M61B, Probabilités et intégration
Licence 3e année
Parcours mathématiques

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES | Université de Lille

DS1 - 2h

9 Mars 2023

- *Les exercices sont indépendants entre eux, mais dans un même exercice, les questions ne le sont pas : pensez à utiliser les questions précédentes.*
- *Il est possible d'admettre certaines questions pour traiter les suivantes.*
- *Attention aux justifications : une bonne réponse mal justifiée ne vaut pas grand chose...*

Exercice 1 : Questions de cours

1) Qu'est ce qu'un espace mesurable ?
2) Qu'est ce qu'un ensemble mesurable ?
3) Qu'est ce qu'une fonction mesurable ?
4) Qu'est ce qu'une mesure ?

<u>SOLUTION</u> : Voir poly. □

Exercice 2 : Quizz

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la justifier, si elle est fausse, l'infirmer, par exemple à l'aide d'un contre exemple.
1) Si $A \subset \mathbb{R}$ est borné, sa mesure de lebesgue $\lambda(A)$ est finie. *On rappelle qu'un ensemble borné est contenu dans [-a,a] pour un certain* $a > 0$.
2) Si $A \subset \mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue finie, alors A est borné.
3) L'union de deux tribus est une tribu.
4) Soit X une variables réelle à densité f_X continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction de répartition F_X de X est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

<u>SOLUTION</u> :
1) C'est vrai : Si A est borné, alors $A \subset [-a, a]$ pour un certain réel $a \geq 0$, et donc par monotonie des mesures $\lambda(A) \leq \lambda([-a, a]) = 2a$.
2) C'est faux : $\mathbb{Q}$ est bien de mesure de Lebesgue finie (nulle même), et pourtant $\mathbb{Q}$ n'est pas borné.
3) C'est faux, c'est l'intersection de tribus qui est bien une tribu. Prenons par exemple pour $a, b \in \mathbb{R}$ les tribus élémentaires sur $\mathbb{R}$

$$\mathscr{T}_a := \sigma(\{a\}) = \{\emptyset, \mathbb{R}, \{a\}, \mathbb{R} \setminus \{a\}\}, \qquad \text{et} \qquad \mathscr{T}_b := \sigma(\{b\}) = \{\emptyset, \mathbb{R}, \{b\}, \mathbb{R} \setminus \{b\}\},$$

on voir bien que $\mathscr{T} := \mathscr{T}_a \cup \mathscr{T}_a$ contient $\{a\}, \{b\}$, mais pas $\{a, b\} := \{a\} \cup \{b\}$, et n'est donc pas une tribu car pas stable par union dénombrable.
4) C'est vrai, puisque la densité est la dérivée de la fonction de répartition. Si la densité est continue, la fonction de répartition est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. □

Exercice 3 : Mesure de dirac et mesure de comptage

Soit E un ensemble non-vide, on munit E de sa tribu discrète $\mathscr{T} = \mathcal{P}(E)$
1) Soit $a \in E$, on définit la *mesure de dirac en a* δ_a par

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(i) Montrer que δ_a est une mesure sur $(E, \mathscr{T})$.
(ii) La mesure δ_a est-elle σ-finie ? Finie ? De probabilité ?
(iii) Quels sont les parties de E qui sont négligeables pour δ_a ?

2) Soit D un ensemble dénombrable de E. On munit D également de sa tribu discrète $\mathscr{T} = \mathcal{P}(D)$. Pour tout $A \in \mathscr{T}$, on définit $\mu(A) = Card(A)$, μ est appellée *mesure de comptage sur D*.
(i) Montrer que μ est une mesure sur $(D, \mathscr{T})$.
(ii) Sous quelle(s) conditions la mesure μ est-elle σ-finie ? Finie ? De probabilité ?
(iii) Quels sont les parties de D qui sont négligeables pour μ ?

<u>*Solution*</u> :
1) (i) On commence par écrire que $\delta_a(\emptyset) = \mathbf{1}_{\{a \in \emptyset\}} = 0$, et ensuite on vérifie la σ-additivité : soit $A := \sqcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ une union disjointe d'ensembles. Si $a \in A$ il existe un unique élément A_{k_0} de la partition contenant a, on a alors $\delta_a(A) = 1$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_a(A_k) = \delta_a(A_{k_0}) = 1$. Si la partiyion ne contient pas a, les deux valent 0. Dans tous les cas, on a la σ-additivité.
(ii) On remarque que $\delta_a(E) = 1$, par conséquent δ_a est une mesure de probabilités. Elle est donc à la fois finie et σ-finie.
(iii) Les parties de E ne contenant pas A sont exactement les parties négligeables pour δ_a.
2) (i) On commence par montrer que $\mu(\emptyset) = Card(\emptyset) = 0$. Soit maintenant une famille (A_k) de parties disjointes de D, le cardinal de l'union est la somme des cardinaux, par conséquent $\mu(\sqcup A_k) = \sum_k \mu(A_k)$, ce qui montre la σ-additivité.
(ii) μ est une mesure de probabilités si le cardinal de D est 1, est finie si le cardinal de D est fini. μ est σ-finie puisque on a la partition $D = \cup_{d\in D}\{d\}$, et chaque singleton est de mesure 1.
(iii) Uniquement l'ensemble vide, puisque tous les autres sont de mesure strictement positive.

