Corrigé du DS1 – 2h

20 Mars 2021

Je ne suis pas à l'abri d'étourderies/typos non plus! N'hésitez pas à m'envoyer celles que vous trouvez à clement.erignoux@inria.fr.

Exercice 2 : 7 pts

On définit

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big\{ \{x_1, x_2, \dots x_n\},\ x_1, \dots x_n \in \mathbb{R} \Big\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

l'ensemble des parties finies de $\mathbb{R}$. On considère $\mathscr{T} = \sigma(\mathcal{F})$ la tribu engendrée par $\mathcal{F}$, et on définit $\mathscr{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'ensemble des parties A de $\mathbb{R}$ telles que A est (fini ou) dénombrable ou A^c est (fini ou) dénombrable.

1) Montrer que $\mathscr{C}$ est une tribu.
2) Montrer que $\mathscr{C} = \mathscr{T}$.
3) Comparer, au sens de l'inclusion, $\mathscr{T}$ à la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.
4) Soit f une application *injective* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est mesurable lorsque $\mathbb{R}$ est muni au départ et à l'arrivée de la tribu $\mathscr{T}$.
5) Donner une application f, mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, et qui ne l'est pas de $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$.

<u>*Solution*</u> :

1) L'ensemble vide est dénombrable, et est le complémentaire de $\mathbb{R}$, donc $\mathbb{R}$, $\emptyset \in \mathscr{C}$. Par définition, $\mathscr{C}$ est également stable par passage au complémentaire. Enfin, considérons une union dénombrable $\cup A_n$ d'ensembles dénombrables ou de complémentaire dénombrables. Si tous les A_n sont dénombrables, alors $\cup A_n$ l'est aussi. Si ce n'est pas le cas, au moins l'un des A_n, noté A_{n_0} est de complémentaire dénombrable. Or $(\cup A_n)^c = \cap A_n^c \subset A_{n_0}^c$ et est donc dénombrable. L'ensemble $\mathscr{C}$ est donc bien une tribu.

2) Par construction, $\mathcal{F} \subset \mathscr{C}$ et donc en particulier, $\mathscr{T} = \sigma(\mathcal{F}) \subset \mathscr{C}$ puisque $\mathscr{C}$ est une tribu. Il suffit donc de montrer l'inclusion inverse. Soit $A \in \mathscr{C}$, soit A, soit A^c, est dénombrable par définition. On veut montrer que $A \in \mathscr{T}$, commençons par supposer que A est dénombrable, auquel cas $A = \cup_{a\in A}\{a\} \in \sigma(\mathcal{F})$ en tant qu'union dénombrable de parties finies de $\mathbb{R}$, puisque $\sigma(\mathcal{F})$ est une tribu contenant $\mathcal{F}$. Si A^c est dénombrable, $A^c \in \mathscr{T}$, et donc $A \in \mathscr{T}$ car $\mathscr{T}$ est une tribu. Dans tous les cas, on a donc $A \in \mathscr{T}$, ce qui donne l'inclusion inverse.

3) Toute partie finie $x_1, \dots x_n$ de $\mathbb{R}$ est un borélien, puisqu'elle peut s'écrire comme

$$\{x_1, \dots, x_n\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left[\bigcup_{j=1}^{n}]x_j - 1/k, x_j + 1/k[\right].$$

Par conséquent, $\mathscr{F} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, et donc $\mathscr{T} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, puisque c'est la plus petite tribu contenant $\mathscr{F}$.

4) Soit f une application injective $(\mathbb{R}, \mathscr{T}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T})$. Soit $A \in \mathscr{T}$, supposons que A est dénombrable. Alors, comme f est injective, $card(f^{-1}(A)) \le card(A)$, donc $f^{-1}(A)$ est dénombrable aussi. Si A^c est dénombrable, alors $\left(f^{-1}(A)\right)^c = f^{-1}(A^c)$ est dénombrable, et $f^{-1}(A) \in \mathscr{T}$. Dans tous les cas, $f^{-1}(A) \in \mathscr{T}$ et f est donc mesurable.

