Théorie de Galois différentielle constructive et formes réduites de systèmes différentiels linéaires

Jacques-Arthur Weil *XLIM,Limoges,France*

jacques-arthur.weil@unilim.fr
http://unil.im/jaw/

Théorie Algébrique des Systèmes, lundi 20 janvier 2014

I. Apetizer - 1,2,3 examples

I. Apetizer - 1 : Closed Form Solutions

A hypergeometric equation with diedral differential Galois group :

$$L(y) := \partial^2(y) + \frac{x}{x^2-1}\partial(y) - \frac{1}{4n^2(x^2-1)}y = 0, \quad \partial = \frac{d}{dx}$$

Closed form solutions ?

yes : $y = \exp\left(\pm \int \frac{1}{2n} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx\right)$

Note : differential equation for $f := y^2$:

$$Sym^2(L) \quad : \quad \partial^3(f) + 3\,\frac{x}{x^2-1}\partial^2(f) + \frac{(-1+n^2)}{n^2\,(x^2-1)}\partial(f) = 0$$

Rational solution : $f = 1$ .... from which we deduce y :
this is given by the Kovacic algorithm .

In fact, $y = \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2n}}$: algebraic when n is rational.

I. Apetizer - 2 : Bessel equations

$$L(y) := \partial^2(y) - \frac{(\sigma + 1 - \beta)}{\beta\, x}\partial(y) + \frac{\sigma\ (-\rho + x + 1)}{x^2\beta^2} y = 0$$

Solutions computed by Maple :

$$\begin{aligned} y\,(x) \quad = \quad & \_C_1\, x^{\frac{\sigma+1}{2\beta}} \mathrm{BesselJ}\left(\sqrt{\frac{\sigma^2 - 2\,\sigma + 1 + 4\,\sigma\,\rho}{\beta^2}}, 2\,\frac{\sqrt{\sigma}\sqrt{x}}{\beta}\right) \\ & + \_C2\, x^{\frac{\sigma+1}{2\beta}} \mathrm{BesselY}\left(\sqrt{\frac{\sigma^2 - 2\,\sigma + 1 + 4\,\sigma\,\rho}{\beta^2}}, 2\,\frac{\sqrt{\sigma}\sqrt{x}}{\beta}\right) \end{aligned}$$

`No algebraic relations` between solutions and their derivatives in general. `The differential Galois group` is (projectively) $SL(2, \mathbb{C})$.

`No rational first integral` , except when parameters satisfy ... you will soon know what.

I. 3. Is the Lorenz system rationally integrable ?

[Canalis-Durand, Ramis, Rouchon, and J.A.W, 2001]

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & -\sigma(x-y) \\ \frac{dy}{dt} & = & \rho\, x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} & = & -\beta\, z + xy \end{array}\right.$$

Can one find a rational first integral ?

Particular solution $x_0 = y_0 = 0, \quad z_0 = exp(-\beta t)$

Variational System : ϵ-perturbation (ϵ "ideally small")

$X = X_0 + \epsilon X_1, Y = Y_0 + \epsilon Y_1, Z = Z_0 + \epsilon Z_1$ then

$$\frac{d}{dt}\left(\begin{array}{c} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - e^{-\beta\, t} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{array}\right)$$

I. 3.bis. when is the Lorenz system rationally integrable ?

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - e^{-\beta\, t} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

differential equation for x_1 ? very easy : differentiate !

$$\partial^2 + (\sigma+1)\,\partial - \sigma\,\rho + \sigma\, e^{-\beta\, t} + \sigma$$

Now set $x = e^{-\beta\, t}$ and $\partial = d/dx$:

$$\partial^2 - \frac{(\sigma+1-\beta)\,\partial}{\beta\, x} + \frac{\sigma\,(-\rho+x+1)}{x^2\beta^2}$$

so x_1 satisfies the Bessel differential equation !

The Lorenz model is generically not rationally integrable .

Exercise : for which values of the parameters could this Lorenz system be actually rationally integrable ? ?

Outline

II. Differential Galois Group

Let k be a `differential field` :
$k = C(x), C((x)), C(x, exp(x)), C(x, \sqrt{x}, exp(\sqrt{x}), \ldots$.

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0$$

All that follows extends *mutatis mutandis* to linear differential systems

$$Y' = A(x)Y, \quad A \in \mathcal{M}_n(k)$$

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0$$

Definition

A differential field extension $K \supset k$ is called a *Picard-Vessiot extension* of k (for $L(y) = 0$) if

1. $K = k(y_1, y_1', \ldots, y_i^{(j)}, \ldots, y_n^{(n-1)})$, where the y_i are a basis of solutions of $L(y) = 0$ (i.e K is the differential field generated [1] by the solutions of L.
2. K and k have the same field of constants.

Construction : assume 0 not singular. Pick series solutions $y_1, \ldots, y_n$. Let I ideal of polynomials in $k[X_{i,j}]$ s.t $P(y_i^{(j)}) = 0$. Then $k[X_{i,j}]/I$ is Picard-Vessiot Ring.

I is the ideal of relations

$V(L) := Sol_K(L)$ is a C-vector space of dimension n.

