M61B, Probabilités et intégration
Licence 3e année
Parcours mathématiques

Corrigé du DS2 – 3h

19 Mai 2021

Exercice 1 : Quizz, 5 pts

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la montrer, sinon l'infirmer à l'aide d'un contre-exemple ou d'un dessin.

1) Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, on a nécessairement $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

<u>SOLUTION</u>. *Faux, une fonction d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}$ ne tend pas nécessairement vers 0. Prenons*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{e}\mathbf{1}_{[k,k+\frac{1}{k!}[}.$$

On vérifie facilement que f est une densité de probabilités, puisque $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-1}/k! = 1$, et pourtant f n'admet pas de limite quand $x \to \infty$.

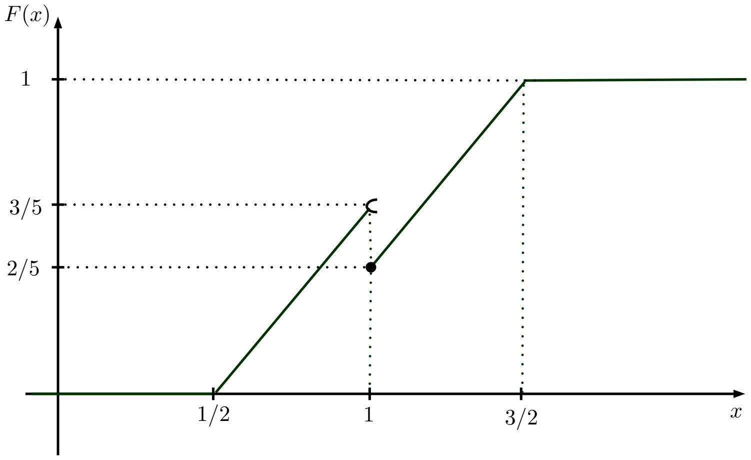
2) Soit X une variable aléatoire telle que X est indépendante d'elle même, c'est à dire que pour tous boréliens A,B, $\mathbb{P}(X \in A \cap B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(X \in B)$. Alors, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = x) = 1$. *Indication :* on pourra s'intéresser à la variance de X.

<u>SOLUTION</u>. *Vrai : pour deux variables indépendantes, on a $Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)$ et donc si X et X sont indépendantes, on a aussi que X est indépendante de $-X$, et par conséquent*

$$0 = Var(0) = Var(X - X) = Var(X) + Var(-X) = 2Var(X)$$

En particulier, X est nécessairement de variance finie. Une variable de variance nulle est constante p.s. (est p.s. égale à son espérance), ce qui permet de conclure.

3) La fonction ci-dessous est-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle ? Si oui, quelle est la loi de la variable aléatoire associée ?



SOLUTION. Faux : La fonction n'est pas croissante, ça ne peut pas être une fonction de répartition.

4) Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires telles que pour tout $i \neq j \in I$, et pour tous boréliens $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}(X_i \in A, X_j \in B) = \mathbb{P}(X_i \in A)\mathbb{P}(X_j \in B).$$

Alors, la famille $(X_i)_{i\in I}$ est indépendante.
SOLUTION. Faux : reformulé, l'énoncé dit "Une famille de variables indépendantes deux-à-deux est indépendante". Ce n'est pas le cas, comme nous l'avons vu en cours (cf. remarque après la Définition 62 du poly).

5) Soit X une variable aléatoire telle que pour tout k, la variable aléatoire $X\mathbf{1}_{|X|\leq k}$ est intégrable, et $\alpha_k := \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{|X|\leq k})$ converge vers $\alpha \in \mathbb{R}$ quand $k \to \infty$. Alors, X est intégrable.
SOLUTION. Faux : on ne peux pas appliquer le théorème de convergence monotone car X n'est pas supposée positive, et le théorème de convergence dominée non plus, car la seule domination possible serait X elle même, qui n'est pas supposée intégrable. Un contre exemple : il suffit de prendre une variables X discrète, de loi symétrique ($\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = -k)$ $\forall k$, mais non intégrable, par exemple de loi donné pour $k \neq 0$ par

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = -k) = c/k^2,$$

où la constante $c = \pi^2/3$ permet de satisfaire $\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \mathbb{P}(X = k) = 1$. Alors, α_k est constante et égale à 0 par symétrie et converge donc vers $\alpha = 0$, pourtant X n'est pas intégrable puisque $\mathbb{E}(|X|) = 2c\sum_{k\in\mathbb{N}} 1/k = \infty$.

