L3 MASS
Université Lille 1

Probabilités Avancées :
Chaînes de Markov

Clément Erignoux *

Ex 1. Sur $\Omega = \mathbb{R}$ on note $\mathcal{F}$ la plus petite tribu qui contient $\{0\}$, $[-1\ ;\ 0[$ et $[0\ ;\ 1]$.

1) Expliciter $\mathcal{F}$ en donnant la liste de ses éléments.

2) Parmi les trois fonctions suivantes, lesquelles sont mesurables de $\mathbb{R}$ muni de $\mathcal{F}$ vers $\mathbb{R}$ muni de la tribu des boréliens ? (justifier)

$$f\ :\ x \longmapsto x \qquad g\ :\ x \longmapsto |x| \qquad h\ :\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{x}{|x|} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Réponse :

1) La plus petite tribu sur $\Omega = \mathbb{R}$ qui contient $\{0\}$, $[-1\ ;\ 0[$ et $[0\ ;\ 1]$ est

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \Big\{ &\emptyset\ ,\ \mathbb{R}\ ,\ \{0\}\ ,\ \mathbb{R}^*\ ,\ [-1;0[\ ,\ ]-\infty;-1[\cup\mathbb{R}_+\ ,\ ]0;1]\ ,\ \mathbb{R}_-\cup]1;+\infty[\ ,\\ &[-1;0]\ ,\ ]-\infty;-1[\cup\mathbb{R}_+^*\ ,\ [0;1]\ ,\ \mathbb{R}_-^*\cup]1;+\infty[\ ,\\ &[-1;1]\setminus\{0\}\ ,\ ]-\infty;-1[\cup\{0\}\cup]1;+\infty[\ ,\ [-1;1]\ ,\ ]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\Big\}\end{aligned}$$

Cet ensemble est stable par passage au complémentaire et par union et intersection dénombrable.

2) La fonction identité f n'est pas $\mathcal{F}$-mesurable puisque $\{2\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$ et $f^{-1}(\{2\}) = \{2\} \notin \mathcal{F}$.

La fonction valeur absolue g n'est pas $\mathcal{F}$-mesurable non plus, $g^{-1}(\{2\}) = \{-2, 2\} \notin \mathcal{F}$.

La fonction h vaut 1 sur $h^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R}_+^* \notin \mathcal{F}$, et n'est donc pas $\mathcal{F}$-mesurable.

Ex 2. Un rat vit dans une cage à trois étages. Pour les besoins d'une expérience, on l'observe à intervalles de temps réguliers. On constate que lorsqu'il est à l'étage du bas, où il dort, il a trois chance sur quatre d'y rester et une chance sur quatre de monter à l'étage 1. Lorsqu'il est à l'étage 1, où se trouve la nourriture, il a une chance sur deux d'y rester, une chance sur quatre de monter à l'étage 2, et une chance sur quatre de descendre à l'étage 0. Lorsqu'il est en haut, à l'étage 2, il a une chance sur deux d'y rester et une chance sur deux de descendre à l'étage 1.

On note X_n le numéro de l'étage où il se trouve au bout de n intervalles de temps.

1) Dessiner le graphe de la chaine de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Quelle est sa matrice de transition ?

---

*Pour toute typo/question, me contacter à *clement.erignoux@inria.fr*. Les notes de cours seront uploadées sur ma page web, http://chercheurs.lille.inria.fr/cerignou/homepage.html

2) Le rat se trouve actuellement à l'étage 2. Quelle est la probabilité que trois intervalles de temps plus tard il soit à l'étage 0 ?

3) La chaine est-elle irréductible ?

4) Quels états sont récurrents ? transients ? Quelle est leur périodicité ?

5) Cette chaine a-t-elle une probabilité réversible ? Si oui, laquelle ? A-t-elle une probabilité invariante ? Si oui, laquelle ?