1. Note that as $L(y_i) = 0$, we have $y_i^{(n)}$ and the higher derivatives in K, which really makes it a differential field

L a differential operator, $K = PV(L)$ Picard-Vessiot Extension.
$V(L) = Span(y_1, \ldots, y_n)$.

Definition

We call a *differential k-automorphism* of K an automorphism g of K which leaves k fixed et which commutes with the derivation,i.e :

1. $\forall y \in K,\ g(y)' = g(y')$
2. $\forall y \in k,\ g(y) = y$

The *differential Galois group* $G = Gal(L) = Gal_\partial(K/k)$ is the group of differential k-automorphisms of K.

$$g \in Gal(L), \quad L(y) = 0 \quad \longrightarrow L(g(y)) = 0 \quad \Rightarrow g(y_i) = \sum_j c_{i,j} y_j$$

Essential Property 1 :

Faithful representation of $Gal(L)$ as a group of matrices

$Gal(L)$ is a linear algebraic group

Exercise : the Galois group of a logarithm

Let $\mathcal{L} := \log(x)$ in a Picard-Vessiot extension $K \supset C(x)$.
Let $g \in Gal(K/C(x))$.

$g(\mathcal{L})$?

$g(\mathcal{L})' = g(\mathcal{L}') = g(1/x) = 1/x = \mathcal{L}'$ so there exists a constant $c_g \in C$ s.t $g(\mathcal{L}) = \mathcal{L} + c_g$

$$y'' + \frac{1}{x}y' = 0.$$

Solutions are 1 and $\mathcal{L}$. The Galois group is :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c_g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_g \in C \right\}$$

`Compare with the monodromy :` $\log(xe^{2i\pi}) = \log(x) + 2i\pi$

Some classical examples of linear algebraic groups.

1. $GL(n, C)$ and $SL(n, C)$ (defined by $\det(g) = 1$).
2. The group of upper triangular matrices T (defined by $T_{i,j} = 0$ for $j < i$).
3. Let I_n denote the identity matrix of size n and the standard symplectic matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

   The set of matrices M that satisfy ${}^tM.J.M = J$ (this relation induces a finite set of polynomial relations on the entries of M) is called the *Symplectic* group $Sp(2n, C)$ and will be central in the applications to symplectic mechanics.
4. Any finite group of matrices (check this !)

G is an equidimensional variety ;

G° : component containing the identity

Tangent plane at the identity : Lie algebra $\mathfrak{g}$

III. Normality : What the Galois Group Measures

Essential Property 2 :

Theorem (Galois normality)

Let K denote a Picard-Vessiot extension of k, let G be its differential Galois group, and let $z \in K$. Then :

$$z \in k \iff \forall g \in G,\ g(z) = z.$$

Normality : caracterizing algebraic elements

Normality : $z \in k \iff \forall g \in G,\ g(z) = z.$

Theorem

Let $z \in K$. Then z is algebraic of degree m over k if and only if $\mathrm{Orb}_G(z)$ has exactly m elements.
All solutions of $L(y) = 0$ are algebraic if and only if G is a finite group.

Sketch : z algebraic iff $P = \prod_{g \in G} (Y - g(z))$ has coefficients in k.
Generalization : The dimension of $\mathrm{Orb}_G(z)$ mesures the differential order of z (Katz).

Normality : caracterizing exponential elements

Normality : $z \in k \iff \forall g \in G,\ g(z) = z.$

Theorem

An non-zero element z of K is exponential over k if and only if, for all $g \in G$, there exists a constant $c_g \in C$ such that $g(y) = c_g.y$.

IV. Order 2 Equations : the Kovacic Algorithms

$$L(y) := y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Closed form solutions ? Galois group ?

Assume that $\exists f \in k, a_1 = f'/f$, so that $Gal(L) \subset SL(2, C)$.

Kovacic 77-86 ;
Baldassari & Dwork 79
Singer 81
Duval & Loday-Richaud 91
Ulmer & Singer 93 ;
Ulmer & Weil 95 ; Fakler 97 ;
Berkenbosch & van Hoeij & Weil 02-05
19th century : Klein, Fuchs, Pepin, Vessiot, Marotte, etc.

Case 1 : Reducible case

Definition

Let G be a linear group acting on a vector space. We say that (the action of) G is *reducible* if there exists a non-trivial subspace $W \subset V$ such that $G(W) \subset W$.

In our case : subspace of dimension 1 $\leftrightarrow$ exponential solution.

Case 2 : Imprimitive case (definition)

Definition

Let G be an irreducible group acting on a vector space V. We say that G is *imprimitive* if there exist subspaces V_i such that $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ and G permutes transitively the V_i :

$$\forall i = 1, \ldots, r \; \forall g \in G, \qquad \exists j \in \{1, \ldots, r\} : \; g(V_i) = V_j.$$

In our case, we must have $r = 2$ and $\dim(V_1) = \dim(V_2) = 1$.
The matrices have the form

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^{-1} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{with } \; a, b \in C^*.$$

Case 2 : Imprimitive case (algorithm)

Lemma

Assume that G is irreducible. Then :
G is imprimitive ..

`if and only if`

the Riccati equation has an algebraic solution of degree 2

`if and only if`

G has a semi-invariant of degree 2*.*

How we detect this situation :
semi-invariant of degree 2 $\leftrightarrow$ exponential (radical) solution of $Sym^2(L)$.
Let's get back to the hypergeometric example of slide 3..

