M61B, Probabilités et intégration
Licence 3e année
Parcours mathématiques

DS1 – 2h

20 Mars 2021

- *La note maximale est 20, il n'y a pas besoin de traiter tout le DS pour l'obtenir. Parcourez rapidement tous les exercices avant de vous lancer, afin de vous concentrer en priorité sur ceux que vous maîtrisez le mieux.*
- *Les exercices sont indépendants entre eux, mais dans un même exercice, les questions ne le sont pas : pensez à utiliser les questions précédentes.*
- *Attention, les questions faciles valent moins de points, attaquez vous aussi à des questions difficiles !*

Exercice 1 : Questions de cours, 5 pts

1) Donner la définition d'une tribu sur un ensemble E. Qu'appelle t-on un *ensemble mesurable* ?
2) Donner la définition d'une *mesure* sur un espace mesurable $(E, \mathscr{T})$.
3) Quelle(s) propriété(s) doit satisfaire une densité de probabilités sur $\mathbb{R}$? Soit X une variable aléatoire réelle à densité, de densité f_X. Donner, sous la forme d'une probabilité, et sous la forme d'une intégrale, les expressions de la fonction de répartition de X.
4) Énoncer le théorème de convergence monotone.

Exercice 2 : 7 pts

On définit
$$\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big\{\{x_1, x_2, \dots x_n\},\ x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}\Big\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$$
l'ensemble des parties finies de $\mathbb{R}$. On considère $\mathscr{T} = \sigma(\mathcal{F})$ la tribu engendrée par $\mathcal{F}$, et on définit $\mathscr{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'ensemble des parties A de $\mathbb{R}$ telles que A est (fini ou) dénombrable ou A^c est (fini ou) dénombrable.
1) Montrer que $\mathscr{C}$ est une tribu.
2) Montrer que $\mathscr{C} = \mathscr{T}$.
3) Comparer, au sens de l'inclusion, $\mathscr{T}$ à la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.
4) Soit f une application *injective* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est mesurable lorsque $\mathbb{R}$ est muni au départ et à l'arrivée de la tribu $\mathscr{T}$.
5) Donner une application f, mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, et qui ne l'est pas de $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$.

Exercice 3 : 5 pts

Soit Y une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que Y est sans mémoire si, pour tous $n,\ m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y > n) > 0$ et

$$\mathbb{P}(Y > n + m \mid Y > n) = \mathbb{P}(Y > m).$$

1) On suppose que Y suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Démontrer que Y est sans mémoire. Interpréter ce résultat en considérant une suite d'épreuves répétées.
2) Réciproquement, on suppose que Y est sans mémoire. Démontrer que $\mathbb{P}(Y > 0) = 1$ et qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(Y > n) = (1 - p)^n.$$

3) En déduire que Y suit une loi géométrique.

Exercice 4 : 5 pts

On considère X et Y deux variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}$, et on suppose que pour tous entiers $i,\ j \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{\alpha}{i!j!}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1) Déterminer le réel α.
2) Déterminer la loi des variables X et Y.
3) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
4) Quelle est l'espérance de $X + Y$?

Exercice 5 : 7 pts

Le fonctionnement d'une machine est perturbé par des pannes. On considère les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 définies par : X_1 est le temps, exprimé en heures, écoulé entre la mise en route de la machine et la première panne. X_2 (resp. X_3), est le temps, en heures, écoulé entre la remise en route de la machine après la première (resp. la deuxième) panne et la panne suivante. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi exponentielle de paramètre 1/2, dont la densité est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-x/2} \mathbf{1}_{\{x>0\}}.$$

1) Quelle est la durée moyenne de fonctionnement entre deux pannes consécutives ?
2) Soit E l'événement : "chacune des 3 périodes de fonctionnement de la machine dure plus de 2 heures". Calculer $\mathbb{P}(E)$.

3) Soit Y la variable aléatoire égale à la plus grande des 3 durées de fonctionnement de la machine sans interruption.

(i) Calculer $\mathbb{P}(Y \leq t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Soit Z une variable aléatoire réelle à densité de densité f_Z, notons F_Z sa fonction de répartition. F_Z est-elle dérivable ? Si oui, quelle est sa dérivée ?

(iii) Montrer que Y est une variable à densité et déterminer sa densité f_Y.

4) Pour $a < 0$, rappeler la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} te^{at}dt.$$

Démontrer que la variable aléatoire Y admet une espérance, dont on calculera, en heures et minutes, la valeur.

Exercice 6 : 6 pts

Étant donné X une variable aléatoire réelle de densité f_X, on appelle entropie de X la quantité suivante, si elle existe,

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \ln f_X(x)dx.$$

1) Calculer l'entropie d'une loi aléatoire uniforme sur le segment $[a, b]$.

2) On suppose que X suit une loi normale, d'espérance m et variance σ^2, i.e. $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, dont on rappelle la densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

(i) Rappeler l'expression de l'espérance et de la variance de X, sous formes d'intégrales de f_X.

(ii) Montrer que $h(X) = \frac{1}{2}(1 + \ln(2\pi\sigma^2))$.

3) On souhaite prouver que, parmi les variable aléatoires de variance donnée, les lois normales admettent une entropie maximale. On fixe Y une variable aléatoire réelle centrée (c'est à dire d'espérance nulle), de densité f_Y et de variance σ^2, admettant une entropie. On note φ la densité d'une loi normale centrée ($m = 0$), de variance σ^2. On suppose que les fonctions

$$x \mapsto f_Y(x) \ln \frac{\varphi(x)}{f_Y(x)} \quad \text{et} \quad x \mapsto f_Y(x) \ln \varphi(x)$$

sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

(i) Démontrer que pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.

(ii) Vérifier que

$$h(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x) \ln \frac{\varphi(x)}{f_Y(x)}dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x) \ln \varphi(x)dx.$$

(iii) En déduire que $h(Y) \leq \frac{1}{2}(1 + \ln(2\pi\sigma^2))$.