M61B, Probabilités et intégration
Licence 3e année
Parcours mathématiques

DS2 - 3h

3 Mai 2023

- *Les exercices sont indépendants entre eux, mais dans un même exercice, les questions ne le sont pas : pensez à utiliser les questions précédentes.*
- *Il est possible d'admettre certaines questions pour traiter les suivantes.*
- *Attention aux justifications : une bonne réponse mal justifiée ne vaut pas grand chose...*

Exercice 1 : Questions de cours

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, on suppose que μ est une mesure finie.
1) Qu'est ce qu'une fonction indicatrice d'un ensemble $A \in \mathcal{T}$? Qu'est ce qu'une fonction étagée $\varphi : E \to \mathbb{R}$?
2) Donner l'expression de l'intégrale d'ue fonction indicatrice de $A \in \mathcal{T}$, et de celle d'une fonction étagée $\varphi : E \to \mathbb{R}$ par rapport à la mesure μ.
3) Énoncer la loi forte des grands nombres.
4) Énoncer le théorème de convergence monotone pour une suite de fonctions $f_n : E \to \mathbb{R}$.
5) Quelle(s) condition(s) doit satisfaire une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 : Quizz

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la justifier, si elle est fausse, l'infirmer, par exemple à l'aide d'un contre exemple.
1) Si μ est une mesure σ-finie, alors μ est une mesure de probabilités.
2) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions $E \to \mathbb{R}$, qui converge simplement vers $f : E \to \mathbb{R}$. Alors, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

3) Soit X une variable de Bernoulli de paramètre p, et Y une variable aléatoire réelle indépendante de X. Alors, on a la relation suivante entre les fonctions de répartition F_Y de Y et F_Z de $Z := XY$:

$$F_Z(x) = pF_Y(x) + (1-p)\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}}.$$

4) Soit X une variable aléatoire réelle, et A, B deux ensembles disjoints. Alors, les variables $\mathbf{1}_{\{X\in A\}}$ et $\mathbf{1}_{\{X\in B\}}$ sont indépendantes.
5) Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire *intégrable*, définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Alors,

$$\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}_X(d\omega) = \int_E x\mathbb{P}(dx).$$

Exercice 3 : Moyenne géométrique et probabilités

Soient $n \geq 1$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels positifs, on définit

$$\langle a_k \rangle_1^n := (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$$

la moyenne geométrique des a_k, l'objectif de l'exercice est de montrer que

$$1 + \langle a_k \rangle_1^n \leq \langle 1 + a_k \rangle_1^n,$$

c'est à dire que

$$1 + (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \Big((1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\Big)^{1/n}, \tag{1}$$

1) Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels positifs, et X une variable aléatoire uniforme sur l'ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$.

(i) Donner la distribution de X.

(ii) Montrer que X est intégrable, et déterminer son espérance.

(iii) Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, justifier que $Y := f(X)$ est intégrable, et justifier que

$$\mathbb{E}(f(X)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

2) Soit $f(x) := \ln(1 + e^x)$.

(i) Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, et calculer pour $x \in \mathbb{R}$ ses deux premières dérivées f' et f''.

(ii) En déduire que f est convexe.

(iii) Justifier que

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$

(iv) En déduire que

$$1 + \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leq \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + e^{x_k})\right).$$

3) En choisissant astucieusement les x_k en fonction des a_k, montrer l'identité (1).

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1.

1) On note $Y = \lceil X \rceil$ sa partie entière supérieure, c'est à dire que $\lceil 1.5 \rceil = 2$, $\lceil 3 \rceil = 3$.

(i) Donner l'expression de la densité de X et de sa fonction de répartition F_X.

(ii) Pour tout k, exprimer $\mathbb{P}(Y = k)$ en fonction de F_X.

(iii) En déduire que Y suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

2) On définit maintenant la variable aléatoire $Z = Y - X$.

(i) Montrer que pour tout $t \in [0, 1)$

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(n - t \leq X \leq n)$$

(ii) Montrer que la fonction de répartition de Z est donnée par

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ (e^t - 1)/(e-1) & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

(iii) En déduire que Z est à densité, et déterminer sa densité.

Exercice 5

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, on suppose que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée, on souhaite déterminer la limite quand $n \to \infty$ de

$$I_n := \int_0^{+\infty} \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2} dx.$$

1) Justifier que pour tout n, l'intégrale I_n est bien définie.
2) Montrer que la fonction $1/(1 + x^2)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

3) On pose $f_n(x) = f(a_n x)$.
   (i) Montrer que pour tout entier n,

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{f_n(x)}{1 + x^2} dx.$$

   (ii) Justifier que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction que l'on déterminera.
   (iii) Justifier que la fonction $g(x) := \|f\|_\infty/(1 + x^2)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
   (iv) A l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} I_n = f(0)\frac{\pi}{2}$$