Case 3 : Primitive case

Remaining possibilities :

3 exceptional finite groups (tetraedral, octaedral, icosaedral), caracterized by their *invariants* : see notes

OR

The Galois group is $SL(2, C)$: no closed form solution. Let's get back to the Bessel example of slide 4 ..

V. *D*-finiteness, Chevalley approach and Tannakian Correspondance.

Underlying philosophy to what we have seen :
Assume we want to study some algebraic property $\mathcal{P}$ of solutions

1. Transform it into a `group` property
2. Transform this to a `representation` property
3. `Chevalley` : a representation property is characterized by the fact that a line is fixed under the group in some tensorial construction $\mathcal{C}(V(L))$
4. Associate to $\mathcal{C}(V(L)$ a linear differential system $\mathcal{C}(L)$: `Tannakian` equivalence
5. $\longrightarrow$ `rational solutions of tensor constructions`
   `Example : factoring`

Complète intégrabilité de syst. hamiltoniens

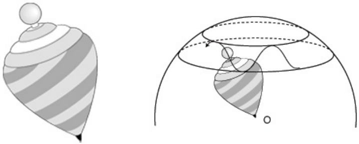
Systèmes hamiltoniens $(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{q}_i & = & \frac{\partial H}{\partial p_i}(q,p) \\ \dot{p}_i & = & -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q,p) \end{array} \right.$

$\frac{dx}{dt}(t) = J \cdot \nabla H(x(t)) = X_H(x(t))$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$

Intégrale première : $I(p,q)$ constante le long des solutions.

Liouville (complète) integrabilité :

≪ suffisamment d'intégrales premières pour assurer une dynamique régulière "explicite" ≫



Complète intégrabilité de syst. hamiltoniens

Systèmes hamiltoniens $(S) : \begin{cases} \dot{q}_i & = & \frac{\partial H}{\partial p_i}(q,p) \\ \dot{p}_i & = & -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q,p) \end{cases}$

$$\frac{dx}{dt}(t) = J \cdot \nabla H(x(t)) = X_H(x(t)) \text{ où } J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

Intégrale première : $I(p,q)$ constante le long des solutions.

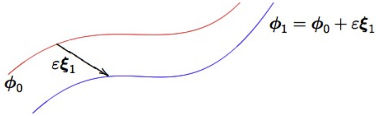
Definition

(S) est *complètement intégrable* (Liouville) dans une classe $\mathcal{F}$ de fonctions s'il admet n intégrales premières $G_1 = H, G_2, \ldots, G_n \in \mathcal{F}$ t.q :

- les G_i sont fonctionnellement indépendants, et
- Les G_i sont en involution : $\{G_i, G_j\} = 0$
  $\{G_1, G_2\} = < \nabla G_1(x), J\nabla G_2(x) >$

Note : Involution $\longleftrightarrow$ les X_{G_i} sont des champs qui commutent $(X_{\{G_1,G_2\}} = [X_{G_1}, X_{G_2}])$

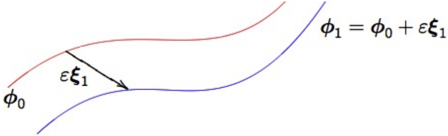
II.1 Première variationelle



Équation variationnelle

On se donne une solution particulière $\phi_0(t)$ de

$$(S) : \left\{ \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x}), \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{x}) \right.$$



Étudier une "solution perturbée" $\phi_1 = \phi_0 + \varepsilon\xi_1 + \cdots$
ϕ_1 solution de (S) (modulo ϵ^2) :

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{\xi}}_1 = A_1(t)\, \boldsymbol{\xi}_1,} \qquad (\mathrm{VE}_1)$$

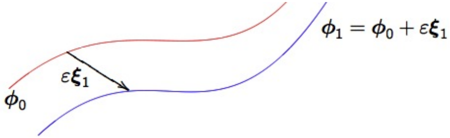
$$A_1(t) := \mathrm{Jac}_{\boldsymbol{\phi_0}}(X_H) = J \cdot \mathrm{Hess}_{\phi_0}(H)\, \boldsymbol{\xi}_1.$$

Cette première équation variationnelle est `linéaire` .

`Note :` A_1 matrice *hamiltonienne* , i.e. $A_1 \in \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$

Intégrabilité et variationnelle

$$(S) : \left\{ \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x}), \ \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{x}) \right.$$



Theorem (Morales & Ramis)

Si (S) est Liouville intégrable, alors le groupe de Galois différentiel de (VE_1) a une algèbre de Lie abélienne. $\mathfrak{g}$. *critère algébrique, peut être rendu effectif*

Panorama historique

- 19e siècle. Kovaleska, Poincaré : *VE* le long d'1 sol.
- ~ 84 : Ziglin : monodromie de (VE_1).
- Yosida, Ito & others, rafinements et applications
- $93 - 95$: Baider-Churchill-Rod-Singer, Morales : Galois

- 98 : Morales & Ramis :
  `Le` $Gal_\partial VE$ `a une alg. de Lie abélienne`
- $\sim 95 \longrightarrow 12$ une cinquantaine de papiers d'applications. (Morales, Simon, Tsygvintsev, Maciejewski, Przybylska, Audin, `D. Boucher` , `J.-A.W.` , etc). Algo de Kovacic ou critère log. intégrabilité.