Exercice 2 : Fonctions génératrices, 5pts

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle *fonction génératrice* de X la série entière

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$$

1) Soit R le rayon de convergence de cette série, montrer que $R \geq 1$.
SOLUTION. On montre que pour tout $t < 1$, la série entière est absolument convergente. C'est bien le cas, puisque pour tout n, $\mathbb{P}(X = n) \leq 1$, et parce que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ est absolument convergente pour tout $t < 1$.

2) À l'aide du théorème de transfert, exprimer $G_X(t)$ comme l'espérance d'une fonction de X pour $t < R$.

SOLUTION. Par le théorème de transfert, $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.

3) Montrer que si $G_X = G_Y$ sur $]-1, 1[$, alors X et Y ont même loi.
SOLUTION. Deux séries entières qui coïncident sur un ouvert contenant 0 ont mêmes coefficients, par conséquent, si $G_X = G_Y$ sur $]-1, 1[$ on a pour tout $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n)$, et donc X et Y ont même loi. La première affirmation vient du fait que sur cet ouvert, les coefficients de la série entière sont donnés par les coefficients de Taylor de la série entière, qui sont identiques si $G_X = G_Y$ sur $]-1, 1[$.

4) Calculer G_X lorsque X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, puis lorsque X suit une loi binomiale de paramètres (n, p).
SOLUTION. $G_{Ber(p)} = (1-p) + pt$, *et par Binôme de Newton,*

$$G_{Bin(n,p)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k = [(1-p) + pt]^n.$$

5) On suppose que X et Y sont indépendantes. Démontrer que pour tout $t \in]-1,1[$

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

SOLUTION. On écrit, pour tout $t < 1$ *pour lequel toutes les séries sont absolument convergentes,*

$$G_{X+Y}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X+Y = n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X = j, Y = n-j)t^n = \sum_{0 \le j \le n} \mathbb{P}(X = j)t^j \mathbb{P}(Y = n-j)t^{n-j}.$$

On pose alors $k = n - j$*, ce qui donne*

$$G_{X+Y}(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = j)t^j \mathbb{P}(Y = k)t^k = G_X(t)G_Y(t).$$

6) Soit $X \sim Bin(n, p)$ et $Y \sim Bin(n, p)$ deux variables aléatoires indépendantes. En utilisant les fonctions caractéristiques, déterminer la loi de $X + Y$. Retrouver ce résultat sans les fonctions génératrices.
SOLUTION. D'après les deux questions précédentes, et comme les binomiales sont indépendantes,

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = [(1-p) + pt]^n \times [(1-p) + pt]^n = [(1-p) + pt]^{2n}$$

$X + Y$ *a donc la même fonction génératrice qu'une loi* $Bin(2n, p)$*, par conséquent, d'après la question 3),* $X + Y$ *suit une loi* $Bin(2n, p)$*. Sans les fonctions génératrices, un loi* $Bin(n, p)$ *peut s'écrire comme somme de* n *variables* $Ber(p)$ *indépendantes. On en déduit* $X = \sum_{k=0}^{n} X_k$, $Y = \sum_{k=0}^{n} Y_k$ *où les* X_k, Y_k *sont des* $Ber(p)$ *toutes indépendantes. Finalement,* $Z = X + Y$ *est aussi une somme de* $2n$ *variables* $Ber(p)$ *indépendantes et est donc* $Bin(2n, p)$.

Problème : Formule de Stirling, 15 pts

L'objectif de ce problème est de montrer, à l'aide des probabilités, la formule de Stirling,

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

On considère une suite i.i.d. de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, centrées ($\mathbb{E}(X_1) = 0$) et de second moment fini ($Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$). On définit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, et on considère également une variable $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Soit f la fonction réelle définie par

$$f(x) = x\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}} = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases},$$

PRÉLIMINAIRE

1) Justifier l'identité
$$\mathbb{E}[f(Y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^{+\infty} x e^{-x^2/2\sigma^2} dx.$$

Solution. Par le théorème de transfert : $\mathbb{E}[f(Y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) f_Y(x) dx$. Il suffit alors de remplacer par les formules de f et f_Y pour obtenir le résultat.

