, et d'après (25), les composantes de Ψ peuvent contenir des intégrales de S et C. Cependant, si $\sigma \neq 0$ alors A est inversible sur $\mathbb{C}(s)$. Donc, utilisant $\partial_z\Phi(x,z) = -\Phi(x,z)A$ ces intégrales peuvent s'exprimer comme

$$\int_\xi^x \Phi(x,\zeta)d\zeta = -\int_\xi^x \partial_\zeta\Phi(x,\zeta)A^{-1}d\zeta = (\Phi(x,\xi)-1)A^{-1}$$

Choisissant A comme en (22) on obtient en particulier

$$\begin{aligned}\int_0^x \begin{pmatrix} C(x-\zeta) & S(x-\zeta) \\ \sigma S(x-\zeta) & C(x-\zeta)\end{pmatrix} d\zeta &= \int_0^x \begin{pmatrix} C(\zeta) & S(\zeta) \\ \sigma S(\zeta) & C(\zeta)\end{pmatrix} d\zeta \\ &= \begin{pmatrix} S(x) & (C(x)-1)/\sigma \\ C(x)-1 & S(x)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

et donc

$$\int_0^x C(\zeta)dx = S(x), \quad \int_0^x S(\zeta)dx = (C(x)-1)/\sigma$$

8.3. **Module du système.** En utilisant les solutions du problème aux valeurs initiales dans les conditions aux bords, on obtient

$$\boldsymbol{w}(x) = W_{\boldsymbol{\xi}}(x)\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{\xi}}, \quad P_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{\xi}} = 0 \tag{26}$$

Ici, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ est *arbitraire mais fixé*, $\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{\xi}}^T = (\boldsymbol{w}_1^T(\xi_1),\ldots,\boldsymbol{w}_l^T(\xi_l),\boldsymbol{u}^T)$,

$$W_{\boldsymbol{\xi}} = \begin{pmatrix}\Phi_1(x,\xi_1) & 0 & 0 & \Psi_1(x,\xi_1) \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \Phi_l(x,\xi_l) & \Psi_l(x,\xi_l)\end{pmatrix}, \quad P_{\boldsymbol{\xi}} = \begin{pmatrix}P_{\boldsymbol{\xi},1},\ldots,P_{\boldsymbol{\xi},l+1}\end{pmatrix}$$

avec

$$P_{\boldsymbol{\xi},i} = L_i\Phi_i(0,\xi_i) + R_i\Phi_i(\ell_i,\xi_i), \quad i = 1,\ldots,l$$

$$P_{\boldsymbol{\xi},l+1} = D + \sum_{i=1}^l L_i\Psi_i(0,\xi_i) + R_i\Psi_i(\ell_i,\xi_i)$$

Nous allons représenter le système étudié par un module engendré par les $\boldsymbol{c}_\xi$ avec la présentation donnée en (26) [MF04, FM99, FM98, Mou]. L'anneau des coefficients doit contenir les composantes de $W_{\boldsymbol{\xi}}(x)$ et $P_{\boldsymbol{\xi}}$, qui sont constituées de valeurs des fonctions C et S de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{E}'^*$. De plus, les matrices peuvent également contenir des valeurs des intégrales en espace de C et de S. Un choix possible pour l'anneau des coefficients est alors $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^I[s,\mathfrak{S},\mathfrak{S}^I]$, isomorphe à un sous anneau de $\mathcal{E}'^*$

par transformation de Laplace inverse. Pour tout $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}$, on note $\mathcal{R}^I_{\mathbb{X}} = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}, \mathfrak{S}^I_{\mathbb{X}}]$, avec

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \{C, S\}, &\quad \mathfrak{S}_{\mathbb{X}} &= \{C(z\ell), S(z\ell) | z \in \mathbb{X}\}, \\ \mathfrak{S}^I &= \{C^I, S^I\}, &\quad \mathfrak{S}^I_{\mathbb{X}} &= \{C^I(z\ell), S^I(z\ell) | z \in \mathbb{X}\} \end{aligned}$$

ℓ défini comme en (18c), et

$$S^I(x) = \int_0^x S(\zeta) d\zeta, \quad C^I(x) = \int_0^x C(\zeta) d\zeta$$

Dans le même esprit qu'en [Mou98, BL96, GL97], et afin de simplifier l'analyse des propriétés des modules, on utilisera, au lieu de $\mathcal{R}^I_{\mathbb{R}}$, un anneau un peu plus grand, donné par $\mathcal{R}_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}(s)[\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}] \cap \mathcal{O}$ (où $\mathcal{O}$ designe l'anneau des fonctions entières en s).

Définition 8.1. Le *système de convolution* $\Sigma = \Sigma_{\mathbb{R}}$ associé au problème frontière (18) est le module engendré par $\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{\xi}}$ sur $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}$ avec $P_{\boldsymbol{\xi}}$ pour matrice de présentation. Par $\Sigma_{\mathbb{Q}}$ on désigne le même système, mais vu comme module sur $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$.

On vérifie aisément que Σ ne dépend pas du choix de $\boldsymbol{\xi}$ (cf. [Woi07, Section 3.3.] et [RW08, Remark 4]).

Exemple 8.2. Nous allons considérer un exemple similaire à celui donné par les équations (11).