- $10 - 12$ Aparicio & Weil : réduction de VE_1
- $01 - 04$ Morales-Ramis-Simo : `Variationnelles sup.`
  Potentiels : Maciejewski-Przybylska-Duval, `T. Combot` ,
  Méthodes numériques : Simo-Martinez, Simon + Salni
  Formes réduites : `A. Aparicio` & `J.-A.W.`

Panorama historique

- 19e siècle. Kovaleska, Poincaré : *VE* le long d'1 sol.
- $\sim$ 84 : Ziglin : monodromie de (VE_1).
- Yosida, Ito & others, rafinements et applications
- 93 – 95 : Baider-Churchill-Rod-Singer, Morales : Galois

- 98 : Morales & Ramis :
  `Le` $Gal_\partial VE$ `a une alg. de Lie abélienne`
- $\sim$ 95 $\rightarrow$ 12 une cinquantaine de papiers d'applications. (Morales, Simon, Tsygvintsev, Maciejewski, Przybylska, Audin, `D. Boucher` , `J.-A.W.` , etc). Algo de Kovacic ou critère log. intégrabilité.

- 10 – 12 Aparicio & Weil : réduction de VE_1
- 01 – 04 Morales-Ramis-Simo : `Variationnelles sup.`
  Potentiels : Maciejewski-Przybylska-Duval, `T. Combot` ,
  Méthodes numériques : Simo-Martinez, Simon + Salni

  Formes réduites : `A. Aparicio` & `J.-A.W.`

Panorama historique

- 19e siècle. Kovaleska, Poincaré : *VE* le long d'1 sol.
- ~ 84 : Ziglin : monodromie de (VE_1).
- Yosida, Ito & others, rafinements et applications
- $93 - 95$: Baider-Churchill-Rod-Singer, Morales : Galois

- 98 : Morales & Ramis :
  `Le` $Gal_\partial VE$ `a une alg. de Lie abélienne`
- $\sim 95 \rightarrow 12$ une cinquantaine de papiers d'applications. (Morales, Simon, Tsygvintsev, Maciejewski, Przybylska, Audin, `D. Boucher` , `J.-A.W.` , etc). Algo de Kovacic ou critère log. intégrabilité.

- $10 - 12$ Aparicio & Weil : réduction de VE_1
- $01 - 04$ Morales-Ramis-Simo : `Variationnelles sup.`
  Potentiels : Maciejewski-Przybylska-Duval, `T. Combot` ,
  Méthodes numériques : Simo-Martinez, Simon + Salnil
  Formes réduites : `A. Aparicio` & `J.-A.W.`

Critère logarithmique de non-intégrabilité

→ Travail avec Boucher, 2001-2003

Theorem

Supposons que l'équation variationnelle ait un facteur irréductible `(condition globale)` *qui admette des solutions formelles, au voisinage d'un point, contenant des* `logarithmes` `(condition locale)` *.*
Alors l'algèbre de Lie du groupe de Galois n'est pas abélienne.

- Ce cas se produit souvent (déraisonnable efficacité)
- Permet de nettoyer des familles à paramètres
- Algorithme "carte postale"

Réduction de l'équation variationelle

$\longrightarrow$ Travail avec Aparicio, 2010-2012

Schéma courant : *trouver une solution particulière (sur un plan invariant), écrire l'équation variationelle puis normale variationelle* (NVE) *et tester l'intégrabilité de* (NVE). *Et puis voilà.*

Introduction de formes réduites pour (VE_1) :

- Test alternatif d'intégrabilité pour (NVE).
- Obstructions à l'intégrabilité dans le relèvement de (NVE) à (VE).
- Prépare le système pour l'étude des variationelles supérieures.

Réduction de l'équation variationelle

→ Travail avec Aparicio, 2010-2012

Schéma courant : *trouver une solution particulière (sur un plan invariant), écrire l'équation variationelle puis normale variationelle* (NVE) *et tester l'intégrabilité de* (NVE)*. Et puis voilà.*

Introduction de formes réduites pour (VE_1) :

- Test alternatif d'intégrabilité pour (NVE).
- Obstructions à l'intégrabilité dans le relèvement de (NVE) à (VE).
- Prépare le système pour l'étude des variationelles supérieures.

Réduction de l'équation variationelle

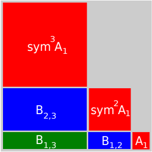
$\longrightarrow$ Travail avec Aparicio, 2010-2012

Schéma courant : *trouver une solution particulière (sur un plan invariant), écrire l'équation variationelle puis normale variationelle* (NVE) *et tester l'intégrabilité de* (NVE). *Et puis voilà.*

Introduction de formes réduites pour (VE_1) :

- Test alternatif d'intégrabilité pour (NVE).
- Obstructions à l'intégrabilité dans le relèvement de (NVE) à (VE).
- Prépare le système pour l'étude des variationelles supérieures.