5) Il faut naturellement chercher une application non-injective. Prenons par exemple $f = \mathbf{1}_{]0,1[}$, qui est bien borélienne en tant qu'indicatrice d'un borélien, mais n'est pas $\mathscr{T}$-mesurable, puisque $\{1\} \in \mathscr{T}$, et $f^{-1}(\{1\}) =]0, 1[$ n'est ni dénombrable, ni de complémentaire dénombrable. □

Exercice 3 : 5 pts

Soit Y une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que Y est sans mémoire si, pour tous n, $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y > n) > 0$ et

$$\mathbb{P}(Y > n + m \mid Y > n) = \mathbb{P}(Y > m).$$

1) On suppose que Y suit une loi géométrique. Démontrer que Y est sans mémoire. Interpréter ce résultat en considérant une suite d'épreuves répétées.
2) Réciproquement, on suppose que Y est sans mémoire. Démontrer que $\mathbb{P}(Y > 0) = 1$ et qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(Y > n) = (1 - p)^n.$$

3) En déduire que Y suit une loi géométrique.

Solution :

1) Pour une variable géométrique,

$$\mathbb{P}(Y > n) = \sum_{k>n} \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k>n} p(1-p)^{k-1} = \frac{p(1-p)^n}{1-(1-p)} = (1-p)^n > 0$$

ce dont on déduit que

$$\mathbb{P}(Y > n + m \mid Y > n) = \frac{\mathbb{P}(Y > n + m, Y > n)}{\mathbb{P}(Y > n)} = \frac{\mathbb{P}(Y > n + m)}{\mathbb{P}(Y > n)} = \frac{(1-p)^{n+m}}{(1-p)^n} = \mathbb{P}(Y > m).$$

Comme par ailleurs $\mathbb{P}(Y > n) > 0$ pour tout n, la loi géométrique est bien sans mémoire. La loi géométrique représente le premier succès parmi des tirages successifs indépendants. Si au rang n on a pas encore eu de succès, les tirages suivants ne dépendent pas du passé, et donc en sachant que l'on n'a pas eu de succès avant le rang n, la probabilité que l'on ait pas encore eu de succès au rang $n+m$ est celle de n'avoir pas de succès dans m tirages successifs, qui est naturellement $\mathbb{P}(Y > m)$.

2) Si Y est sans mémoire, on a pour $n = m = 0$, $\mathbb{P}(Y > 0) = \mathbb{P}(Y > 0 \mid Y > 0) = \mathbb{P}(Y > 0)/\mathbb{P}(Y > 0) = 1$, car par définition $\mathbb{P}(Y > 0) > 0$. Pour $m = 1$ et n quelconque, on a alors en développant la probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}(Y > n+1) = \mathbb{P}(Y > 1)\mathbb{P}(Y > n).$$

On pose $p = 1 - \mathbb{P}(Y > 1)$, et la formule ci dessus donne $\mathbb{P}(Y > n) = (1-p)^n$. On ne peut pas avoir $p = 1$ puisque $\mathbb{P}(Y > 1) > 0$. Par ailleurs, si $p = 0$, on aurait

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y > n-1) - \mathbb{P}(Y > n) = 0,$$

ce qui contredit $\sum_n \mathbb{P}(y = n) = 1$.

3) On utilise la question précédente :

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y > n-1) - \mathbb{P}(Y > n) = p(1-p)^{n-1}.$$

□

Exercice 4 : 5 pts

On considère X et Y deux variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}$, et on suppose que pour tous entiers $i,\ j \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{\alpha}{i!j!}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1) Déterminer le réel α.
2) Déterminer la loi des variables X et Y.
3) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
4) Quelle est l'espérance de $X + Y$?

