M61B, Probabilités et intégration
Licence 3e année
Parcours mathématiques

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES | Université de Lille

DS1 - 2h

9 Mars 2023

- *Les exercices sont indépendants entre eux, mais dans un même exercice, les questions ne le sont pas : pensez à utiliser les questions précédentes.*
- *Il est possible d'admettre certaines questions pour traiter les suivantes.*
- *Attention aux justifications : une bonne réponse mal justifiée ne vaut pas grand chose...*

Exercice 1 : Questions de cours

1) Qu'est ce qu'un espace mesurable ?
2) Qu'est ce qu'un ensemble mesurable ?
3) Qu'est ce qu'une fonction mesurable ?
4) Qu'est ce qu'une mesure ?

Exercice 2 : Quizz

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la justifier, si elle est fausse, l'infirmer, par exemple à l'aide d'un contre exemple.

1) Si $A \subset \mathbb{R}$ est borné, sa mesure de lebesgue $\lambda(A)$ est finie. *On rappelle qu'un ensemble borné est contenu dans [-a,a] pour un certain $a > 0$.*
2) Si $A \subset \mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue finie, alors A est borné.
3) L'union de deux tribus est une tribu.
4) Soit X une variables réelle à densité f_X continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction de répartition F_X de X est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Mesure de dirac et mesure de comptage

Soit E un ensemble non-vide, on munit E de sa tribu discrète $\mathscr{T} = \mathcal{P}(E)$

1) Soit $a \in E$, on définit la *mesure de dirac en a* δ_a par

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (i) Montrer que δ_a est une mesure sur $(E, \mathscr{T})$.
   (ii) La mesure δ_a est-elle σ-finie ? Finie ? De probabilité ?
   (iii) Quels sont les parties de E qui sont négligeables pour δ_a ?

2) Soit D un ensemble dénombrable de E. On munit D également de sa tribu discrète $\mathscr{T} = \mathcal{P}(D)$. Pour tout $A \in \mathscr{T}$, on définit $\mu(A) = Card(A)$, μ est appellée *mesure de comptage sur D*.

   (i) Montrer que μ est une mesure sur $(D, \mathscr{T})$.
   (ii) Sous quelle(s) conditions la mesure μ est-elle σ-finie ? Finie ? De

probabilité ?

(iii) Quels sont les parties de D qui sont négligeables pour μ ?

Exercice 4

Soit U une variable uniforme sur $[0, 1]$.

1) Rappeler la définition d'une variable uniforme sur $[0, 1]$, et dessiner sa fonction de répartition F_U.

2) Exprimer la fonction de répartition F_Y de $Y = \sqrt{U}$ en fonction de F_U, puis donner la valeur de $F_Y(x)$ en fonction de x.

3) La variable Y est elle a densité sur $\mathbb{R}$? Si oui, déterminer sa densité $f_Y(x)$ en fonction de x.

Exercice 5

Un athlète pratique le saut de haies successives, numerotées $1, 2, 3, \ldots$. Il ne peut tenter de sauter la haie numéro k que s'il a réussi à sauter toutes les précédentes. A cause de la fatigue, on considère que la probabilité qu'il arrive à sauter la haie numéro k sachant qu'il a réussi à sauter les précédentes est $p_k := 1/k$ pour tout $k \geq 1$. **On note X le numéro du dernier saut réussi**.

1) Quel est l'espace d'états de X ?

2) Que vaut la probabilité qu'il réussisse à sauter la haie n° 1 ? Que vaut $\mathbb{P}(X = 1)$?

3) Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

(i) Justifier que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)$

(ii) Montrer par récurrence que pour tout n, on a

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(A_n \,\middle|\, A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}\right)$$

(iii) En déduire que si $(A_k)_k$ est décroissante, i.e. $A_{k+1} \subset A_k$ pour tout $k \geq 1$, alors

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(A_k \mid A_{k-1})$$

4) Pour k un entier strictement positif, on définit A_k l'événement

$$A_k := \{\text{L'athlète a réussi tous les sauts jusqu'au } k\text{-ème inclus}\}.$$

(i) Pour $k \geq 2$, que valent $\mathbb{P}(A_k \mid A_{k-1})$ et $\mathbb{P}(A_k^c \mid A_{k-1})$?

(ii) À l'aide de la question 3), en déduire $\mathbb{P}(A_k)$.

(iii) Exprimer l'événement $\{X = 2\}$ en fonction de A_2 et A_3. En déduire $\mathbb{P}(X = 2)$.

(iv) De même, exprimer pour tout $k \geq 3$ l'événement $\{X = k\}$ en fonction de A_k et A_{k+1}, et en déduire que $k \geq 3$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right).$$

5) Justifier que X admet une espérance, et la calculer. On pourra utiliser sans justification l'identité

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

6) Que dire de la distribution de X si on remplace p_k, pour tout $k \geq 1$, par une constante $p \in [0, 1]$?