Modèle. Le modèle étudié est le suivant :

$$\partial_x^2 w(x,t) = \partial_t w(x,t), \quad x \in [0, L],\ t \in [0, +\infty[\tag{27a}$$

$$\partial_x w(0,t) = 0 \tag{27b}$$

$$\partial_x w(L,t) = u(t) \tag{27c}$$

Ce modèle peut se réecrire

$$\partial_x \begin{pmatrix} w(x,t) \\ \partial_x w(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(x,t) \\ \partial_x w(x,t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(0,t) \\ \partial_x w(0,t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(L,t) \\ \partial_x w(L,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

ou, de façon symbolique

$$\partial_x \hat{\boldsymbol{w}}(x) = A \hat{\boldsymbol{w}}(x) \tag{29a}$$

$$L\hat{\boldsymbol{w}}(0) + R\hat{\boldsymbol{w}}(L) = D\hat{u} \tag{29b}$$

avec

$$\hat{\boldsymbol{w}}(x) = \begin{pmatrix} \hat{w}(x) \\ \partial_x \hat{w}(x) \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s & 0 \end{pmatrix}, \ L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solutions fondamentales. Les solutions du problème sans frontière, c.à.d. de l'équation (29a) sont

$$\hat{\boldsymbol{w}}(x) = \begin{pmatrix} C_{x-\xi} & S_{x-\xi} \\ sS_{x-\xi} & C_{x-\xi} \end{pmatrix} \hat{\boldsymbol{c}}$$

Donc, nous avons

$$\hat{w}(x) = C_{x-\xi}\, \hat{c}_1 + S_{x-\xi}\, \hat{c}_2$$

ce qui exprime le fait que (C_x, S_x) est une base de l'espace vectoriel des solutions de (29a) considérée comme une EDO par rapport à la variable x.

Conditions aux bords. Les conditions aux bords (29b) s'écrivent

$$Le^{-A\xi}\hat{\boldsymbol{c}} + Re^{A(L-\xi)}\hat{\boldsymbol{c}} - D\hat{u} = 0$$

ou bien, en forme matricielle explicite

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{-\xi} & S_{-\xi} \\ sS_{-\xi} & C_{-\xi} \end{pmatrix} \hat{\boldsymbol{c}} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{L-\xi} & S_{L-\xi} \\ sS_{L-\xi} & C_{L-\xi} \end{pmatrix} \hat{\boldsymbol{c}} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \hat{u} = 0$$

qui est équivalente à

$$\begin{pmatrix} -sS_{\xi} & C_{\xi} \\ sS_{L-\xi} & C_{L-\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \hat{u} = 0$$

En résumé, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} -sS_{\xi} & C_{\xi} & 0 \\ sS_{L-\xi} & C_{L-\xi} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{u} \end{pmatrix} = 0, \quad \hat{\boldsymbol{w}}(x) = \begin{pmatrix} C_{x-\xi} & S_{x-\xi} & 0 \\ sS_{x-\xi} & C_{x-\xi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{u} \end{pmatrix}$$

que nous désignerons par

$$P_{\xi} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{c}} \\ \hat{u} \end{pmatrix} = 0, \quad \hat{\boldsymbol{w}}(x) = \widehat{W}_{\xi}(x) \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{c}} \\ \hat{u} \end{pmatrix}$$

avec les notations

$$P_{\xi} = \begin{pmatrix} -sS_{\xi} & C_{\xi} & 0 \\ sS_{L-\xi} & C_{L-\xi} & -1 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{W}_{\xi} = \begin{pmatrix} C_{x-\xi} & S_{x-\xi} \\ sS_{x-\xi} & C_{x-\xi} \end{pmatrix}$$

8.4. **Commandabilités des systèmes à paramètres répartis commandés aux bords.** Nous ne détaillerons pas la preuve du résultat suivant :

Théorème 8.1. *L'anneau $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ est un domaine de Bézout, c.à.d., tout idéal finiment engendré est principal.*

Démonstration. (Esquisse de preuve). On montre que deux éléments quelconques $p, q \in \mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ possèdent un diviseur commun qui peut s'écrire comme combinaison linéaire de p, q. Pour cela, on s'appuie sur le fait que l'anneau $\mathbb{C}(s)[\mathfrak{S}_{\mathbb{Q}}]$ est également un domaine de Bézout. Ceci provient du fait que ce type d'anneau se construit typiquement comme le quotient $\widetilde{\mathcal{R}}_{\mathbb{X}} := k[\widetilde{C}_a, \widetilde{S}_a; a \in \mathbb{X}]/\mathfrak{a}$ avec l'idéal $\mathfrak{a}$ engendré par

$$\widetilde{C}_a\widetilde{C}_b \pm \sigma\widetilde{S}_a\widetilde{S}_b - \widetilde{C}_{a\pm b},\ \widetilde{S}_a\widetilde{C}_b \pm \widetilde{C}_a\widetilde{S}_b - \widetilde{S}_{a\pm b},\ \widetilde{C}_0 - 1,\ \widetilde{S}_0, \quad \sigma \in k, \quad a, b \in \mathbb{X}$$

Notant C_a et S_a les images canoniques de $\widetilde{C}_a$ et $\widetilde{S}_a$ dans $\widetilde{\mathcal{R}}_{\mathbb{X}}$, l'on déduit les relations

$$C_aC_b \pm \sigma S_aS_b = C_{a\pm b}, \quad S_aC_b \pm C_aS_b = S_{a\pm b} \tag{30a}$$

$$C_0 = 1, \quad S_0 = 0, \quad C_a = C_{-a}, \quad S_a = -S_{-a} \tag{30b}$$

$$2C_aC_b = C_{a+b} + C_{a-b},\ 2\sigma S_aS_b = C_{a+b} - C_{a-b},\ 2C_aS_b = S_{a+b} - S_{a-b} \tag{30c}$$

De plus, tout élément de $r \in \widetilde{\mathcal{R}}_{\mathbb{X}}$ peut s'écrire sous la forme

$$r = \sum_{i=0}^{n} a_{\alpha_i}C_{\alpha_i} + b_{\alpha_i}S_{\alpha_i}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_{\alpha_i}, b_{\alpha_i} \in k, \quad \alpha_i \in \mathbb{X}^+ \tag{31}$$

où $\mathbb{X}^+ = \{|\alpha| : \alpha \in \mathbb{X}\}$. Sachant que $\mathbb{C}(s)[\mathfrak{S}_{\mathbb{Q}}]$ est un domaine de Bézout, on peut trouver des éléments $a, b \in \mathbb{C}[s, \mathfrak{S}_{\mathbb{Q}}]$ tels que

$$c = ap + bq \in \mathbb{C}[s, \mathfrak{S}_{\mathbb{Q}}] \tag{32}$$

est le PGCD dans $\mathbb{C}(s)[\mathfrak{S}_{\mathbb{Q}}]$. Donc, p/c et q/c appartiennent à $\mathbb{C}(s)[\mathfrak{S}_{\mathbb{Q}}]$. On en déduit un diviseur commun dans $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$. $\square$

Un notion supplémentaire de commandabilité est ici introduite, celle de commandabilité spectrale, généralisant le critère de Hautus des systèmes de dimension finie.