2) En déduire la valeur de $\mathbb{E}[f(Y)]$ en fonction de σ.
Solution. $\mathbb{E}[f(Y)] = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}[e^{-x^2/2\sigma^2}]_0^{+\infty} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}$.

PARTIE I

On va montrer dans cette partie l'identité

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right] = \mathbb{E}[f(Y)]. \qquad (\star)$$

3) On commence par introduire une approximation de la fonction f.
(i) En utilisant le théorème central limite, montrer que $S_n/\sqrt{n}$ converge en loi vers une variable que l'on précisera.
Solution. D'après le théorème central limite, $S_n/\sigma\sqrt{n}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite, par conséquent $S_n/\sqrt{n}$ converge en loi vers Y. (On rappelle que si N suit une loi normale centrée réduite, $m + \sigma N$ converge vers une loi normale de moyenne m et de variance σ^2.)

(ii) Représenter graphiquement la fonction f. La question précédente permet elle d'obtenir directement l'équation $(\star)$? Justifier.
Solution. La fonction f est représentée dans la Figure 1 à la fin du corrigé. La question précédente ne suffit pas car la convergence en loi n'implique que la convergence de $\mathbb{E}(f(S_n/\sqrt{n}))$ pour des fonctions f continues et bornées, *ce que f n'est pas.*

(iii) Soit $K \geq 2$ un entier, représenter graphiquement la fonction $f_K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant

— f_K est continue sur $\mathbb{R}$, et affine sur les segments $[0, K]$ et $[K, K+1]$.
— $f_K(K) = K$ et $f_K(x) = 0$ si $x \notin [0, K+1]$.

Solution. La fonction f_K est représentée dans la Figure 1 à la fin du corrigé.

(iv) Justifier que

$$\mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) - f_K\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right|\right] \leq \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_{\{S_n/\sqrt{n}\geq K\}}\right]$$

Solution. On commence par remarquer que pour $x < K$, on a $f_K(x) = f(x)$. Par ailleurs, comme $0 \leq f_K \leq f$ est positive, on peut écrire pour tout $x > K$ que $|f(x) - f_K(x)| \leq f(x) = x$. En appliquant ces deux observation respectivement sur les événements $\{S_n/\sqrt{n} < K\}$ et $\{S_n/\sqrt{n} \geq K\}$ et en utilisant la monotonie et la linéarité de l'intégrale, on obtient le résultat voulu.

4) On admet *l'inégalité de Cauchy-Schwarz*, qui garantit que pour toutes fonctions f, g, et pour toute variable aléatoire X,

$$\mathbb{E}(|f(X)g(X)|)^2 \leq \mathbb{E}(f^2(X))\mathbb{E}(g^2(X)).$$

(i) Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_{\{S_n/\sqrt{n}\geq K\}}\right] \leq \sigma\sqrt{\mathbb{P}(S_n/\sqrt{n} \geq K)}.$$

Solution. On le déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux fonctions $f(x) = x$ et $g(x) = \mathbf{1}_{x\geq K}$,et à la variable $X = S_n/\sqrt{n}$. En utilisant le fait que la famille $(X_i)_i$ est i.i.d. et centrée, on obtient

$$\mathbb{E}([S_n/\sqrt{n}]^2) = Var(S_n)/n = Var(X_1) = \sigma^2.$$

De plus, pour tout x, $g^2(x) = g(x)$, et $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{S_n/\sqrt{n}\geq K\}}) = \mathbb{P}(S_n/\sqrt{n} \geq K)$, on obtient donc

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_{\{S_n/\sqrt{n}\geq K\}}\right|\right]^2 \leq \sigma^2\mathbb{P}(S_n/\sqrt{n} \geq K).$$

Puisque l'intérieur de l'espérance est une quantité positive à cause de l'indicatrice, prendre la racine carrée des deux cotés donne le résultat voulu.

(ii) En remarquant que $x \leq |x|$, déduire de l'inégalité de Bienaymé-Chebychev

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_{\{S_n/\sqrt{n}\geq K\}}\right] \leq \frac{\sigma^2}{K}.$$

Solution. Avec ce qui précède, il suffit de montrer que $\mathbb{P}(S_n/\sqrt{n} \geq K) \leq \sigma^2/K^2$. Or comme $x \leq |x|$,

$$\mathbb{P}(S_n/\sqrt{n} \geq K) \leq \mathbb{P}(|S_n/\sqrt{n}| \geq K) \leq \frac{Var(S_n/\sqrt{n})}{K^2}$$

par l'inégalité de Bienaymé-Chebychev. Les mêmes calculs que précédemment donnent $Var(S_n/\sqrt{n}) = \sigma^2$, ce qui montre le résultat voulu.