Variationelles d'ordre supérieur : Morales-Ramis-Simo



Variationnelles supérieures

$(S) \; : \; \dot{\mathbf{x}} = X_H(\mathbf{x}).$

Perturbation d'ordre plus élevé : $\phi_1(t) = \phi_0(t) + \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2 + \cdots$

Équation variationnelle supérieure VE_m d'ordre m le long de $\phi_0(t)$:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{VE}_1) &\; : \; \dot{\xi}_1 = (d_{\phi_0} X_H)\xi_1 \\
(\mathrm{VE}_2) &\; : \; \dot{\xi}_2 = d^2_{\phi_0} X_H(\xi_1, \xi_1) + (d_{\phi_0} X_H)\xi_2 \\
(\mathrm{VE}_3) &\; : \; \dot{\xi}_3 = d^3_{\phi_0} X_H(\xi_1, \xi_1, \xi_1) + 3 d^2_{\phi_0} X_H(\xi_1, \xi_2) + (d_{\phi_0} X_H)\xi_3
\end{aligned}
$$

VE_m peut se penser comme étant un système linéaire LVE_m :

$$
(\mathrm{LVE}^3_{\phi_0}) \; : \; \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} (\mathrm{Sym}^3 \xi_1) \\ \xi_1 \bullet \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{sym}^3 A & 0 & 0 \\ B_{2,3} & \mathrm{sym}^2 A & 0 \\ B_{1,3} & B_{1,2} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Sym}^3 \xi_1 \\ \xi_1 \bullet \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}
$$

Pour $n = 4$, on a Size = 4+10+20=34 (!)

Variationnelle supérieure linéarisée

Variationnelle (VE_m) vue comme système diff. linéaire (LVE_m) :

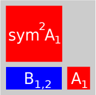
(VE_1)

$\downarrow$

$dim = 2n$

$ex : dim = 4$

(LVE_2)

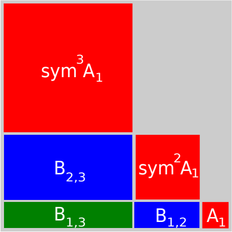


$\downarrow$

$dim = \binom{n+1}{1} + n$

$ex : dim = 14$

(LVE_3)



$\downarrow$

$dim = (bigger) + \binom{n+1}{1} + n$

$ex : dim = 34$

...

Variationnelle supérieure linéarisée

Variationnelle (VE_m) vue comme système diff. linéaire (LVE_m) :

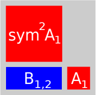
(VE_1)

$\downarrow$

$dim = 2n$

$ex : dim = 4$

(LVE_2)

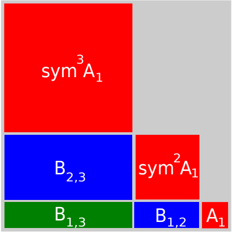


$\downarrow$

$dim = \binom{n+1}{1} + n$

$ex : dim = 14$

(LVE_3)



$\downarrow$

$dim = (bigger) + \binom{n+1}{1} + n$

$ex : dim = 34$

. . .

Variationnelle supérieure linéarisée

Variationnelle (VE_m) vue comme système diff. linéaire (LVE_m) :

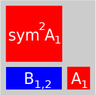
(VE_1)

$\downarrow$

$dim = 2n$

$ex : dim = 4$

(LVE_2)

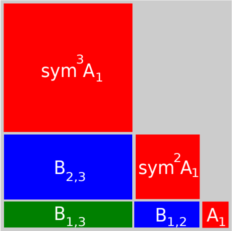


$\downarrow$

$dim = \binom{n+1}{1} + n$

$ex : dim = 14$

(LVE_3)



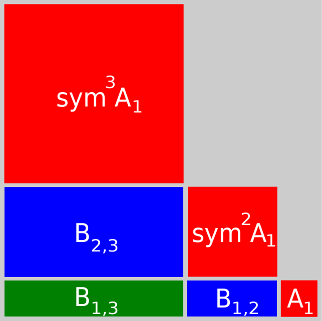
$\downarrow$

$dim = (bigger) + \binom{n+1}{1} + n$

$ex : dim = 34$

$\dots$

Morales-Ramis-Simo



Theorem (Morales & Ramis & Simo)

If (S) is Liouville integrable, then the differential Galois group of each variational equation (LVE_m) has an abelian Lie algebra $Lie(LVE_m)$.

Morales-Ramis-Simo en pratique ?

- *"Morales trick"* : quand (VE_1) obtenues via fcts $\mathcal{P}$ de Weierstrass.

  → M-R-S, A. Maciejewski, M. Przybylska, D. Boucher, J.-A. W., etc.

- *Approches numériques* :

  → S. Simon, R. Martinez& C. Simo, V. Salnikov

- *Potentiels* $H = \frac{1}{2}\sum_i p_i^2 + V(\underline{q})$ *:*

  → Morales & Ramis, Yoshida, Maciejewski& Przybylska & Duval, T. Combot

- *D-finitude des coeffs de monodromie* : → Martinez &Simo, Horozow& Stoyanova, Simon,

  → T. Combot

- Formes réduites (Kolchin-Kovacic reduction) : Blazquez & Morales, Aparicio & Weil
  - Cas réductif (Aparicio-Compoint-Weil 2012)
  - Abélien diagonal : M-R-S effectif (Aparicio-Weil 2011+2013)
  - Cas réductible (2014)

Morales-Ramis-Simo en pratique ?