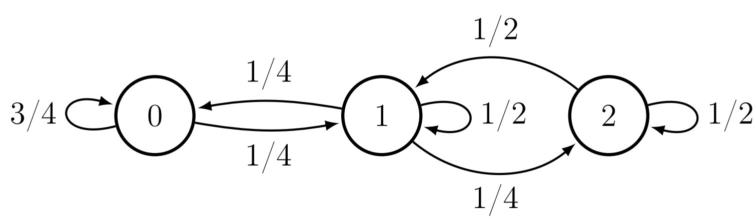
6) En moyenne sur une longue période, quelle proportion de son temps le rat passe-t-il à l'étage 0 ? (justifier)

7) La position du rat à chaque étape dépend de sa position précédente, de sorte que sa position X_n à l'étape n n'est pas indépendante de sa position initiale X_0. Mais intuitivement, quand n est très grand donc au bout d'un temps très long, la position X_n du rat ne dépend presque plus de sa position initiale. Prouver cette indépendance asymptotique en montrant, grâce au théorème de convergence en loi, que

$$\forall e, e' \in \{0,1,2\} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(X_n = e' \ , \ X_0 = e) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = e')P(X_0 = e)$$

Réponse :

1) $(X_n)_n$ est une chaine de Markov homogène de graphe et de matrice



$$\pi = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2) Observons le rat à partir du moment où il se trouve à l'étage 2, donc en prenant $X_0 = 2$, ce qui correspond à une loi initiale $\mu_0 = (0, 0, 2)$. On note μ_n la loi de X_n et on veut trouver la probabilité $\mu_3(\{0\})$ qu'il soit à l'étage du bas trois intervalles de temps plus tard.

$$\mu_1 = (0,0,1)\pi = (0, 1/2, 1/2) \qquad \mu_2 = (0, 1/2, 1/2)\pi = (1/8, 1/2, 3/8)$$

$$\mu_3 = (1/8, 1/2, 3/8)\pi = (\frac{3}{32} + \frac{1}{8}, \frac{1}{32} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16}, \frac{1}{8} + \frac{3}{16}) = (\frac{7}{32}, \frac{15}{32}, \frac{10}{32})$$

La probabilité que le rat soit à l'étage 0 trois intervalles de temps plus tard est de 7 chances sur 32.

3) La chaine est irréductible (tout état est accessible à partir des autres)

4) L'irréductibilité implique que tous les états ont la même période, qui vaut 1 car $P(X_1 = 1|X_0 = 1) > 0$ par exemple. La chaine est donc apériodique. Au moins un état est récurrent puisque l'espace d'états est fini. L'irréductibilité implique qu'ils sont tous de même nature donc tous récurrents.

5) S'il existe une probabilité réversible $\mu = (a, b, c)$, elle doit satisfaire les conditions

$$a\,\frac{1}{4} = b\,\frac{1}{4} \qquad b\,\frac{1}{4} = c\,\frac{1}{2} \qquad a \times 0 = c \times 0 \qquad \text{i.e.} \qquad a = b = 2c$$

La probabilité $\mu = (2/5, 2/5, 1/5)$ est réversible, et aussi invariante puisque toute probabilité réversible est aussi invariante. La chaine étant irréductible, il y a unicité de la probabilité stationnaire.

6) La chaine est irréductible de probabilité stationnaire $\mu = (2/5, 2/5, 1/5)$ donc d'après le théorème ergodique

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{X_n=0} = \frac{n}{n+1}\,\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{X_n=0} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \int \mathbf{1}_{x=0}\, d\mu(x) = 2/5$$

En moyenne sur une longue période, le rat passe 40% de son temps à l'étage du bas.

7) La chaine étant irréductible et apériodique de probabilité stationnaire $(2/5, 2/5, 1/5)$, le théorème de convergence en loi assure que pour tout état initial e et tout autre état e' on a $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = e'|X_0 = e) = \mu(\{e'\})$ autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty} P(\{X_n = e'\} \cap \{X_0 = e\}) = \mu(\{e'\})P(X_0 = e)$$

Le conditionnement par tous les cas possibles $P(X_n = e') = \sum_{i=0}^{2} P(X_n = e'|X_0 = i)P(X_0 = i)$ entraine

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = e') = \sum_{i=0}^{2} \mu(\{e'\})P(X_0 = i) = \mu(\{e'\})$$

Finalement

$$\forall e, e' \in \{0,1,2\} \quad \lim_{n\to+\infty} P(X_n = e'\ ,\ X_0 = e) = \mu(\{e'\})P(X_0 = e) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = e')P(X_0 = e)$$

Ex 3. Abreuvoir automatique

Un élevage est équipé d'un abreuvoir automatique qui ne peut être utilisé que par un animal à la fois. On suppose qu'à chaque minute, il y a une probabilité $\frac{1}{2}$ qu'un seul animal vienne boire, une probabilité $\frac{1}{6}$ que deux animaux viennent boire et une probabilité $\frac{1}{3}$ qu'aucun animal ne vienne. Si un animal qui arrive trouve l'abreuvoir libre, il boit pendant une minute et s'en va, sinon il attend. On suppose qu'il n'y a jamais plus de deux animaux en attente, c'est-à-dire qu'un animal qui trouve l'abreuvoir occupé avec déjà deux bêtes en attente renonce à boire et s'en va (de même, si deux animaux arrivent en même temps et qu'il y a déjà une bête en attente, un seul des deux arrivants fait la queue et l'autre renonce).