(iii) En remarquant que pour toute variable aléatoire Z, $|\mathbb{E}(Z)| \leq \mathbb{E}(|Z|)$, et en utilisant les questions précédentes, en déduire que

$$\lim_{K\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right] - \mathbb{E}\left[f_K\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]\right| = 0. \qquad (\star\star)$$

Solution. On commence par écrire avec l'indication et par la question 3) iv) que

$$\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]-\mathbb{E}\left[f_K\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]\right|=\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)-f_K\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]\right|$$
$$\leq \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)-f_K\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right|\right]\leq \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_{\{S_n/\sqrt{n}\geq K\}}\right].$$

On utilise alors la question précédente, dont la borne est vraie pour tout n*, qui donne donc*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]-\mathbb{E}\left[f_K\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]\right|\leq\frac{\sigma^2}{K}.$$

Le membre de droite tend vers 0 *quand* $K\to\infty$*, ce qui permet de conclure par théorème des gendarmes.*

5) On va maintenant montrer l'identité ($\star$).

(i) En utilisant la question 3) - i), justifier que pour tout entier positif K,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[f_K\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]=\mathbb{E}[f_K(Y)].$$

SOLUTION. Pour tout K*, la fonction* f_K *est continue et bornée, cette identité est donc une conséquence directe de la convergence en loi de la question 3) - i).*

(ii) Montrer que

$$\lim_{K\to+\infty}\mathbb{E}[f_K(Y)]=\mathbb{E}[f(Y)].$$

SOLUTION. Comme la suite $(f_K)_{K\in\mathbb{N}}$ *est une suite croissante de fonctions positives, l'identité est une conséquence immédiate du théorème de convergence monotone. On peut aussi utiliser le théorème de convergence dominée, puisque l'on a montré que* $f(Y)$ *est intégrable et* $f(Y)$ *domine tous les* $f_K(Y)$*.*

(iii) En utilisant les questions précédentes et de l'identité ($\star\star$), montrer l'équation ($\star$), c'est à dire que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]-\mathbb{E}[f(Y)]\right|=0.$$

SOLUTION. On écrit par inégalité triangulaire

$$\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]-\mathbb{E}[f(Y)]\right|$$
$$\leq\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]-\mathbb{E}\left[f_K\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]\right|+\left|\mathbb{E}\left[f_K\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]-\mathbb{E}[f_K(Y)]\right|+|\mathbb{E}[f_K(Y)]-\mathbb{E}[f(Y)]|$$
$$\leq\sup_{j\in\mathbb{N}}\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_j}{\sqrt{j}}\right)\right]-\mathbb{E}\left[f_K\left(\frac{S_j}{\sqrt{j}}\right)\right]\right|+\left|\mathbb{E}\left[f_K\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]-\mathbb{E}[f_K(Y)]\right|+|\mathbb{E}[f_K(Y)]-\mathbb{E}[f(Y)]|,$$

par conséquent pour tout K fixé, on peut faire tendre n vers $+\infty$, ce qui fait disparaître le second terme d'après la question 5) - i), ce qui donne

$$\lim_{n\to\infty}\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]-\mathbb{E}[f(Y)]\right|\le\sup_{j\in\mathbb{N}}\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_j}{\sqrt{j}}\right)\right]-\mathbb{E}\left[f_K\left(\frac{S_j}{\sqrt{j}}\right)\right]\right|+|\mathbb{E}[f_K(Y)]-\mathbb{E}[f(Y)]|,$$

Cette identité est vraie pour tout K, elle est donc également vraie à la limite $K\to\infty$. Or on a montré dans les questions 4) - iii) et 5) - ii) que les deux membres de droite tendent vers 0 quand $K\to\infty$. On en déduit comme on le souhaitait l'équation ($\star$).

PARTIE II

6) Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe une constante $c\in\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{P}(Z_1=k)=c/k!$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

(i) Déterminer la constante c et identifier la loi de Z_1. Montrer que $\mathbb{E}(Z_1)=1$.