- *"Morales trick"* : quand (VE_1) obtenues via fcts $\mathcal{P}$ de Weierstrass.

  → M-R-S, A. Maciejewski, M. Przybylska, D. Boucher, J.-A. W., etc.

- *Approches numériques* :

  → S. Simon, R. Martinez& C. Simo, V. Salnikov

- *Potentiels* $H = \frac{1}{2}\sum_i p_i^2 + V(\underline{q})$ *:*

  → Morales & Ramis, Yoshida, Maciejewski& Przybylska & Duval, T. Combot

- *D-finitude des coeffs de monodromie* : → Martinez &Simo, Horozow& Stoyanova, Simon,

  → T. Combot

- Formes réduites (Kolchin-Kovacic reduction) : Blazquez & Morales, Aparicio & Weil
  - Cas réductif (Aparicio-Compoint-Weil 2012)
  - Abélien diagonal : M-R-S effectif (Aparicio-Weil 2011+2013)
  - Cas réductible (2014)

Galois différentiel et intégrabilité : formes réduites

Forme réduite

$$[A] : Y' = AY \quad \text{où} \quad A \in Mat(n,k)$$

$$G = Gal_\partial(A), \quad \mathfrak{g} \text{ algèbre de Lie}; \qquad V = Sol_K([A]).$$

$$Y = P.Z \quad \to Z' = P[A]Z \quad \text{où } P[A] \overset{déf}{=} P^{-1}(AP - P').$$

Definition

On dit que A est **sous forme réduite** si $A \in \mathfrak{g}(k)$. Sinon, $B \in Mat(n,\overline{k})$ **forme réduite** de A si

$\exists\, P \in GL(n,\overline{k})$ tq $B = P[A]$, et

$B \in \mathfrak{g}(\overline{k})$.

Décomposition de Wei-Norman : $A = \sum_{i=1}^{r} a_i(x) M_i, \quad a_i \in k$ et M_i csts.

Algèbre de Lie associée à A : $Lie(A) \overset{déf}{=} \overline{Vect_{[\cdot,\cdot]}(M_i, M_j)}$.

Forme réduite quand $Lie(A) = \mathfrak{g}$.

Théorèmes de réduction (Kolchin-Kovacic)

$$Y' = AY, \quad A := \sum_{i=1}^{r} a_i(x) M_i, \quad Lie(A) := Lie(M_1, \ldots, M_r).$$

Theorem (Kovacic, Kolchin)

$$\mathtt{Lie}(\mathtt{Y}' = \mathtt{AY}) \subset \mathtt{Lie}(\mathtt{A})$$

Theorem (Kolchin-Kovacic Reduction (non constructive))

Let $\mathfrak{h} = Lie(A)$, Lie algebra of a connected group H. Then $G \subset H$ *and* $\exists P \in H(\overline{k})$ *such that system $F' = BF$, with $Y = PF$ and* $B = P[A] = P^{-1}(AP - P')$ *, satisfies* $\mathfrak{g} = Lie(B)$

`Contribution` : preuve constructive + algorithmes de réduction

Un exemple de réduction

$$A = \begin{bmatrix} 1/2\,\frac{x^3-2\,x^2+3\,x-4}{x^2} & 1/2\,\frac{3\,x^2+x+4}{x} & x^2+x \\ 1/2\,\frac{-x^4+2\,x^3-4\,x^2+3\,x-4}{x^3} & 1/2\,\frac{-x^3+3\,x^2-x+4}{x^2} & -x^2+x+1 \\ 1/4\,\frac{-3\,x^3-x^2-2\,x+4}{x^4} & 1/4\,\frac{2\,x^3-x^2-2\,x-4}{x^3} & 1/2\,\frac{-x-2}{x} \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_3 \subsetneq Lie(A) = \mathfrak{sl}_3$$

Invariant de degré 2 :

$> A_2 := Symmetric\_power\_system(A, 2)$:

$> F := RationalSolutions([A_2], [x]);$

$$F = \begin{bmatrix} -4\,x^2-4 & -8\,\frac{x^2-x+1}{x} & 4\,x & -4\,\frac{2\,x^2-2\,x+1}{x^2} & 4 & -\frac{x^2+4}{x^2} \end{bmatrix}^T$$

Réduction : chercher P telle que $Sym^2(P).F = I$, où

$$I = [1, 0, 0, 1, 0, 1]^T$$

Un exemple de réduction (suite)

Recherche de point rationnel sur une conique : on trouve

$$P = \begin{bmatrix} x^{-1} & -1 & 0 \\ \frac{-1+x}{x^2} & x^{-1} & 0 \\ 1/2\,\frac{-1+x}{x} & 1/2 & x \end{bmatrix}$$

et

$$B := P^{-1}[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & x \\ -1 & 0 & x^{-1} \\ -x & -x^{-1} & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{so}_3(C(x)).$$

VI.1 Forme réduite de systèmes réductifs

Caractérisation des formes réduites

$\longrightarrow$ Travail avec Aparicio et Compoint, 2010-2013

Theorem (Aparicio-Compoint-Weil 2010-2013)

Le système $Y' = AY$ est sous `forme réduite` ssi
pour toute construction $\mathfrak{const}(A)$ et solution $Y' = \mathfrak{const}(A)Y$ t.q
$Y = F$ (resp. $Y = exp(f)F$) où $F \in k^N$, on a $F \in C^N$:

`les (semi)-invariants sont constants.`

"construction $\mathfrak{const}$" signifie "combinaisons de $\otimes$, $\oplus$, $\star$, puissances symétriques ou extérieures"

Donne une procédure de réduction pas encore efficace pour les groupes réductifs.