SOLUTION :

1) $\mathbb{P}$ étant une mesure de probabilité, on doit avoir

$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = 1.$$

Or, on reconnaît la série entière de l'exponentielle

$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}} \frac{\alpha}{i!j!} = e^1\alpha \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{j!} = \alpha e^2,$$

et donc $\alpha = e^{-2}$.

2) Par la formule des probabilités totales, on peut écrire

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{e^{-1}}{i!} = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!},$$

pour $\lambda = 1$. On reconnaît une loi de Poisson de paramètre 1. Les mêmes calculs donnent la même loi pour Y.

3) On déduit de la question précédente $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$, les variables X et Y sont donc indépendantes.

4) L'espérance étant linéaire, $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$. l'espérance d'une loi de Poisson est λ, par conséquent $\mathbb{E}(X + Y) = 2$. □

Exercice 5 : 7 pts

Le fonctionnement d'une machine est perturbé par des pannes. On considère les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 définies par : X_1 est le temps, exprimé en heures, écoulé entre la mise en route de la machine et la première panne. X_2 (resp. X_3), est le temps, en heures, écoulé entre la remise en route de la machine après la première (resp. la deuxième) panne et la panne suivante. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi exponentielle de paramètre $1/2$, dont la densité est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-x/2} \mathbf{1}_{\{x>0\}}.$$

1) Quelle est la durée moyenne de fonctionnement entre deux pannes consécutives ?

2) Soit E l'événement : "chacune des 3 périodes de fonctionnement de la machine dure plus de 2 heures". Calculer $\mathbb{P}(E)$.

3) Soit Y la variable aléatoire égale à la plus grande des 3 durées de fonctionnement de la machine sans interruption.

(i) Calculer $\mathbb{P}(Y \leq t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Soit Z une variable aléatoire réelle à densité de densité f_Z, notons F_Z sa fonction de répartition. F_Z est-elle dérivable ? Si oui, quelle est sa dérivée ?

(iii) Montrer que Y est une variable à densité et déterminer sa densité f_Y.

4) Pour $a < 0$, rappeler la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t e^{at} dt.$$

Démontrer que la variable aléatoire Y admet une espérance, dont on calculera, en heures et minutes, la valeur.

<u>*Solution*</u> :

1) C'est l'espérance d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/2$, c'est donc $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda = 2h$.

2) Les X_i sont indépendantes et de même loi, on peut donc écrire

$$\mathbb{P}(X_i \geq 2 \ \text{ for } i = 1,\ 2,\ 3) = \mathbb{P}(X_1 \geq 2)^3 = \left[\int_2^\infty \frac{1}{2} e^{-x/2} dx\right]^3 = e^{-3}.$$

3) On définit $Y = \max_{1 \leq i \leq 3} X_i$.

(i) Comme les X_i sont i.i.d., on peut écrire

$$\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t)^3 = (1 - e^{-t/2})^3 \mathbf{1}_{\{t>0\}}.$$

(Si besoin on recalcule la fonction de répartition $F(t)$ d'une loi exponentielle de paramètre $1/2$).

(ii) On a la formule

$$F_Z(x) = \int_{-\infty}^x f_Z(t) dt,$$

F_Z est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, C^1 sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée f_Z.

(iii) On a montré précédemment que

$$F_Y(t) = (1 - e^{-t/2})^3 \mathbf{1}_{\{t>0\}},$$

qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est donc la densité de probabilité de Y, et est donnée par

$$f_Y(t) = \frac{3}{2} e^{-t/2} (1 - e^{-t/2})^2 \mathbf{1}_{\{t>0\}}.$$

4) Une intégration par parties donne

$$\int_0^x t e^{at} dt = \left[\frac{t e^{at}}{a}\right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{at}}{a} dt = \frac{x}{a} e^{ax} - \frac{1}{a}\left[\frac{e^{ax}}{a}\right]_0^x = \frac{x}{a} e^{ax} - \frac{e^{ax}}{a^2} + \frac{1}{a^2} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{a^2}.$$