Définition et proposition 8.1. *Soit R un anneau isomorphe à un sous-anneau de l'anneau $\mathcal{O}$ des fonctions entières. Notons par $\mathscr{L}$ l'application $R \to \mathcal{O}$ de passage au domaine symbolique (la transformation de Laplace). Un R-système finiment présenté de matrice de présentation P est dit spectralement commandable si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

(i) La matrice $\hat{P} = \mathscr{L}(P)$ à coefficients dans $\mathcal{O}$ satisfait à la condition : $\exists k \in \mathbb{N} : \forall \sigma \in \mathbb{C} : rk_{\mathbb{C}}\, \hat{P}(\sigma) = k$.

(ii) Le module $\Sigma_{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \otimes_R \Sigma$ est sans torsion.

Démonstration. Ce résultat est une simple conséquence du fait que la matrice $\hat{P}$ admet une forme normale de Smith. $\square$

Proposition 8.1. *Soit R un domaine de Bézout isomorphe à un sous anneau de $\mathcal{O}$ et $\mathscr{L} : R \to \mathcal{O}$ le passage au domaine symbolique. Alors les notions de commandabilité spectrale et de commandabilité sans torsion sont équivalentes si, et seulement si, $\mathscr{L}$ envoie les éléments non inversibles de R sur les éléments non inversibles de $\mathcal{O}$.*

Démonstration. Puisque R est un domaine de Bézout, le caractère sans torsion de Σ implique sa liberté. Par produit tensoriel avec le module libre $\mathcal{O}$ on obtient un autre module libre $\Sigma_{\mathcal{O}}$, et, par la Définition et Proposition 8.1, la commandabilité spectrale. À nouveau parce que R est un domaine de Bézout, toute matrice de présentation admet une forme normale de Hermite. Donc, le sous module de torsion $\mathrm{t}\Sigma$ de Σ peut être présenté par une matrice carrée triangulaire P^t de rang plein. Si Σ n'est pas sans torsion, au moins une composante de la diagonale de cette matrice est non inversible dans R. Si cette composante est envoyée sur un non inversible de $\Sigma_{\mathcal{O}}$ par $\mathscr{L}$, elle admet un zéro complexe σ_0. Donc, $\mathscr{L}(P^t)$ a une chute de rang en $\sigma = \sigma_0$. Inversement, s'il existe un élément non inversible $r \in R$ qui correspond à un élément inversible $\hat{r} \in \mathcal{O}$, considérons $\Sigma \cong [\tau]/[r\tau]$. De manière évidente, l'image de τ dans $\Sigma_{\mathcal{O}}$ est zéro. Donc le module trivial $\Sigma_{\mathcal{O}}$ est sans torsion. $\square$

Voici le principal résultat de ce chapitre :

Théorème 8.2. *Le système de convolution Σ défini en 8.1 est libre, si et seulement s'il est sans torsion. Plus généralement $\Sigma = \mathrm{t}\Sigma \oplus \Sigma/\mathrm{t}\Sigma$, où $\mathrm{t}\Sigma$ est de torsion et $\Sigma/\mathrm{t}\Sigma$ est libre. De plus, Σ est spectralement commandable si, et seulement s'il est sans torsion.*

Démonstration. Rappelons que, selon la définition 8.1, $\Sigma \cong \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}} \Sigma_{\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ est un domaine de Bézout par la proposition 8.1. Puisque la première assertion est vraie pour les modules finiment présentés sur tout domaine de Bézout, elle est vraie pour $\Sigma_{\mathbb{Q}}$. La deuxième assertion découle le la proposition 8.1. (Le fait que la transformée de Laplace envoie tout élément non inversible de $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ sur un élément non inversible de $\mathcal{O}$ est évident). Clairement les deux résultats sont également valables pour Σ, qui est obtenu par extension de scalaires. $\square$

Références

[AFM+97] Y. Aoustin, M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon, and J. Rudolph. Theory and practice in the motion planning control of a flexible robot arm using mikusiǹski operators. In *Proc. of 4^{th} Symposium on Robotics and Control*, pages 287–293, Nantes, 1997.

[Bal94] W. Balser. *From Divergent Power Series to Analytic Functions : Theory and Applications of Multisummable Power Series*, volume 1582 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1994.

[Bal01] W. Balser. Summability of formal power series solutions of ordinary and partial differential equations. *Functional Diff. Eq.*, 8 :11–24, 2001.

[Bal04] W. Balser. Multisummability of formal power series solutions of partial differential equations with constant coeffcients. *J. Diff. Equations*, 201 :63–74, 2004.

[BL96] D. Brethé and J.J. Loiseau. A result that could bear fruit for the control of delay-differential systems. In Proc. *IEEE MSCA'96*, Chania, Crete, 1996.

[CH37] R. Courant and D. Hilbert. *Methoden der mathematischen Physik*, volume 1. Julius Springer, Berlin, 1937. Traduction américaine : *Methods of mathematical physics.* Interscience Publishers, New York, 1953.

[É92] J. Écalle. *Introduction aux fontions analysables et preuve constructive de la conjecture, de Dulac.* Hermann, Paris, 1992.

[Eis95] D. Eisenbud. *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry.* Number 150 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1995.

[Fli89] M. Fliess. Generalized linear systems with lumped or distributed parameters and differential vector spaces. *Internat. J. Control*, 49 :1989–1999, 1989.

[Fli90] M. Fliess. Some basic structural properties of generalized linear systems. *Systems Control Lett.*, 15 :391–396, 1990.