Procédure de réduction

Réduction :

- Calculer $\hat{U} \in GL_n(\,C[[z-z_0]])$ tq $\hat{U}' = A.\hat{U}$ et $\hat{U}(z_0) = \mathrm{Id}$.
- Compoint-Singer + van Hoeij-Weil : solutions rationnelles $\phi_1, \dots, \phi_r$ de $sym^{m_i}(A \oplus \dots \oplus A)$ et $I_i := \phi_i(z_0)$.
  On a $G = \{g \in GL(V) | \forall i, g(I_i) = I_i\}$.
- Système (S) d'équations polynomiales sur $P_{i,j}$

  $$(S): \ \forall i = 1 \dots, r, \quad Sym^{m_i}(P \oplus \cdots \oplus P) \cdot I_i - \phi_i = 0, \ \det(P) \neq 0.$$

- Trouver une solution de (S).
  Résultat : $P \in GL_n(\bar{k})$, $P[A]$ sous forme réduite.

Perspectives - cas réductif

- `Simplifier` (S) : problème de conjugaison d'algèbres de Lie

  `comme pour la descente..`

- `Éviter Compoint-Singer` : passer par une décomposition de $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}^{\star}$ et se ramener à une conjugaison avec une algèbre de Lie "cible".
- Quelles formes réduites sont `"meilleures"` que les autres ?

  `on y reviendra..`

- Réduction locale dans une algèbre de Lie donnée ?

VI.2 Forme réduite et Morales-Ramis-Simó effectif

Formes réduites pour (VE_m)

- Q_1 réduit $A_1 \rightsquigarrow$ $Q_1[A_1]$ $\in Lie(Y' = A_1 Y)$ et Q_m réduit A_m
- $P_{m+1} := \begin{pmatrix} Sym^{m+1} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_m \end{pmatrix}$ réduit partiellement A_{m+1}

On a

$$P_{m+1}\,[A_{m+1}] := \begin{pmatrix} Sym^{m+1} Q_1[sym^{m+1} A_1] & 0 \\ \mathrm{B} & Q_m[A_m] \end{pmatrix}$$

où les `blocs diagonaux` sont sous forme réduite.

`Nous voulons réduire le bloc` B

`Key #1` : Matrice de réduction $\begin{pmatrix} Id & 0 \\ Q_B & Id \end{pmatrix}$ où

$Q_B \in Lie(B) \otimes_C k$

Structure de la sous-algèbre sous-diagonale

La $(m+1)$e VE a ses blocs diagonaux réduits (et abéliens)

$$A := P_{m+1}[A_{m+1}] = A_{diag} + A_{sub} = \begin{pmatrix} Sym^{m+1}Q_1[sym^{m+1}A_1] & 0 \\ B & Q_m[A_m] \end{pmatrix}$$

Soit $\mathfrak{h}_{diag} := Lie(A)_{diag}$ et $\mathfrak{h}_{sub} := Lie(A)_{sub}$. Nous avons

$$A_{sub} := \beta_1(x)B_1 + \ldots + \beta_d(x)B_d \text{ où } \begin{cases} \beta_i(x) \in \mathbf{k} \\ (B_i)_{i=1}^d \quad \text{base de} \quad \mathfrak{h}_{sub} \end{cases}$$

Propriétés : Soit $M \in \mathfrak{h}_{diag}$, $B_1, B_2 \in \mathfrak{h}_{sub}$

- $B_1.B_2 = 0$, $B_1^2 = 0$
- $\exp(f_1 B_1 + f_2 B_2) = Id + f_1 B_1 + f_2 B_2$
- $[M, B_i] \in \mathfrak{h}_{sub}$ ($\mathfrak{h}_{sub}$ idéal de $\mathfrak{h}$)
- Si $P = Id + \sum_i f_i B_i$ alors $P[A] = A + \sum_i f_i [A_{diag}, B_i] - \sum_i f_i' B_i$

Structure de la sous-algèbre sous-diagonale

La $(m+1)$e VE a ses blocs diagonaux réduits (et abéliens)

$$A := P_{m+1}[A_{m+1}] = A_{diag} + A_{sub} = \begin{pmatrix} Sym^{m+1}Q_1[sym^{m+1}A_1] & 0 \\ B & Q_m[A_m] \end{pmatrix}$$

Soit $\mathfrak{h}_{diag} := Lie(A)_{diag}$ et $\mathfrak{h}_{sub} := Lie(A)_{sub}$. Nous avons

$$A_{sub} := \beta_1(x)B_1 + \ldots + \beta_d(x)B_d \text{ où } \begin{cases} \beta_i(x) \in \mathbf{k} \\ (B_i)_{i=1}^{d} \quad \text{base de} \quad \mathfrak{h}_{sub} \end{cases}$$

