M61B, Probabilités et intégration
Licence 3e année
Parcours mathématiques

DS2 – 3h

19 Mai 2021

- *La note maximale est 20, il n'y a pas besoin de traiter tout le DS pour l'obtenir. Parcourez rapidement tous les exercices avant de vous lancer, afin de vous concentrer en priorité sur ceux que vous maîtrisez le mieux.*
- *Ne restez pas coincés : vous pouvez admettre le résultat d'une question pour répondre aux questions suivantes.*
- *Les exercices sont indépendants entre eux, mais dans un même exercice, les questions ne le sont pas : pensez à utiliser les questions précédentes.*
- *Attention, les questions faciles valent moins de points, attaquez vous aussi à des questions difficiles !*
- *Les calculatrices ne sont pas autorisées.*

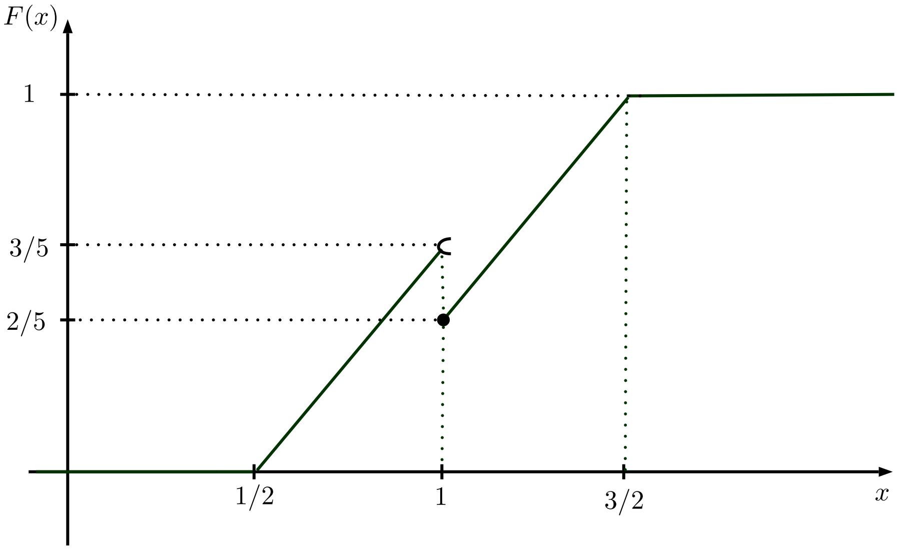
Exercice 1 : Questions de cours, 4 pts

1) Qu'est ce qu'une fonction mesurable ? Définir la tribu Borélienne sur $\mathbb{R}$.
2) Énoncer le théorème de convergence dominée dans un espace mesuré $(E, \mathscr{T}, \mu)$.
3) Que signifie "La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en distribution (en loi) vers une variable aléatoire X" ? Quelle est la conséquence de la convergence en distribution sur les fonctions de répartitions F_{X_n} et F_X de X_n et X ?
4) Énoncer le théorème central limite (TCL).

Exercice 2 : Quizz, 5 pts

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la montrer, sinon l'infirmer à l'aide d'un contre-exemple ou d'un dessin.

1) Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, on a nécessairement $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2) Soit X une variable aléatoire telle que X est indépendante d'elle même, c'est à dire que pour tous boréliens A,B, $\mathbb{P}(X \in A \cap B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(X \in B)$. Alors, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = x) = 1$. *Indication :* on pourra s'intéresser à la variance de X.
3) La fonction ci-dessous est-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle ? Si oui, quelle est la loi de la variable aléatoire associée ?



4) Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires telles que pour tout $i \neq j \in I$, et pour tous boréliens $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}(X_i \in A, X_j \in B) = \mathbb{P}(X_i \in A)\mathbb{P}(X_j \in B).$$

Alors, la famille $(X_i)_{i\in I}$ est indépendante.
5) Soit X une variable aléatoire telle que pour tout k, la variable aléatoire $X\mathbf{1}_{|X|\leq k}$ est intégrable, et $\alpha_k := \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{|X|\leq k})$ converge vers $\alpha \in \mathbb{R}$ quand $k \to \infty$. Alors, X est intégrable.

Exercice 3 : Fonctions génératrices, 5pts

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle *fonction génératrice* de X la série entière

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$$

1) Soit R le rayon de convergence de cette série, montrer que $R \geq 1$.
2) À l'aide du théorème de transfert, exprimer $G_X(t)$ comme l'espérance d'une fonction de X pour $t < R$.
3) Montrer que si $G_X = G_Y$ sur $]-1, 1[$, alors X et Y ont même loi.
4) Calculer G_X lorsque X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, puis lorsque X suit une loi binomiale de paramètres (n, p).
5) On suppose que X et Y sont indépendantes. Démontrer que pour tout $t \in]-1, 1[$

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

6) Soit $X \sim Bin(n, p)$ et $Y \sim Bin(n, p)$ deux variables aléatoires indépendantes. En utilisant les fonctions caractéristiques, déterminer la loi de $X + Y$. Retrouver ce résultat sans les fonctions génératrices.

