M61B, Probabilités et intégration
Licence 3e année
Parcours mathématiques

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES | Université de Lille

DS2 - 3h

3 Mai 2023

- *Les exercices sont indépendants entre eux, mais dans un même exercice, les questions ne le sont pas : pensez à utiliser les questions précédentes.*
- *Il est possible d'admettre certaines questions pour traiter les suivantes.*
- *Attention aux justifications : une bonne réponse mal justifiée ne vaut pas grand chose...*

Exercice 1 : Questions de cours

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, on suppose que μ est une mesure finie.
1) Qu'est ce qu'une fonction indicatrice d'un ensemble $A \in \mathcal{T}$? Qu'est ce qu'une fonction étagée $\varphi : E \to \mathbb{R}$?
2) Donner l'expression de l'intégrale d'ue fonction indicatrice de $A \in \mathcal{T}$, et de celle d'une fonction étagée $\varphi : E \to \mathbb{R}$ par rapport à la mesure μ.
3) Énoncer la loi forte des grands nombres.
4) Énoncer le théorème de convergence monotone pour une suite de fonctions $f_n : E \to \mathbb{R}$.
5) Quelle(s) condition(s) doit satisfaire une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$?

<u>*Solution*</u> : Voir poly. □

Exercice 2 : Quizz

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la justifier, si elle est fausse, l'infirmer, par exemple à l'aide d'un contre exemple.
1) Si μ est une mesure σ-finie, alors μ est une mesure de probabilités.
2) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions $E \to \mathbb{R}$, qui converge simplement vers $f : E \to \mathbb{R}$. Alors, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

3) Soit X une variable de Bernoulli de paramètre p, et Y une variable aléatoire réelle indépendante de X. Alors, on a la relation suivante entre les fonctions de répartition F_Y de Y et F_Z de $Z := XY$:

$$F_Z(x) = pF_Y(x) + (1-p)\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}}.$$

4) Soit X une variable aléatoire réelle, et A, B deux ensembles disjoints. Alors, les variables $\mathbf{1}_{\{X\in A\}}$ et $\mathbf{1}_{\{X\in B\}}$ sont indépendantes.
5) Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire *intégrable*, définie sur un espace de probabilité

$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Alors,

$$\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}_X(d\omega) = \int_E x\mathbb{P}(dx).$$

SOLUTION :

1) C'est faux : la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est σ-finie mais n'est pas une mesure de probabilités.

2) C'est faux, il manque soit une hypothèse de monotonie, soit de domination pour pouvoir appliquer les résultats du cours. On peut citer un des cas d'inégalité stricte dans le lemme de Fatou, par exemple $f_n(x) = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{\{[0,n]\}}$, qui converge simplement (et même uniformément) vers 0, et pourtant son intégrale est constante égale à 1.

3) On calcule avec la formule des probabilités totales la fonction de répartition de $Z = XY$,

$$\mathbb{P}(Z \leq x) = p\mathbb{P}(Z \leq x \mid X = 1) + (1-p)\mathbb{P}(Z \leq x \mid X = 0)$$
$$= p\mathbb{P}(Y \leq x) + (1-p)\mathbb{P}(0 \leq x) = pF_Y(x) + (1-p)\mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}$$

4) C'est faux : il suffit de prendre $B = A^c$ par exemple, et A tel que $p := \mathbb{P}(X \in A) \in (0,1)$, alors

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X\in A\}}\mathbf{1}_{\{X\in B\}}) = \mathbb{P}(X \in A, X \in A^c) = 0 < \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(X \in A^c) = p(1-p).$$

5) C'est faux : $\mathbb{P}_X$ est une mesure définie sur $\mathcal{T}$, la tribu de E, alors que $\mathbb{P}$ est définie sur $\mathscr{F}$ et donc sur Ω. Cette formule n'a donc pas de sens, il faut inverser $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}$ pour qu'elle devienne vraie.

□

Exercice 3 : Moyenne géométrique et probabilités

Soient $n \geq 1$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels positifs, on définit

$$\langle a_k \rangle_1^n := (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$$

la moyenne geométrique des a_k, l'objectif de l'exercice est de montrer que

$$1 + \langle a_k \rangle_1^n \leq \langle 1 + a_k \rangle_1^n,$$

c'est à dire que

$$1 + (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \Big((1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\Big)^{1/n}, \tag{1}$$

1) Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels positifs, et X une variable aléatoire uniforme sur l'ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$.

(i) Donner la distribution de X.

(ii) Montrer que X est intégrable, et déterminer son espérance.

(iii) Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, justifier que $Y := f(X)$ est intégrable, et justifier que

$$\mathbb{E}(f(X)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k).$$

2) Soit $f(x) := \ln(1 + e^x)$.

(i) Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, et calculer pour $x \in \mathbb{R}$ ses deux premières dérivées f' et f''.

(ii) En déduire que f est convexe.
(iii) Justifier que

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$

(iv) En déduire que

$$1 + \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leq \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1+e^{x_k})\right).$$

3) En choisissant astucieusement les x_k en fonction des a_k, montrer l'identité (1).

<u>*Solution*</u> :

1) (i) La distribution de X est donnée par

$$\mathbb{P}(X = x_k) = \frac{1}{n} \text{ pour tout entier } 1 \leq k \leq n.$$

X est une variable aléatoire sur un espace fini, elle est donc nécessairement intégrable, et son espérance est

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

(ii) Y a également un espace d'états fini, elle est donc aussi intégrable. Par théorème de transfert, on obtient la formule voulue.