[FM98] M. Fliess and H. Mounier. Controllability and observability of linear delay systems : an algebraic approach. *Control Optimization and Calculus of Variations*, 3 :301–314, 1998.

[FM99] M. Fliess and H. Mounier. Tracking control and π-freeness of infinite dimensional linear systems. In G. Picci and D.S. Gilliam, editors, *Dynamical systems, Control, Coding and Computer Vision*, volume 258, pages 41–68. Birkhäuser, Bâle, 1999.

[FM01] M. Fliess and H. Mounier. On a class of linear delay systems often arising in practice. *Kybernetica*, 37 :295–308, 2001.

[FMRR96] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon, and J. Rudolph. Systèmes linéaires sur les opérateurs de mikusiǹski et commande d'une poutre flexible. In *ESAIM Proc. "Élasticité, viscoélasticité et contrôle optimal", huitièmes entretiens du centre Jacques Cartier*, Lyon, 1996.

[FMRR98a] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon, and J. Rudolph. Controlling the transient of a chemical reactor : A distributed parameter approach. In *Proc. of IEEE Conference on Computational Engineering in Systems Applications*, Nabeul-Hammamet, Tunisie, 1998.

[FMRR98b] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon, and J. Rudolph. A distributed parameter approach to the control of a tubular reactor : a multi-variable case. In *Proc. of 37^{th} Conference on Decision and Control*, pages 439–442, Tampa, FL, États-Unis, 1998.

[GD71] A. Grothendieck and J.A. Dieudonné. *Eléments de géométrie algébrique I.* Number 166 in Grundlehren math. Wissensch. Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[GL97] H. Glüsing-Lüerßen. A behavioral approach to delay differential systems. *SIAM J. Contr. Opt.*, 35 :480–499, 1997.

[Kom91] H. Komatsu. *Operational Calculus and Semi-groups of Operators*, volume 1540 of *Lect. Notes Math.*, pages 213–234. Springer, Berlin, 1991.

[Kom96] H. Komatsu. *Solution of differential equations by means of Laplace hyperfunctions*, pages 227–252. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1996.

[Laf77] J.P. Lafon. *Algèbre commutative. Langages géométrique et algébrique.* Hermann, Paris, 1977.

[Lar00] B. Laroche. *Extension de la notion de platitude à des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles linéaires*. Tèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.

[LMR00] B. Laroche, P. Martin, and P. Rouchon. Motion planning for the heat equation. *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 10 :629–643, 2000.

[LR00] A. Lynch and J. Rudolph. Flatness based boundary control of a nonlinear parabolic equation modelling a tubular reactor. In W. Respondek A. Isidori, F. Lamnabhi-Lagarrigue, editor, *Nonlinear Control in the Year 2000, volume 2*, number 259 in Lecture Notes in Control and Inform. Sci., pages 45–54. Springer, Londres, 2000.

[Mat90] H. Matsumura. *Commutative Ring Theory*. Cambridge university press, Cambridge, 1990.

[McD84] B.R. McDonald. *Linear Algebra over Commutative Rings*. Marcel Dekker, New York, 1984.

[MF04] H. Mounier and M. Fliess. An algebraic framework for infinite dimensional linear systems. *e-sta*, 1, 2004. URL : http ://www.e-sta.see.asso.fr.

[Mik59] J. Mikusiński. *Operational Calculus*. Pergamon Press, Oxford, 1959.

[Mou] H. Mounier. Propriétés structurelles des systèmes linéaires à retards : aspects théoriques et pratiques. Thèse de doctorat, Université Paris Sud, Orsay, 1995.

[Mou98] H. Mounier. Algebraic interpretations of the spectral controllability of a linear delay system. *Forum Math.*, 10 :39–58, 1998.

[MR03] H. Mounier and J. Rudolph. Time delay systems. *Encyclopaedia of Life and Support Systems*, 6.43.19.4, 2003.

[MRR97] H. Mounier, P. Rouchon, and J. Rudolph. Some examples of linear systems with delays. *J. Europ. Syst. Autom.*, 31 :911–925, 1997.

[OS01] F. Ollivier and A. Sedoglavic. A generalization of flatness to nonlinear systems of partial differential equations. Application to the command of a flexible rod. In *IFAC Symposium NOnLinear COntrol Systems*, pages 196–200, Saint-Petersbourg, 2001.

[Qui76] D. Quillen. Projective modules over polynomial rings. *Inv. Math.*, 36 :167–171, 1976.

[Ram93] J.P. Ramis. *Séries divergentes et théories asymptotiques*. Soc. Math. France, Marseille, 1993.

[Rot79] J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Academic Press, Orlando, 1979.

[Row91] L.H. Rowen. *Ring Theory. Student Edition*. Academic Press, Boston, 1991.

[Rud03a] J. Rudolph. *Beiträge zur flachheitsbasierten Folgeregelung linearer und nichtlinearer Systeme endlicher und unendlicher Dimension*. Shaker Verlag, 2003. ISBN 3-8322-1765-7. Thèse d'habilitation.

[Rud03b] J. Rudolph. *Flatness Based Control of Distributed Parameter Systems*. Steuerungs- und Regelungstechnik. Shaker Verlag, Aachen, 2003.

[RW08] J. Rudolph and F. Woittennek. Motion planning and open loop control design for linear distributed parameter systems with lumped controls. *Int. J. Control*, 81 :457–474, 2008.

[RWW03] J. Rudolph, J. Winkler, and F. Woittennek. *Flatness Based Control of Distributed Parameter Systems : Examples and Computer Exercices from Various Technological Domains*. Steuerungs- und Regelungstechnik. Shaker Verlag, Aachen, 2003.

[Sus76] A.A. Suslin. Projective modules over a polynomial ring are free (in russian). *Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R.*, 229 :1063–1066, 1976. English translation : *Soviet Math. Dokl.*, **17**, p. 1160–1164.

[Vid85] M. Vidyasagar. *Control System Synthesis. A Factorization Approach*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, États-Unis, 1985.

