Probabilités avancées
Master 2 Sciences, Mention Math.
Parcours recherche

DS1 - 2h - Version française

13 Octobre 2022

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 : Processus de Poisson

Soit un processus de Poisson $\{N_t, \mathscr{F}_t; t \geq 0\}$ d'intensité $\lambda > 0$.
1) Montrer que $\{X_t := N_t - \lambda t, \mathscr{F}_t; t \geq 0\}$ est une martingale ;
2) Montrer que $\{X_t^2 - \lambda t, \mathscr{F}_t; t \geq 0\}$ est une martingale.

Exercice 2 : Sous-martingales

Soit $\{X_t, \mathscr{F}_t; t \geq 0\}$ une sous-martingale continue à droite et T un temps d'arrêt. Montrer que $\{X_{T\wedge t}, \mathscr{F}_t; t \geq 0\}$ est une sous-martingale.

Indice. Admettre que $X_{T\wedge t}$ est $\mathscr{F}_{T\wedge t}$-mesurable, et $\mathbb{E}[|X_{T\wedge t}|] < \infty$.

Exercice 3 : Martingales à variations finies

Soit $\{M_t, \mathscr{F}_t; t \in [0, T]\}$ une martingale de carré intégrable continue. On suppose que $M_0 = 0$, $\mathbb{P}$-p.s.
1) Montrer que si $\langle M \rangle_T = 0$, alors $M_t = 0$, $\forall\, t \in [0, T]$, $\mathbb{P}$-p.s.
2) Une fonction $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ est dite à *variations finies*

$$V(f) := \sup_{\Pi:\,\text{partition de }[0,T]} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \left| f(t_k) - f(t_{k-1}) \right| \right\} < \infty,$$

où $\Pi = \{0 = t_0 \leq \ldots \leq t_m = T\}$. Si M est à variations finies, $\mathbb{P}$-p.s., montrer que $M_t = 0$, $\forall\, t \in [0, T]$, $\mathbb{P}$-p.s.
3) L'affirmation précédente est elle vraie si M n'est plus supposée continue ?

Exercice 4 : Pont Brownien

Soit $\{W_t, \mathscr{F}_t^W; t \geq 0\}$ un processus de Wiener (Mouvement Brownien standard 1-d, $W_0 = 0$). Fixons $T > 0$ et définissons $B_t := \mathbb{E}[W_t | W_T = 0]$, $\forall\, t \in [0, T]$.
1) Quelle est la distribution de B_t pour $t \in [0, T]$?
2) Calculer $\mathrm{cov}(s, t) := \mathbb{E}[B_s B_t]$ pour s, $t \in [0, T]$.
3) Montrer que $\{B_t; t \in [0, T]\}$ admet une modification $\mathbb{P}$-a.s. continue.