□

Exercice 4

Soit U une variable uniforme sur $[0, 1]$.
1) Rappeller la définition d'une variable uniforme sur $[0, 1]$, et dessiner sa fonction de répartition F_U.
2) Exprimer la fonction de répartition F_Y de $Y = \sqrt{U}$ en fonction de F_U, puis donner la valeur de $F_Y(x)$ en fonction de x.
3) La variable Y est elle a densité sur $\mathbb{R}$? Si oui, déterminer sa densité $f_Y(x)$ en fonction de x.

<u>*Solution*</u> :

1) Voir cours.
2) On écrit que $F_Y(x) = \mathbb{P}(\sqrt{U} \leq x) = 0$ pour $x < 0$ et pour $x \geq 0$,

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(\sqrt{U} \leq x) = \mathbb{P}(U \leq x^2) = F_U(x^2) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \in [0,1] \\ 1 & \text{if } x > 1. \end{cases}$$

3) La fonction de répartition est continue et C^1 par morceaux, Y est donc à densité, et sa densité est $f_Y(x) := F'_Y(x) = 2x\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. □

Exercice 5

Un athlète pratique le saut de haies successives, numerotées $1, 2, 3, \dots$. Il ne peut tenter de sauter la haie numéro k que s'il a réussi à sauter toutes les précédentes. A cause de la fatigue, on considère que la probabilité qu'il arrive à sauter la haie numéro k sachant qu'il a réussi à sauter les précédentes est $p_k := 1/k$ pour tout $k \geq 1$. **On note X le numéro du dernier saut réussi**.

1) Quel est l'espace d'états de X ?
2) Que vaut la probabilité qu'il réussisse à sauter la haie n° 1 ? Que vaut $\mathbb{P}(X = 1)$?
3) Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.
   (i) Justifier que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)$
   (ii) Montrer par récurrence que pour tout n, on a

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(A_n \,\middle|\, A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}\right)$$

   (iii) En déduire que si $(A_k)_k$ est décroissante, i.e. $A_{k+1} \subset A_k$ pour tout $k \geq 1$, alors

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(A_k \mid A_{k-1})$$

4) Pour k un entier strictement positif, on définit A_k l'événement

$$A_k := \{\text{L'athlète a réussi tous les sauts jusqu'au } k\text{-ème inclus}\}.$$

   (i) Pour $k \geq 2$, que valent $\mathbb{P}(A_k \mid A_{k-1})$ et $\mathbb{P}(A_k^c \mid A_{k-1})$?
   (ii) À l'aide de la question 3), en déduire $\mathbb{P}(A_k)$.
   (iii) Exprimer l'événement $\{X = 2\}$ en fonction de A_2 et A_3. En déduire $\mathbb{P}(X = 2)$.
   (iv) De même, exprimer pour tout $k \geq 3$ l'événement $\{X = k\}$ en fonction de A_k et A_{k+1}, et en déduire que $k \geq 3$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right).$$

5) Justifier que X admet une espérance, et la calculer. On pourra utiliser sans justification l'identité

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

6) Que dire de la distribution de X si on remplace p_k, pour tout $k \geq 1$, par une constante $p \in [0, 1]$?

Solution :

1) X prend ses valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.
2) Cette probabilité vaut $p_1 = 1$. Ayant sauté la première haie, la probabilité de réussir à sauter la seconde est $p_2 = 1/2$. Pour que X vaille 1, il faut qu'il saute la première haie mais rate la seconde, ce qui arrive avec probabilités $1 \times 1/2 = 1/2$.
3) (i) C'est la définition des probabilités conditionnelles.

(ii) L'initialisation est la question précédente. On suppose la formule vraie pour n fixé, on écrit $A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1} = B_n \cap A_{n+1}$, où $A_1 \cap \cdots \cap A_n$. On utilise maintenant l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(B_n \cap A_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A_{n+1} \cap B_n)\\ &= \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(A_n \,\middle|\, A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}\right)\mathbb{P}(A_{n+1} \cap B_n),\end{aligned}$$

ce qui conclut la réccurence.

(iii) La nouvelle formule est simplement une réécriture de la précédente, en utilisant que par décroissance, $\cap_{k=1}^{n} A_k = A_n$.
4) (i) D'après l'énoncé, on a

$$\mathbb{P}(A_k \mid A_{k-1}) = p_k = \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A_k^c \mid A_{k-1}) = 1 - p_k = 1 - \frac{1}{k}$$

(ii) Les événements A_k sont bien décroissants, parce qu'il faut sauter de plus en plus de haies. On applique donc le 3) - iii), pour obtenir

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(A_k \mid A_{k-1}) = 1 \times \prod_{k=2}^{n} p_k = \frac{1}{k!}.$$

(iii) Pour que X vaille 2, il faut que les deux premières haies aient été sautées, et que la troisième ne l'aie pas été. On écrit donc $\{X = 2\} = A_2 \cap A_3^c$, et donc

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3^c \mid A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

(iv) De même, on a

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A_{k+1}^c \mid A_k) = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right).$$

5) On a $k\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{(k-1)!}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \leq \frac{1}{(k-1)!}$, dont la série est absolument convergente, X admet donc une espérance. On calcule alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k\geq 1} \frac{k}{(k+1)!} = e - \sum_{k\geq 1} \frac{(k+1) - 1}{(k+1)!} = e - (e - 1 - (e - 2)) = e - 1.$$

6) Si $p_k = p$ pour tout k, alors X a une distribution géométrique de paramètre p. □