[WM10] F. Woittennek and H. Mounier. Controllability of networks of spatially one-dimensional second order p.d.e. – an algebraic approach. *Siam J. Contr.*, 48 :3882–3902, 2010.

[Woi07] F. Woittennek. *Beiträge zum Steuerungsentwurf für lineare, örtlich verteilte Systeme mit konzentrierten Stelleingriffen.* Berichte aus der Steuerungs- und Regelungstechnik. Shaker Verlag, Aachen, 2007.

[YG79] D.C. Youla and G. Gnavi. Notes on n-dimensional system theory. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 26 :105–111, 1979.

Annexe A. Rappels d'algèbre

A.1. **Module, liberté, torsion.** On considère dans cette section un anneau R commutatif, unifère et sans diviseur de zéro.

Un *R–module* M est un groupe commutatif muni d'une action sur R, c'est-à-dire d'une application $R \times M \to M$, écrite $(r, m) \mapsto rm$, telle que, pour tous $r, s \in R$ et $m, n \in M$, l'on ait :

$$\begin{aligned} r(sm) &= (rs)m && \text{(associativité)} \\ r(m+n) &= rm + rn && \\ (r+s)m &= rm + sm && \text{(distributivité)} \\ 1m &= m && \text{(identité)} \end{aligned}$$

Notation A.1. Le sous-module engendré par un sous ensemble S d'un R-module M est noté $[S]_R$ ou bien $[S]$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Soit M un R–module, et S un sous-ensemble de M. Une *combinaison linéaire* d'éléments de S est une somme

$$\sum_{m \in S} a_m m$$

où $\{a_m\}$ est un ensemble d'éléments de R, presque tous nuls. Ces éléments sont les *coefficients* de la combinaison linéaire. L'ensemble N de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de S est un sous-module de M, le sous-module *engendré* par S et l'on nomme S l'ensemble des *générateurs* de N.

Un module est dit *finiment engendré*, ou de *type fini* s'il ne possède qu'un nombre fini de générateurs.

Un sou-ensemble S d'un R–module M est dit *linéairement indépendant* (sur R) si, lorsque l'on a une combinaison linéaire de la forme

$$\sum_{m \in S} a_m m$$

qui est égale à zéro, alors $a_m = 0$ pour tout $m \in S$. Un sous-ensemble est dit *linéairement dépendant* s'il n'est pas linéairement indépendant.

Un module est dit *libre* s'il contient une *base*, c.à.d., un sous-ensemble indépendant et générateur.

Un élément m non nul d'un R–module M est dit de *torsion* s'il existe $a \in R$, $a \neq 0$ tel que

$$am = 0$$

En d'autres termes, l'ensemble $\{m\}$ est linéairement dépendant.

Un module M est dit de *torsion* si tous ses éléments le sont. Il est dit *sans torsion* si aucun de ses éléments non nul ne l'est.

A.2. **Relations.** Soit Λ un R-système. Il existe une suite exacte de R-modules [Rot79]

$$0 \to N \to F \to \Lambda \to 0 \tag{33}$$

où F est libre. Le R-module N, parfois nommé *module des relations*, peut être envisagé comme un système d'équations définissant Λ.

Une *présentation libre* de Λ [Rot79] est une suite exacte de R-modules

$$F_1 \to F_0 \to \Lambda \to 0$$

où F_0 et F_1 sont libres. Le R-module Λ est dit *finiment engendré*, ou de *type fini*, s'il existe une présentation libre où toute base de F_0 est finie. Il est dit *finiment présenté* s'il existe une présentation libre où toute base de F_0 et de F_1 est finie. La matrice correspondant à l'application $F_1 \to F_0$ est dite *matrice de présentation* de Λ ; nous la noterons P_Λ. Remarquons que cette matrice dépend des relations de Λ.

Exemple A.1. Déterminons le R-module Λ correspondant au système d'équations R-linéaires

$$\sum_{\kappa=1}^{\mu} a_{\iota\kappa}\xi_\kappa = 0, \quad a_{\iota\kappa} \in A, \iota = 1, \dots, \nu$$

où $\xi_1, \dots, \xi_\mu$ sont les inconnues. Soit F le R-module type engendré par $f_1, \dots, f_\mu$. Soit $N \subseteq F$ le module des relations, c.à.d., le sous-module engendré par $\sum_{\kappa=1}^{\mu} a_{\iota\kappa} f_\kappa$, $\iota = 1, \dots, \nu$. Alors, $\Lambda = F/N$. Les ξ_κ sont les *résidus* des f_κ, c.à.d., les images canoniques des f_κ.

Considérons, par exemple, le système considéré à la remarque 3.2. Le $\mathbb{R}[s]$-module libre F est celui engendré par X et U (c.à.d. l'ensemble $\{p(s)\,X+q(s)\,U \mid p, q \in \mathbb{R}[s]\}$ équipé d'une structure linéaire). Le sous-module N des relations est engendré par l'élément $a(s)\,X - b(s)\,U$ (c.à.d. l'ensemble $\{r(s)(a(s)\,X - b(s)\,U) \mid r \in \mathbb{R}[s]\}$ équipé d'une structure linéaire). Alors $\Lambda = F/N = [X, U]/[a(s)\,X - b(s)\,U]$, avec x et u pour générateurs, les résidus de X et U, et pour relation $a(s)\,x = b(s)\,u$.

A.3. **Idéal.** Nous allons introduire un objet algébrique associé à un module M qui regroupe les mineurs de la matrice de présentation P_M et qui, contrairement à cette dernière, *ne dépend que du module* M. Pour la notion de matrice de présentation, matrice des équations du système, voir la sous-section A.2, p. 27.