On note X_n le nombre d'animaux au temps n à l'abreuvoir (en attente ou en train de boire). A l'instant 0 (mise en service de l'abreuvoir) on a $X_0 = 0$.

1) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène. Quel est son espace d'états ? Tracer le graphe correspondant et donner la matrice de transition P.

2) A l'instant 0, l'abreuvoir est inutilisé. Calculer la probabilité qu'il soit utilisé pour la première fois à l'instant k. Au bout de combien de temps, en moyenne, commence-t-il à être utilisé ?

3) Sachant qu'à l'instant 0 il n'y aucun animal à l'abreuvoir, calculer la probabilité qu'un animal qui se présente seul à l'instant 3 n'ait pas à attendre.

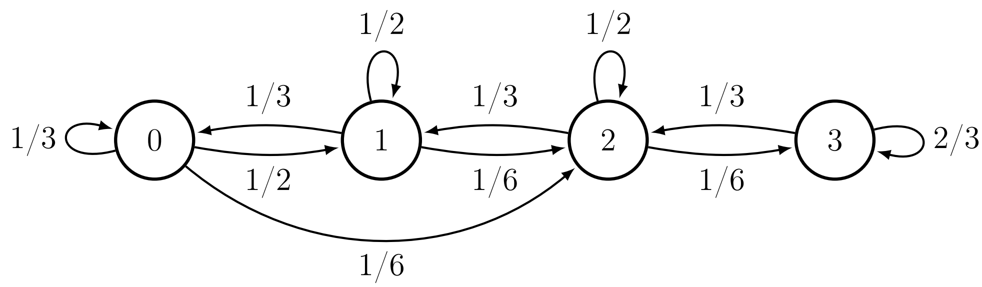
4) Si à l'instant 10 il y a deux bêtes en attente, calculer la probabilité que la situation soit la même à l'instant 15 et que l'abreuvoir soit resté inutilisé au moins une minute entre-temps.

5) X_n a-t-elle une loi limite quand n devient grand ? Si oui, la calculer. Que peut-on en déduire sur la convergence éventuelle (et la limite) de la suite des P^n ?

6) L'éleveur est prêt à investir dans un second abreuvoir si, plus de la moitié du temps, il y a deux animaux en attente. Il reste un long moment à coté de l'abreuvoir après sa mise en service et observe la proportion de temps où deux animaux attendent. Que constate-t-il ? Doit-il installer un deuxième abreuvoir ?

Réponse :

1) Le nombre X_n d'animaux en attente ou en train de boire à l'instant n peut valoir 0, 1, 2 ou 3, pas plus puisqu'il n'y a jamais plus de deux animaux en attente. L'espace d'états est donc $E = \{0, 1, 2, 3\}$. Puisque à chaque minute, il y a une probabilité $\frac{1}{2}$ qu'un seul animal vienne boire, une probabilité $\frac{1}{6}$ que deux animaux viennent boire et une probabilité $\frac{1}{3}$ qu'aucun animal ne vienne, et qu'un animal qui trouve l'abreuvoir occupé avec déjà deux bêtes en attente renonce à boire, le graphe est :



$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

2) A chaque minute indépendamment, la probabilité que l'abreuvoir ne soit pas encore utilisé est de $1/3$. Le nombre de minutes jusqu'à la première où il est utilisé suit donc la loi géométrique de paramètre $2/3$, qui a pour espérance $3/2$: en moyenne, l'abreuvoir commence à être utilisé au bout de $1,5$ minutes. La probabilité qu'il soit utilisé pour la première fois à l'instant k est $\frac{2}{3}(\frac{1}{3})^{k-1}$.