Solution. Puisque $\mathbb{P}(Z_n\in\mathbb{N})=1$, on a $\sum_{k\in\mathbb{N}}c/k!=ce=1$. On a donc $c=e^{-1}$, et Z_1 est donc une variable de Poisson de paramètre 1. L'espérance en découle, mais si besoin on peut la remontrer par le calcul.

(ii) Soient Z, Z' deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètres respectifs λ, λ'. Montrer que $Z+Z'$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\lambda'$.

Solution. On calcule

$$\mathbb{P}(Z+Z'=n)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(Z=k,Z'=n-k)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(Z=k)\mathbb{P}(Z'=n-k).$$

par indépendance. On a donc

$$\mathbb{P}(Z+Z'=n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\frac{\lambda^{n-k}e^{-\lambda'}}{(n-k)!}=\frac{e^{-\lambda-\lambda'}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k\lambda'^{n-k}=\frac{(\lambda+\lambda')^n e^{-\lambda-\lambda'}}{n!},$$

ce qui prouve le résultat.

(iii) En déduire la loi de $T_n:=\sum_{k=1}^{n}Z_k$.

Solution. D'après ce qui précède, T_n suit une loi de poisson de paramètre n.

7) On pose $X_n=1-Z_n$, et $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$.

(i) Exprimer S_n en fonction de T_n, et déterminer la loi de S_n.

Solution. On obtient immédiatement par la définition $S_n=n-T_n$, par conséquent, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(S_n=n-k)=\mathbb{P}(T_n=k)=\frac{n^k e^{-n}}{k!}.$$

(ii) Calculer $Var(X_1)$, et justifier l'identité

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} (n-k)\,\frac{n^k}{k!}$$

<u>Solution</u>. Par théorème de transfert et par la question précédente,

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(n-k)}{\sqrt{n}} \mathbf{1}_{\{(n-k)/\sqrt{n}>0\}} \mathbb{P}(T_n = k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k)}{\sqrt{n}} \frac{n^k e^{-n}}{k!},$$

puisque pour $k < 0$ on a $\mathbb{P}(T_n = k) = 0$ et pour $k > n$ l'indicatrice est nulle (on remarque que le terme $k = n$ vaut 0 et n'a donc pas d'importance).

(iii) En faisant apparaître une somme télescopique, en déduire la valeur de $\mathbb{E}\big(f(S_n/\sqrt{n})\big)$ en fonction de n.

<u>Solution</u>. On décompose

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} (n-k)\,\frac{n^k}{k!} &= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{n^{k+1}}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n^k}{(k-1)!}\right] \\ &= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{n^{k+1}}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^{k+1}}{k!}\right] = \sqrt{n} e^{-n} \frac{n^n}{n!}.\end{aligned}$$

(iv) Utiliser l'identité ($\star$) et la question 2) pour montrer la formule de Stirling,

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

<u>Solution</u>. La variance d'une variable de Poisson de paramètre 1 vaut 1, on utilise donc la question 2 avec $Var(X_1) = Var(Z_1) = \sigma^2 = 1$. D'après l'identité ($\star$) et la question 2),

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} e^{-n} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right) = \mathbb{E}[f(Y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n = 1,$$

ce qui prouve la formule de Stirling.

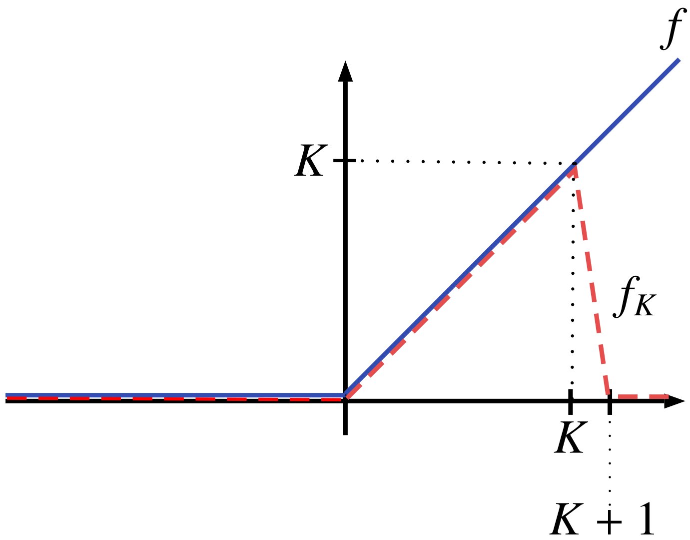


FIGURE 1 – Représentation de f et f_K.