2) (i) f est une composée de fonctions ln est C^∞ sur $[1, +\infty[$, $1+e^x$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$, leur composée est donc C^∞ sur $\mathbb{R}$. La dérivée de f vaut

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{1}{1+e^x},$$

sa dérivée seconde vaut donc

$$f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

(ii) f" est positive donc f est convexe.
(iii) C'est vrai par l'inégalité de Jensen, car f est convexe.
(iv) On applique l'inégalité de Jensen à la variable X et à la fonction f, et donc

$$\log(1+e^{\mathbb{E}(X)}) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1+e^{x_k}).$$

En prenant l'exponentielle, qui est une fonction croissante, dans cette inégalité, on obtient

$$1 + \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leq \prod_{k=1}^{n}(1+e^{x_k})^{1/n}.$$

(v) Il suffit de choisir $x_k = \ln a_k$ pour montrer l'équation (1). □

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1.
1) On note $Y = \lceil X \rceil$ sa partie entière supérieure, c'est à dire que $\lceil 1.5 \rceil = 2$, $\lceil 3 \rceil = 3$.

(i) Donner l'expression de la densité de X et de sa fonction de répartition F_X.
(ii) Pour tout k, exprimer $\mathbb{P}(Y = k)$ en fonction de F_X.
(iii) En déduire que Y suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

2) On définit maintenant la variable aléatoire $Z = Y - X$.
(i) Montrer que pour tout $t \in [0, 1)$

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(n - t \leq X \leq n)$$

(ii) Montrer que la fonction de répartition de Z est donnée par

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ (e^t - 1)/(e - 1) & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

(iii) En déduire que Z est à densité, et déterminer sa densité.

<u>*Solution*</u> :

1) (i) cf cours.
(ii) On écrit

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(k - 1 \leq X \leq k) = F_X(k) - F_X(k - 1)$$

(iii) Avec le formule précédente,

$$\mathbb{P}(Y = k) = e^{-k-1} - e^{-k} = (1 - e^{-1})e^{-(k-1)},$$

et donc Y suit une loi géométrique de paramètre $1 - 1/e$.

2) (i) On projette selon la valeur de Y qui prend avec probabilités des valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, pour obtenir pour $t \in [0, 1)$

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z \leq t, Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(n - X \leq t, Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(n - t \leq X \leq n).$$

(ii) On calcule la somme précédente pour $t \in [0, 1)$. Comme X est à densité,

$$\mathbb{P}(n - t \leq X \leq n) = F(n) - F(n - t) = e^{-(n-t)} - e^{-n} = e^{-n}(e^t - 1).$$

On somme sur n, pour obtenir pour $t \in [0, 1)$

$$F_Z(t) = \frac{(e^t - 1)e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{e^t - 1}{e - 1}.$$

Comme Z est p.s. entre 0 et 1, on a également $F_Z(t) = 1$ pour $t \geq 1$.
(iii) F_Z est C^1 par morceaux, et donc Z est à densité. Sa densité est donnée par

$$f_Z(t) = F_Z'(t) = \frac{e^t}{e - 1} \mathbf{1}_{\{t \in [0,1)\}}.$$

□

Exercice 5

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, on suppose que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée, on souhaite déterminer la limite quand $n \to \infty$ de

$$I_n := \int_0^{+\infty} \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2} dx.$$

1) Justifier que pour tout n, l'intégrale I_n est bien définie.
2) Montrer que la fonction $1/(1 + x^2)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

3) On pose $f_n(x) = f(a_n x)$.
   (i) Montrer que pour tout entier n,

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{f_n(x)}{1 + x^2} dx.$$

   (ii) Justifier que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction que l'on déterminera.
   (iii) Justifier que la fonction $g(x) := \|f\|_\infty/(1 + x^2)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
   (iv) A l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} I_n = f(0)\frac{\pi}{2}$$

<u>*Solution*</u> :
1) On pose $g_n = \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2}$, cette fonction est continue sur $[0, +\infty[$, par conséquent pour montrer qu'elle est intégrable sur cet intervalle il suffit de justifier l'intégrabilité en $+\infty$. Or $|g_n(x)| \leq C/x^2$ car f_n est bornée, et C/x^2 est intégrable en $+\infty$, f_n est donc intégrable aussi.
2) Comme $arctan'(x) = 1/(1 + x^2)$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = [arctan(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

3) (i) Il suffit d'opérer le changement de variable $u = x/a_n$, puisque a_n est strictement positif.

(ii) On fixe x, comme a_n tend vers 0 et que f est continue, on a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{u\to 0} f(u) = f(0)$. On a donc que f_n converge simplement vers la fonction constante égale à $f(0)$.

(iii) Elle est continue sur $[0, +\infty[$, il suffit donc de justifier de son intégrabilité en $+\infty$, qui découle de celle de $1/x^2$. la fonction $f_n(x)/(1 + x^2)$ converge simplement vers $f(0)/(1 + x^2)$ et est dominée par g, qui est intégrable. Par théorème de convergence dominée, on a donc $\int_0^{+\infty} |g_n - f(0)/(1 + x^2)| dx$ tend vers 0, et en particulier,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x) dx = \int_0^{+\infty} f(0)/(1 + x^2) = \frac{f(0)\pi}{2}.$$

□