Un *idéal* $\mathfrak{a}$ de R est un sous-groupe additif de R tel que pour tout $\alpha \in \mathfrak{a}$ et $r \in R$, $r\,\alpha \in \mathfrak{a}$. C'est donc un sous-ensemble de R qui est également un R-module. Étant donné un idéal $\mathfrak{a}$ de R, s'il existe une famille d'éléments $(\alpha_i)_{i\in I}$ ($I \subseteq \mathbb{N}$) de $\mathfrak{a}$ tels que

$$\mathfrak{a} = \{ \sum_{i\in I} \alpha_i p_i \mid p_i \in R\}$$

l'idéal $\mathfrak{a}$ est dit *engendré par la famille* $(\alpha_i)_{i\in I}$. Lorsque I est fini, $\mathfrak{a}$ est dit *finiment engendré.*

Avec M donné par générateurs et relations comme décrit en section A.2, p. 27, l'*idéal de Fitting d'ordre* i associé à M (voir [McD84] ou [Eis95, définition 20.4 p. 493]), noté $\mathfrak{I}_M^i$, est défini comme l'idéal de R engendré par les déterminants de toutes les sous-matrices de taille $(\alpha - i) \times (\alpha - i)$ (les mineurs d'ordre $\alpha - i$) de P_M. Supposant que $\mathrm{rg}_R P_M = \gamma$, nous noterons $\mathfrak{I}_M$ l'idéal de Fitting associé aux mineurs d'ordre γ P_M. Cet idéal admet $C_\alpha^\gamma = \alpha!/(\gamma!(\alpha-\gamma)!)$ générateurs. Dans le cas où R est un anneau de polynômes en r indéterminées, nous considérerons en général

– par abus de notation – les éléments de $\mathfrak{I}_M$ comme des fonctions polynomiales de $\mathbb{C}^r$.

A.4. **Produit tensoriel.** Le produit tensoriel est une technique qui permet, entre autres, d'étendre formellement l'anneau des scalaires agissant sur un module. Soit R un anneau, M et N deux R-modules. Notons F le groupe des combinaisons R-linéaires de toutes les paires ordonnées (m, n). Soit L le sous-groupe de F engendré par tous les éléments de la forme

$$\begin{aligned} &(m+m', n) - (m, n) - (m', n), \quad (am, n) - a(m, n) \\ &(m, n+n') - (m, n) - (m, n'), \quad (m, an) - a(m, n) \end{aligned}$$

où $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ et $a \in R$. On pose alors $M \otimes_R N = F/L$; il s'agit d'un R-module que l'on nomme *produit tensoriel des modules M et N*. Les éléments de $M \otimes_R N$ s'écrivent $\sum_{\text{finie}} m_i \otimes_R n_j$ (ou $\sum_{\text{finie}} m_i \otimes n_j$ lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion) et ce de manière non unique en général. Un des avantages de cette construction est de pouvoir réduire des applications bilinéaires sur $M \times N$ à des applications linéaires sur $M \otimes_R N$.

A.5. **Exemple de changement d'anneau de base : extension des scalaires.** Nous allons donner, dans cette section et la suivante, deux exemples d'une opération désormais classique en algèbre commutative et géométrie algébrique (voir [GD71] et par exemple [Laf77]) : celle du changement d'anneau de base. Elle permet notamment de changer le point de vue que l'on a sur un objet algébrique. Un premier exemple est l'extension des scalaires. Soient R et S deux anneaux avec $R \subseteq S$, S étant un R-module et M un R-module. Alors on dit que le S-module $S \otimes_R M$ est obtenu à partir de M par *extension des scalaires*.

A.6. **Exemple de changement d'anneau de base : localisation.** Un deuxième exemple de changement d'anneau de base est fourni par le procédé de localisation. Soit $\mathcal{S}$ un sous-ensemble multiplicativement clos de R (c'est-à-dire pour tous $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{S}$, $\pi_1\pi_2 \in \mathcal{S}$ et $1 \in \mathcal{S}$). Le *localisé en $\mathcal{S}$ de R* est un anneau, noté $\mathcal{S}^{-1}R$, muni d'un morphisme $\phi : R \longrightarrow \mathcal{S}^{-1}R$ tel que

(i) pour tout $\pi \in \mathcal{S}$, $\phi(\pi)$ est inversible dans $\mathcal{S}^{-1}R$;

(ii) pour tout $q \in \mathcal{S}^{-1}R$, il existe des $p \in R$ et $\pi \in \mathcal{S}$ tels que $q = \phi(p)\phi(\pi)^{-1}$. On note généralement l'élément q précédent par p/π.

A.7. **Projectivité.**

Définition. Une caractérisation de la commandabilité des systèmes linéaires de dimension finie est la liberté du module sous-jacent (voir [Fli90]), qui repose sur l'équivalence entre la liberté et l'absence de torsion pour un module sur l'anneau [6] $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$. Dans le cas des systèmes à paramètres répartis, cette caractérisation n'est plus valable, *la liberté d'un R-module M étant une notion plus forte que le fait d'être sans torsion* (l'implication inverse de la suivante est fausse) :

$$M \text{ libre} \implies M \text{ sans torsion}$$

Il faut en fait distinguer deux propriétés : la liberté et la projectivité. Cette dernière recouvre la notion de "sous-espace" d'un module libre. D'une part, un sous-module M d'un module libre N peut-être libre mais pas nécessairement un terme en somme directe de N. D'autre part, il peut y avoir des termes en somme directe

6. Ceci est dû au caractère principal de l'anneau $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$.

de N qui ne sont pas libres. C'est ce dernier concept qui fournit une généralisation naturelle de la notion de "sous-espace". Un module M sur un anneau commutatif R est donc dit *projectif*, si $N = M \oplus \widetilde{M}$ où N est un module libre (voir par exemple [McD84] ou [Eis95, A3.2 p. 615]) ; $\widetilde{M}$ est alors également projectif pour la même raison.