Problème : Formule de Stirling, 15 pts

L'objectif de ce problème est de montrer, à l'aide des probabilités, la formule de Stirling,

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

On considère une suite i.i.d. de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, centrées ($\mathbb{E}(X_1) = 0$) et de second moment fini ($Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$). On définit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, et on considère également une variable $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Soit f la fonction réelle définie par

$$f(x) = x\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}} = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases},$$

PRÉLIMINAIRE

1) Justifier l'identité $$\mathbb{E}[f(Y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^{+\infty} xe^{-x^2/2\sigma^2} dx.$$

2) En déduire la valeur de $\mathbb{E}[f(Y)]$ en fonction de σ.

PARTIE I

On va montrer dans cette partie l'identité

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right] = \mathbb{E}[f(Y)]. \qquad (\star)$$

3) On commence par introduire une approximation de la fonction f.

(i) En utilisant le théorème central limite, montrer que $S_n/\sqrt{n}$ converge en loi vers une variable que l'on précisera.

(ii) Représenter graphiquement la fonction f. La question précédente permet elle d'obtenir directement l'équation ($\star$) ? Justifier.

(iii) Soit $K \geq 2$ un entier, représenter graphiquement la fonction $f_K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant

— f_K est continue sur $\mathbb{R}$, et affine sur les segments $[0, K]$ et $[K, K + 1]$.

— $f_K(K) = K$ et $f_K(x) = 0$ si $x \notin [0, K + 1]$.

(iv) Justifier que

$$\mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) - f_K\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right|\right] \leq \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_{\{S_n/\sqrt{n}\geq K\}}\right]$$

4) On admet *l'inégalité de Cauchy-Schwarz*, qui garantit que pour toutes fonctions f, g, et pour toute variable aléatoire X,

$$\mathbb{E}(|f(X)g(X)|)^2 \leq \mathbb{E}(f^2(X))\mathbb{E}(g^2(X)).$$

(i) Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_{\{S_n/\sqrt{n}\geq K\}}\right] \leq \sigma\sqrt{\mathbb{P}(S_n/\sqrt{n}\geq K)}.$$

(ii) En remarquant que $x \leq |x|$, déduire de l'inégalité de Bienaymé-Chebychev

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_{\{S_n/\sqrt{n}\geq K\}}\right] \leq \frac{\sigma^2}{K}.$$

(iii) En remarquant que pour toute variable aléatoire Z, $|\mathbb{E}(Z)| \leq \mathbb{E}(|Z|)$, et en utilisant les questions précédentes, en déduire que

$$\lim_{K\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]-\mathbb{E}\left[f_K\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]\right| = 0. \qquad (\star\star)$$

5) On va maintenant montrer l'identité ($\star$).

(i) En utilisant la question 3) - i), justifier que pour tout entier positif K,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[f_K\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right] = \mathbb{E}[f_K(Y)].$$

(ii) Montrer que

$$\lim_{K\to+\infty}\mathbb{E}[f_K(Y)] = \mathbb{E}[f(Y)].$$

(iii) En utilisant les questions précédentes et de l'identité ($\star\star$), montrer l'équation ($\star$), c'est à dire que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]-\mathbb{E}[f(Y)]\right| = 0.$$

PARTIE II

6) Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{P}(Z_1 = k) = c/k!$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(i) Déterminer la constante c et identifier la loi de Z_1. Montrer que $\mathbb{E}(Z_1) = 1$.

(ii) Soient Z, Z' deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètres respectifs λ, λ'. Montrer que $Z + Z'$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \lambda'$.

(iii) En déduire la loi de $T_n := \sum_{k=1}^n Z_k$.

7) On pose $X_n = 1 - Z_n$, et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

(i) Exprimer S_n en fonction de T_n, et déterminer la loi de S_n.

(ii) Calculer $Var(X_1)$, et justifier l'identité

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\frac{n^k}{k!}$$

(iii) En faisant apparaître une somme télescopique, en déduire la valeur de $\mathbb{E}\left(f(S_n/\sqrt{n})\right)$ en fonction de n.

(iv) Utiliser les identités obtenues aux questions 3) ii) et 4) iii), et ce qui précède, pour montrer la formule de Stirling,

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$