On peut maintenant développer

$$f_Y(t) = \frac{3}{2}\left[e^{-t/2} - 2e^{-t} + e^{-3t/2}\right] \mathbf{1}_{\{t>0\}}$$

En multipliant par t, on obtient trois fonctions intégrables d'après ce qui précède, et on obtient donc

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{3}{2}\left[4 - 2 + 4/9\right] = \frac{11}{3}$$

La durée maximale moyenne de fonctionnement entre deux pannes est donc de 3h40min. □

Exercice 6 : 6 pts

Étant donné X une variable aléatoire réelle de densité f_X, on appelle entropie de X la quantité suivante, si elle existe,

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \ln f_X(x) dx.$$

1) Calculer l'entropie d'une loi aléatoire uniforme sur le segment $[a, b]$.

2) On suppose que X suit une loi normale, d'espérance m et variance σ^2, i.e. $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, dont on rappelle la densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

(i) Rappeler l'expression de l'espérance et de la variance de X, sous formes d'intégrales de f_X.

(ii) Montrer que $h(X) = \frac{1}{2}(1 + \ln(2\pi\sigma^2))$.

3) On souhaite prouver que, parmi les variable aléatoires de variance donnée, les lois normales admettent une entropie maximale. On fixe Y une variable aléatoire réelle centrée (c'est à dire d'espérance nulle), de densité f_Y et de variance σ^2, admettant une entropie. On note φ la densité d'une loi normale centrée ($m = 0$), de variance σ^2. On suppose que les fonctions

$$x \mapsto f_Y(x) \ln \frac{\varphi(x)}{f_Y(x)} \quad \text{et} \quad x \mapsto f_Y(x) \ln \varphi(x)$$

sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

(i) Démontrer que pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.

(ii) Vérifier que

$$h(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x) \ln \frac{\varphi(x)}{f_Y(x)} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x) \ln \varphi(x) dx.$$

(iii) En déduire que $h(Y) \leq \frac{1}{2}(1 + \ln(2\pi\sigma^2))$.

Solution :

1) Pour une variable uniforme sur $[a, b]$, $f_X(x) = 1/(b-a)\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$, et donc

$$h(X) = \int_a^b \frac{1}{b-a} \ln(b-a) dx = \ln(b-a).$$

2)

(i)

$$\mathbb{E}(X) = m = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(X))^2 f_X(x) dx.$$

(ii) Pour une variable $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, on écrit

$$h(X) = \ln(\sqrt{2\pi\sigma^2}) \int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} dx.$$

Comme F_X est une densité de probabilités, le premier terme est $\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2)$. Le second terme est

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \frac{(x - \mathbb{E}(X))^2}{2\sigma^2} dx = \frac{V(X)}{2\sigma^2} = \frac{1}{2},$$

on obtient la formule voulue.

3)

(i) On fait une étude de fonction de $x \mapsto x - 1 - \ln x$ dont la dérivée $1 - 1/x$ est positive sur $[1, +\infty]$ et négative sur $]0, 1[$. Le minimum de la fonction est donc réalisé en $x = 1$, où elle vaut 0, donc $x - 1 - \ln x \geq 0$ pour tout $x > 0$.

(ii) Il suffit de vérifier que $-\ln f_Y = \ln(\varphi/f_Y) - \ln \varphi$.

(iii) Pour la première partie, on utilise l'inégalité que l'on vient d'obtenir, puisque f_Y est une densité de probabilités et est donc positive.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x) \ln \frac{\varphi(x)}{f_Y(x)} dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x) \frac{\varphi(x)}{f_Y(x)} dx - 1 = 0.$$

On calcule la seconde partie comme à la question 2) ii) :

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x) \ln \varphi(x) dx = \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + \int_{\mathbb{R}} f_Y(x) \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} dx = \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + \frac{V(Y)}{2\sigma^2},$$

ce qui montre l'inégalité puisque l'on a supposé que $V(Y) = \sigma^2$. $\square$