Critères de projectivité. Nous avons le résultat suivant, sur un anneau commutatif R, intègre et sans diviseurs de zéros :

Proposition A.1. *Un R-module M est projectif si, et seulement si son idéal de Fitting $\mathfrak{I}_M$ est égal à R.*

Nous avons également le critère local suivant (voir [McD84, théorème IV.32 p. 295] et [Eis95, théorème 19.2 p. 471, théorème A3.2 p. 616 et exercices 4.11 et 4.12 p. 136]) :

Proposition A.2 (Critère local de projectivité)**.** *Soit M un module* finiment présenté *sur un anneau commutatif R. Alors M est projectif si, et seulement s'il existe une famille finie d'éléments $x_1, \ldots, x_r$ de R qui génèrent l'idéal unité de R, telle que $M[x_i^{-1}]$ soit libre sur $R[x_i^{-1}]$ pour tout i.*

Dans le cas où R est un anneau de fonctions entières d'une variable complexe, et si *le Nullstellensatz est vrai sur* R, nous avons également

Proposition A.3. *Pour un R-module M, $\mathfrak{I}_M = R$ si, et seulement si les générateurs de $\mathfrak{I}_M$ n'ont pas de zéro commun dans $\mathbb{C}$.*

Une caractérisation de la projectivité est alors la suivante : M est projectif si une matrice de présentation P_M ($P_M \in R^{\beta\times\alpha}, \mathrm{rg}_R P_M = \beta$) est inversible à droite (s'il existe $Q \in R^{\alpha\times\beta}$ tel que $P_M Q = I_\beta$).

Notons que cette caractérisation est directement liée aux équations de Bezout matricielles. Si l'on prend une dynamique Λ d'équations

$$\dot{\boldsymbol{x}} = F\boldsymbol{x} + G\boldsymbol{u}$$

avec F et G des matrices à coefficients dans R de tailles appropriées, la projectivité de Λ revient à l'existence de matrices $\overline{F}$ et $\overline{G}$ à coefficients dans R telles que

$$\left[\frac{d}{dt} I_n - F\right] \overline{F} + G\overline{G} = I_n.$$

Ce type d'équation peut servir à des fins de stabilisation par retour d'état dynamique (voir [Vid85]).

A.8. **Projectivité et liberté.** Rappelons ici le célèbre théorème de Quillen et Suslin résolvant en 1976 une conjecture émise par Serre dans les années cinquante.

Théorème A.1. *Tout module projectif sur un anneau de polynômes ($k[X_1, \ldots, X_n]$ où k est un corps) est libre.*

Définition A.1. Un module est *stablement libre* s'il devient libre après ajout d'un module libre.

Proposition A.4. *Tout module stablement libre n'est pas nécessairement libre ; un contre exemple classique est sur $k[X, Y, Z]/(1 - X^2 - Y^2 - Z^2)$.*

Annexe B. Rappels sur les séries divergentes et les fonctions Gevrey

B.1. **Sommabilité et multi-sommabilité.** Voir par exemple [Ram93], [Bal94], [Bal01], [Bal04]. Considérons une série formelle en x

$$w(x,\tau) = \sum_{i\geqslant 0} \alpha_i(\tau)\, x^i$$

à coefficients des fonctions $a_i(\tau)$, holomorphes dans un disque

$$D_\rho = \{\tau \in \mathbb{C} \mid |\tau| < \rho\}$$

Cette série est élément de $C^\omega(\mathbb{C})[[x]]$.
Lorsque ces séries seront utilisées avec des $a_i(t)$ fonctions du temps, les coefficients seront des fonctions analytiques réelles.

Sommabilité.

Définition B.1. On dira que la série $w(x,\tau)$ est *k-sommable dans la direction d* ($k > 0$, $d \in \mathbb{R}$) s'il est possible de trouver un rayon de convergence $r \in]0,\rho[$ tel que les deux propriétés suivantes soient satisfaites :

— La transformée de Borel en x d'ordre k, c.à.d. la série

$$\widetilde{w}(z,\tau) = \mathscr{B}_k(w(x,\tau)) = \sum_{i\geqslant 0} a_i(\tau)\, \frac{z^i}{\Gamma(1+i/k)} \tag{34}$$

converge absolument pour $|\tau| \leqslant r$ et $|z| < R$, avec R dépendant de r mais indépendant de τ.

— Il existe δ tel que, pour tout $\tau \in \bar{D}_r$, la fonction $\widetilde{w}(z,\tau)$ peut être prolongée analytiquement en x dans le secteur $S_{d,\delta} = \{x : |d - \arg z| < \delta\}$, prolongement que l'on note $\mathscr{C}_{S_{d,\delta}}(\widetilde{w})(z,\tau)$. Ce prolongement est de plus borné par une exponentielle d'ordre k dans un tout sous secteur : pour tout $\delta_1 < \delta$, il existe des constantes $C, K > 0$ telles que

$$\forall x \in S_{d,\delta_1}, \quad \sup_{|\tau|\leqslant r} |\mathscr{C}_{S_{d,\delta}}(\widetilde{w})(z,\tau)| \leqslant C \exp\left(K|z|^k\right)$$

Dans ce cas, la transformée de Laplace $\mathscr{L}_k$ d'ordre k de $\mathscr{C}_{S_{d,\delta}}(\widetilde{w})(z,\tau)$, c.à.d. la fonction

$$\mathscr{S}_{k,d}(w(x,\tau)) = \mathscr{L}_k(\mathscr{C}_{S_{d,\delta}}(\mathscr{B}_k(w(x,\tau)) = x^{-k} \int_0^{\infty(\gamma)} w(\xi,\tau) e^{-(\xi/x)^k} d\xi$$

intégrant le long du rayon $\arg\xi = \gamma$ avec $|d-\gamma| < \delta$ est nommée *k-somme de la série formelle* $w(x,\tau)$, et notée

$$\mathsf{w}(x,\tau) = \mathscr{S}_{k,d}\, w(x,\tau)$$

Le procédé de k-sommation est donc réalisé en trois étapes :

$$\mathscr{S}_{k,d} = \mathscr{L}_k \circ \mathscr{C}_{S_{d,\delta}} \circ \mathscr{B}_k$$

Remarque B.1. Notons que la transformée de Laplace d'ordre 1 de z^n est

$$\mathscr{L}_1(z^n) = x^{-1} \int_0^{\infty(\gamma)} \xi^n e^{-\xi/x} d\xi = n! x^n$$

qui apparaît donc comme un opérateur accélérant la divergence d'une série formelle. À l'inverse, la transformée de Borel accélère la convergence de cette même série formelle. Le procédé de sommation de Borel consiste donc à accélérer la convergence, ce qui permet d'obtenir une fonction analytique, dont on peut construire un prolongement analytique. La transformée de Borel inverse, c.à.d. la transformée de Laplace, permet de revenir dans le domaine initial.