Propriétés : Soit $M \in \mathfrak{h}_{diag}$, $B_1, B_2 \in \mathfrak{h}_{sub}$

- $B_1.B_2 = 0,\ B_1^2 = 0$
- $\exp(f_1B_1 + f_2B_2) = Id + f_1B_1 + f_2B_2$
- $[M, B_i] \in \mathfrak{h}_{sub}$ ($\mathfrak{h}_{sub}$ idéal de $\mathfrak{h}$)
- Si $P = Id + \sum_i f_i\ B_i$ alors $P[A] = A + \sum_i f_i\ [A_{diag}, B_i] - \sum_i f_i'\ B_i$

Une réduction pour la sous-diagonale

$$A := P_{m+1}[A_{m+1}] = A_{diag} + A_{sub} = \left(\begin{array}{cc} Sym^{m+1}Q_1[sym^{m+1}A_1] & 0 \\ B & Q_m[A_m] \end{array} \right.$$

Soit $\mathfrak{h}_{diag} := Lie(A)_{diag}$ et $\mathfrak{h}_{sub} := Lie(A)_{sub}$. Nous avons

$$A_{sub} := \beta_1(x)B_1 + \beta_2(x)B_2 + \ldots + \beta_d(x)B_d \text{ où } \begin{cases} \beta_i(x) \in \mathbf{k} \\ (B_i)_{i=1,\ldots,d} \text{ base de } \mathfrak{h}_{sub} \end{cases}$$

`Une réduction :` Si $A := A_{diag} + A_{sub}$, notons

$$[A_{diag}, B_1] = \gamma_1 B_1 + \gamma_2 B_2 + \ldots + \gamma_d B_d \quad \text{où } \gamma_i \in \mathbf{k}.$$

Si $y' = \gamma_1 y + \beta_1$ admet une solution $g_1 \in \mathbf{k}$, alors

$$P := \exp(g_1 B_1) = Id + g_1 B_1 \text{ satisfait } P[A] = A_{diag} + \tilde{\beta}_2 B_2 + \ldots + \tilde{\beta}_d$$

i.e. $P[A]$ n'a plus de terme en B_1.

Une réduction pour la sous-diagonale

$$A := P_{m+1}[A_{m+1}] = A_{diag} + A_{sub} = \begin{pmatrix} Sym^{m+1} Q_1[sym^{m+1} A_1] & 0 \\ B & Q_m[A_m] \end{pmatrix}$$

Soit $\mathfrak{h}_{diag} := Lie(A)_{diag}$ et $\mathfrak{h}_{sub} := Lie(A)_{sub}$. Nous avons

$$A_{sub} := \beta_1(x) B_1 + \beta_2(x) B_2 + \ldots + \beta_d(x) B_d \text{ où } \begin{cases} \beta_i(x) \in \mathbf{k} \\ (B_i)_{i=1,\ldots,d} \text{ base de } \mathfrak{h}_{sub} \end{cases}$$

Une réduction : Si $A := A_{diag} + A_{sub}$, notons

$$[A_{diag}, B_1] = \gamma_1 B_1 + \gamma_2 B_2 + \ldots + \gamma_d B_d \quad \text{où } \gamma_i \in \mathbf{k}.$$

Si $y' = \gamma_1 y + \beta_1$ admet une solution $g_1 \in \mathbf{k}$, alors

$$P := \exp(g_1 B_1) = Id + g_1 B_1 \text{ satisfait } P[A] = A_{diag} + \tilde{\beta}_2 B_2 + \ldots + \tilde{\beta}_d$$

i.e. $P[A]$ n'a plus de terme en B_1 .

Comment itérer cette réduction

$$A := P_{m+1}[A_{m+1}] = A_{diag} + A_{sub} = \begin{pmatrix} Sym^{m+1}Q_1[sym^{m+1}A_1] & 0 \\ B & Q_m[A_m] \end{pmatrix}$$

Une réduction :

Notons $[A_{diag}, B_1] = \gamma_1 B_1 + \gamma_2 B_2 + \ldots + \gamma_d B_d$ with $\gamma_i \in \mathbf{k}$.
Si $y' = \gamma_1 y + \beta_1$ admet une solution $g_1 \in \mathbf{k}$, alors

$$P := \exp(g_1 B_1) \text{ satisfait } P[A] = A_{diag} + \tilde{\beta}_2 B_2 + \ldots + \tilde{\beta}_d B_d$$

i.e. $P[A]$ n'a plus de termes en B_1 .

Clé de l'itération : l'abélianité de $Lie(VE_m)$
Notons $\mathfrak{h}_{diag} := Lie(A)_{diag} = span(M_1, \ldots, M_r)$.
Applications adjointes $[M_i, \bullet] : \mathfrak{h}_{sub} \to \mathfrak{h}_{sub}$ commutent donc les $[M_i, \bullet]$
sont cotriangularisables.

En itérant ainsi (comme Jordan), **on obtient un M-R-S effectif.**

Ce que nous donnent les formes réduites

1. Un procédé constructif de test de l'abélianité
2. Une construction "explicite" de l'algèbre de Lie du groupe de Galois
3. Une stratégie vers une "forme normale" le long de solutions de systèmes dynamiques

   Sous forme réduite, les intégrales premières locales sont à coeffs constants