3) La probabilité qu'un animal qui se présente seul à l'instant 3 n'ait pas à attendre est la probabilité qu'à l'instant précédent il n'y ait que zéro ou un animal à l'abreuvoir :

$$\begin{aligned}
&P(X_2 \in \{0,1\} | X_0 = 0) \\
&= P(X_2 = 0 | X_0 = 0) + P(X_2 = 1 | X_0 = 0) \\
&= P(X_2 = 0, X_1 = 0 | X_0 = 0) + P(X_2 = 0, X_1 = 1 | X_0 = 0) \\
&\quad + P(X_2 = 1, X_1 = 0 | X_0 = 0) + P(X_2 = 1, X_1 = 1 | X_0 = 0) + P(X_2 = 1, X_1 = 2 | X_0 = 0) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{9}{12}
\end{aligned}$$

4) Sachant que $X_{10} = 3$, on ne peut avoir $X_{15} = 3$ en étant passé par l'état 0 que par une seule trajectoire :

$$\begin{aligned}
&P(X_{15} = 3 \text{ et } X_n = 0 \text{ pour un } n | X_{10} = 3) \\
&= P(X_{15} = 3, X_{14} = 2, X_{13} = 0, X_{12} = 1, X_{11} = 2 | X_{10} = 3) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{972}
\end{aligned}$$

5) La chaine est irréductible (tout état est accessible à partir des autres) donc tous les états ont la même période, qui vaut 1 car $P(X_1 = 0 | X_0 = 0) > 0$ par exemple. La chaine est donc apériodique. Toute chaine de Markov homogène, irréductible et apériodique sur l'espace d'états fini $E = \{0, 1, 2, 3\}$ converge en loi vers son unique probabilité invariante μ. Pour calculer cette

probabilité limite μ, on cherche d'abord si la chaine a une probabilité réversible (c'est plus facile) car on sait qu'une réversible est toujours invariante.

$$\mu = (a,b,c,d) \text{ réversible} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{b}{3} \\ \frac{a}{6} = 0 \\ \frac{b}{6} = \frac{c}{3} \\ \frac{c}{6} = \frac{d}{3} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad a = b = c = d = 0 \qquad \text{impossible !}$$

Pas de probabilité réversible. On cherche alors la probabilité invariante :

$$\begin{aligned} &(a,b,c,d) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = (a,b,c,d) \\ \Longleftrightarrow \quad & \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{3}, \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}, \frac{a}{6} + \frac{b}{6} + \frac{c}{2} + \frac{d}{3}, \frac{c}{6} + \frac{2d}{3} \right) = (a,b,c,d) \\ \Longleftrightarrow \quad & \begin{cases} b = 2a \\ 3a + 3b + 2c = 6b \\ a + b + 3c + 2d = 6c \\ c + 4d = 6d \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} b = 2a \\ 3a + 2c = 3b = 6a \\ 3a + 2d = 3c \\ c = 2d \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} b = 2a \\ 2c = 3a \\ c = 2d \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $a+b+c+d = 1$ i.e. $a + 2a + \frac{3a}{2} + \frac{3a}{4} = 1$ i.e. $12a + 6a + 3a = 4$ ceci impose $a = \frac{4}{21}$ et donc $\mu = \left(\frac{4}{21}, \frac{8}{21}, \frac{4}{14}, \frac{2}{14}\right)$. On a donc

$$\forall e_0 \in E \quad \forall e \in E \qquad \lim_{n \to +\infty} P(X_n = e | X_0 = e_0) = \mu(e)$$

La formule de conditionnement par tous les cas possibles donne

$$\forall (x,y,z,t) \in (\mathbb{R}^+)^4 \qquad \lim_{n \to +\infty} (x,y,z,t)\pi^n = (x+y+z+t) \left(\frac{4}{21}, \frac{8}{21}, \frac{4}{14}, \frac{2}{14} \right)$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \pi^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{21} & \frac{8}{21} & \frac{4}{14} & \frac{2}{14} \\ \frac{4}{21} & \frac{8}{21} & \frac{4}{14} & \frac{2}{14} \\ \frac{4}{21} & \frac{8}{21} & \frac{4}{14} & \frac{2}{14} \\ \frac{4}{21} & \frac{8}{21} & \frac{4}{14} & \frac{2}{14} \end{pmatrix}$$

6) La chaine étant irréductible de probabilité stationnaire $\mu = \left(\frac{4}{21}, \frac{8}{21}, \frac{4}{14}, \frac{2}{14}\right)$, le théorème ergodique indique que

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{X_n = 3} = \frac{n}{n+1} \, \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{X_n = 3} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} \int \mathbf{1}_{x=3} \, d\mu(x) = \frac{2}{14}$$

En moyenne sur une longue période, il y a deux animaux en attente pendant un septième du temps seulement. Il est inutile d'acheter un deuxième abreuvoir.