Exemple B.1. Ce procédé permet de sommer des séries de la forme $\sum_0^\infty i! x^i$. La transformée de Borel correspondante est $1/(1-z)$ qui possède les propriétés requises dans toutes les directions d, sauf l'axe réel positif. Cette série est donc 1-sommable dans toute direction $d \not\equiv 0$ modulo 2π.

Multi-sommabilité. Pour les solutions de certaines EDOs et de certaines EDPs (comme $(\partial_t - \partial_z^2)(\partial_t - \partial_z^3)$), le procédé de sommabilité ci-dessus ne suffit pas. La première des conditions de la définition précédente peut être relaxée en imposant que la transformée de Borel (34) ne soit plus convergente, mais sommable en un certain sens. Nous utiliserons les notations suivantes : soit $q \geqslant 2$ un entier naturel ; un q-uple $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \ldots, \kappa_q)$ où les κ_i sont des réels positifs sera nommé un *type de multisommabilité* ; le q-uple $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_q)$ où les d_i sont des réels sera nommé une *multidirection admissible* si

$$2\kappa_j |d_j - d_{j-1}| \leqslant \pi, \quad 2 \leqslant j \leqslant q$$

On itère donc la définition précédente de la manière suivante :

Définition B.2. Donnons nous un type de multisommabilité $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \ldots, \kappa_q)$ et une multidirection admissible $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_q)$ et considérons une série formelle $w(x,\tau) = \sum_{i \geqslant 0} \alpha_i(\tau)\, x^i$. On dira que $w(x,\tau)$ est *$\boldsymbol{\kappa}$-sommable dans la multidirection $\boldsymbol{d}$* si :

— La série

$$\sum_{i \geqslant 0} a_i(\tau)\, \frac{z^i}{\Gamma(1 + i/\kappa_1)}$$

est $(\kappa_2, \ldots, \kappa_q)$-sommable dans la multidirection $(d_2, \ldots, d_q)$ et l'on notera $\widetilde{w}(z,\tau)$ sa somme.

— Il existe δ tel que, pour tout $\tau \in \bar{D}_r$, la fonction $\widetilde{w}(z,\tau)$ peut être prolongée analytiquement en x dans le secteur $|d_1 - \arg z| < \delta$, et vérifie pour des constantes $C, K > 0$ suffisamment grandes

$$|\widetilde{w}(z,\tau)| \leqslant C \exp\left(K|z|^k\right)$$

pour tout z comme ci-dessus.

Dans ce cas, la fonction

$$x^{-\kappa_1} \int_0^{\infty(\gamma)} w(\xi,\tau) e^{-(\xi/x)^{\kappa_1}}\, d\xi$$

est nommée *$\boldsymbol{\kappa}$-somme de la série formelle $w(x,\tau)$, dans la multidirection $\boldsymbol{d}$* et notée

$$\mathsf{w}(x,\tau) = \mathscr{S}_{\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{d}}\, w(x,\tau)$$

B.2. **Fonctions Gevrey.** Voir par exemple [Ram93], [Bal94], [Bal01], [Bal04].

Une fonction de classe C^∞ $f(t)$ de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$ est dite *Gevrey* d'indice d si elle vérifie les estimées suivantes

$$\sup_{t\in[0,T]} |f^{(i)}(t)| \leqslant CK^i\Gamma(1+(d+1)i), \quad \forall i \geqslant 0$$

avec des constantes C et $K > 0$.

De manière analogue, on dira qu'une série formelle

$$F(x,s) = \sum_{i\leqslant 0} f_i(x)\frac{s^i}{i!}, \quad x \in [0,r)$$

est Gevrey d'ordre d s'il existe des constantes $\rho \in [0,r)$, C, $K > 0$ telles que

$$|f_i(x)|(t) \leqslant CK^i\Gamma(1+(d+1)i), \quad \forall i \geqslant 0, |x| < \rho$$

Annexe C. Représentation des opérateurs $S(x)$ et $C(x)$

Si $a > 0$ dans l'équation (18b) on peut réécrire σ comme

$$\sigma = \tau^2\left((s+\alpha)^2 - \beta^2\right), \quad \tau = \sqrt{a}, \quad \alpha = \frac{b}{2a}, \quad \beta = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}.$$

L'opérateur $S(x)$ correspond à la fonction à support compact

$$S(x,t) = (H(t+x\tau) - H(t-x\tau))\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{2\tau}J_0(\beta\sqrt{\tau^2x^2 - t^2}),$$

où J_0 désigne la fonction de Bessel d'ordre zéro et H la distribution de Heaviside. Par contre, si $a = 0$ dans (18b), $S(x)$ peut s'écrire

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(bs+c)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

(**H. Mounier**) Laboratoire des Signaux et Systèmes, (L2S, UMR CNRS 8506), Université Paris-Sud - CNRS - CentraleSupélec, 3 rue Joliot Curie, 91192 Gif sur Yvette, FRANCE

E-mail address: hugues.mounier@l2s.centralesupelec.fr

(**J. Rudolph**) Universität des Saarlandes, Lehrstuhl für Systemtheorie und Regelungstechnik, Campus A5 1, 66123 Saarbrücken, ALLEMAGNE

E-mail address: j.rudolph@lsr.uni-saarland.de

(**F. Woittennek**) Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie, Technische Universität Dresden, 01062 Dresden, ALLEMAGNE

E-mail address: woittennek@erss11.et.tu-dresden.de