Probabilités avancées
Master 2 Sciences, Mention Math.
Parcours recherche

DS2 - 2h - Version Française

15 Décembre 2022

— *Toutes les variables alétoires sont définies sur un espace de proba. fixé* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.
— *Les exercices sont indépendants, jetez un coup d'oeil à tous les exercices avant de vous lancer.*
— *Les points de chaque exercices sont donnés à titre indicatifs, et sont susceptibles d'être modifiés. Il n'est pas nécessaire de résoudre tout le sujet pour obtenir tous les points.*

Exercice 1 : Marches alétoires sur $\mathbb{N}$, $\sim$ 12pts

On considère une marche alétoire en temps continu X_t sur $\mathbb{N}$, sautant de x vers $x+1$ à taux $p \in]0,1[$ pour $x \in \mathbb{N}$, et sautant à taux $q := 1-p$ de x à $x-1$ pour $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1) Écrire la matrice d'intensité de ce processus de Markov et donner sa representation graphique. Quelles sont les classes communicantes de ce processus ?

2) On s'intéresse aux états stationnaires de ce processus de Markov. On suppose que X_t admet une mesure de probabilités stationnaire, notée μ.
(i) Quel est le support de μ ? Justifier que $p\mu(0) = q\mu(1)$ et pour tout $x = \{1, 2, \dots\}$

$$p(\mu(x-1) - \mu(x)) = q(\mu(x) - \mu(x+1)).$$

3) Dans les trois cas ci-dessous, déterminer s'il existe une mesure réversible, ou stationnaire au processus, et si oui l'expliciter. Interpréter le resultat en fonction du comportement en temps long de $(X_t)_{t\geq 0}$.

(i) $p = 1/2$ (ii) $p > 1/2$ (iii) $p < 1/2$.

4) Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $\mathbb{P}_k$ la distribution de $(X_t)_{t\geq 0}$ avec condition initiale $X_0 = k$, et soit $\mathbb{E}_k$ l'espérance correspondante. On définit T_k comme le premier temps X_t atteint k. Soit $K \in \mathbb{N}$ fixé, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$g_n = \mathbb{P}_n(T_K \leq T_0).$$

Indice : trouver une équation satisfaite par les g_n.

5) On suppose maintenant que $p = 1$. Quelles sont les classes communicantes du processus ? Pour $X_0 = 0$, quelle est la distribution du processus $(X_t)_{t\geq 0}$?

Exercice 2 : PGD pour variables exponentielles et de Poisson, ~ 12pts

1) On considère d'abord une suite i.i.d. de variables de Poisson $P_k \sim Poi(\lambda)$.
   (i) Calculer la log-MGF $\Lambda_P(t)$ de P_1.
   (ii) Après avoir justifié de son existence, calculer selon la valeur de $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} P_k \geq nx\right).$$

2) On considère maintenant une suite i.i.d. de variables exponentielles $E_k \sim Exp(\lambda)$.
   (i) Calculer la log-MGF $\Lambda_E(t)$ de E_1.
   (ii) Après avoir justifié de son existence, calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} E_k \geq nx\right).$$

3) (i) Considérons un Processus de Poisson à taux λ, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(Poi(\lambda t) \geq n\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} E_k \leq t\right).$$

   (ii) Pour $x > 0$, on considère $P^x \sim Poi(\lambda x)$, justifier que pour tout $x > 0$,

$$\Lambda^{\star}_{P^x}(1) = x\Lambda^{\star}_{P}(1/x).$$

Déduire des questions précédentes un identité entre les transformées de Cramér $\Lambda^{\star}_{P}$ et $\Lambda^{\star}_{E}$ de variables de Poisson et exponentielles, et vérifier cette relation avec les réponses aux premières questions.

Exercice 3 : Continuité et tribus, ~ 8pts

Soit $X = \{X_t; t \geq 0\}$ un processus stochastique à valeurs réelles défini sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ et $\{\mathscr{F}^X_t; t \geq 0\}$ sa filtration naturelle. Montrer ce qui suit.

1. Si X est continu à gauche, alors $\{\mathscr{F}^X_t\}$ est continue à gauche.
2. Si X est continu à droite et si $\tau := \inf\{t \geq 0; X_t > 1\}$, alors

$$\{\tau < t\} \in \mathscr{F}^X_t, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Indice : Utiliser que la filtration naturelle est définie comme

$$\mathscr{F}^X_t := \sigma(X_s; s \in [0, t]), \quad \forall\, t \geq 0.$$

Exercice 4 Mouvement Brownian réfléchi, $\sim$ 8pts

Soit $\{B_t; t \geq 0\}$ un mouvement brownien standard en dimension 1, avec $B_0 = 0$.

1. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $0 < t_1 < \ldots < t_n$, calculer la densité jointe de probabilités de $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$.
2. Définissons $\{W_t; t \geq 0\}$ en réfléchissant B_t en -1 :

$$W_t(\omega) := \begin{cases} B_t(\omega), & \text{si} \quad B_t(\omega) \geq -1, \\ -2 - B_t(\omega), & \text{si} \quad B_t(\omega) < -1. \end{cases}$$

   Calculer la densité de probabilités de W_t.