M61B, Probabilités et intégration
Licence 3e année
Parcours mathématiques

DS3 Session de rattrapage – 3h

21 Juin 2021

- *La note maximale est 20, il n'y a pas besoin de traiter tout le DS pour l'obtenir. Parcourez rapidement tous les exercices avant de vous lancer, afin de vous concentrer en priorité sur ceux que vous maîtrisez le mieux.*
- *Ne restez pas coincés : vous pouvez admettre le résultat d'une question pour répondre aux questions suivantes.*
- *Les exercices sont indépendants entre eux, mais dans un même exercice, les questions ne le sont pas : pensez à utiliser les questions précédentes.*
- *Attention, les questions faciles valent moins de points, attaquez vous aussi à des questions difficiles !*
- *Les calculatrices et documents ne sont pas autorisées.*
- *Une $\star$ marque les questions les plus difficiles, commencez par vous attaquer aux autres !*

Exercice 1 : Questions de cours, 5 pts

1) Définir une tribu sur un espace E.
2) Qu'est ce qu'une mesure sur un espace mesurable $(E, \mathscr{T})$?
3) Énoncer le théorème de convergence dominée dans un espace mesuré $(E, \mathscr{T}, \mu)$.
4) Soit X une variable aléatoire admettant une densité f_X par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Donner en fonction de f_X l'expression de la fonction de répartition et de la variance de X.
5) Que signifie "X suit une loi normale de moyenne m et de variance σ^2 ?"

Exercice 2 : 5pts

On considère une suite i.i.d. de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, toutes de même loi qu'une variable aléatoire X. On suppose que X est de carré intégrable, et on note $\sigma^2 = Var(X)$. Enfin on suppose que

$$\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \text{ a la même loi que } X.$$

On va montrer que cette propriété suffit à déterminer la loi de X.

1) Calculer l'espérance de X.

$\star$2) On rappelle que l'égalité en loi est transitive, c'est à dire que si X et Y ont la même loi, et Y et Z ont la même loi, alors X et Z ont la même loi. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$$S_n := \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=1}^{2^n} X_k$$

a la même loi que X. Soit $x \in \mathbb{R}$, que vaut, en fonction de la loi de X, la suite $(\mathbb{P}(S_n \leq x))_{n\in\mathbb{N}}$?

3) En utilisant un résultat du cours, montrer que S_n/σ converge en loi vers une variable que l'on précisera. En déduire que S_n converge en loi vers une variable Y que l'on précisera.

4) Déduire des questions précédentes la loi de X.

Problème : 20 pts

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles, qui converge en loi vers X. On suppose que X est une constante déterministe, noté $X \equiv a$, c'est à dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $X(\omega) = a$ pour tout $\omega \in \Omega$. L'objectif de ce problème est d'obtenir un certain nombre de propriétés de la convergence en probabilités vers une constante.

Les différentes parties du problème peuvent être traitées indépendamment.

PARTIE I (5pts)

1) On veut montrer que X_n converge en probabilités vers $X \equiv a$.

(i) Que vaut la fonction de répartition F_X de X ?

(ii) Que veut dire "$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X" ? Que peut on dire sur les fonctions de répartitions F_{X_n} et F_X ?

★(iii) Soit $\varepsilon > 0$, montrer que

$$\mathbb{P}(|X_n - a| > \varepsilon) \leq 1 + F_{X_n}(a - \varepsilon) - F_{X_n}(a + \varepsilon)$$

(iv) Déduire des questions précédentes que X_n converge en probabilités vers a, c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - a| > \varepsilon) = 0.$$

PARTIE II (10pts)

Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On veut montrer que la suite $(X_n + b_n)$ converge en loi vers la constante déterministe $a + b$ si et seulement si (b_n) converge vers b.

2) On suppose dans un premier temps que (b_n) converge vers b. On fixe une fonction φ, continue et bornée sur $\mathbb{R}$

(i) Soit $\delta > 0$, justifier qu'il existe $\varepsilon := \varepsilon(\delta)$ tel que

$$|x - (a + b)| \leq 2\varepsilon \Longrightarrow |\varphi(x) - \varphi(a + b)| \leq \delta.$$

(ii) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left|\mathbb{E}(\varphi(X_n+b_n)) - \varphi(a+b)\right| \leq 2\mathbb{P}(|X_n - a| > \varepsilon)\sup_{\mathbb{R}}|\varphi| + \mathbb{E}\Big(\left|\varphi(X_n+b_n) - \varphi(a+b)\right|\mathbf{1}_{\{|X_n-a|\leq\varepsilon\}}\Big).$$

$\star$(iii) On fixe $\delta > 0$ et le $\varepsilon(\delta)$ correspondant donné par la question 2) $-$ i). Montrer qu'il existe un entier n_0 (dépendant de ε) tel que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\left|\varphi(X_n(\omega) + b_n) - \varphi(a+b)\right|\mathbf{1}_{\{|X_n(\omega)-a|\leq\varepsilon\}} \leq \delta.$$

$\star$(iv) En utilisant les questions précédentes, montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe $n_1 > 0$ dépendant de δ tel que pour tout $n > n_1$

$$\left|\mathbb{E}(\varphi(X_n+b_n)) - \varphi(a+b)\right| \leq 2\delta.$$

Que peut-on en déduire sur la suite $(\mathbb{E}(\varphi(X_n+b_n)))_{n\in\mathbb{N}}$?

(v) Montrer que la suite $(X_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la constante déterministe $a+b$.

3) On suppose maintenant que $(X_n + b_n)$ converge en loi vers une constante déterministe, on veut montrer que la suite (b_n) est convergente. On note c la limite (en loi), déterministe de $(X_n + b_n)$, et on rappelle que a est la limite en loi de (X_n).

(i) Justifier à l'aide de la PARTIE I que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|X_n + b_n - c| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|X_n - a| > \varepsilon) = 0.$$

(ii) Justifier que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$|b_n - c + a| > 2\varepsilon \Longrightarrow |X_n(\omega) + b_n - c| > \varepsilon \ \text{ ou } \ |X_n(\omega) - a| > \varepsilon,$$

et montrer que pour deux événements A, B,

$$\mathbf{1}_{A\cup B} \leq \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B.$$

(iii) En déduire que pour tout $\omega \in \Omega$

$$\mathbf{1}_{\{|b_n-c+a|>2\varepsilon\}} \leq \mathbf{1}_{\{|X_n(\omega)+b_n-c|>\varepsilon\}} + \mathbf{1}_{\{|X_n(\omega)-a|>\varepsilon\}}.$$

$\star$(iv) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty}\mathbf{1}_{\{|b_n-c+a|>2\varepsilon\}} = 0$, puis que b_n converge vers $c - a$.

PARTIE III (5pts)

4) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles indépendantes de même loi, de densité

$$f(x) = \frac{C|x|}{(1+x^2)^3},$$

où C est une constante positive. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

(i) Déterminer la constante C.

(ii) Après avoir justifié de son existence, montrer que $\mathbb{E}(X_1) = 0$.

(iii) Montrer que les (X_n) sont de carré intégrable, on note σ^2 leur variance commune, que l'on ne demande pas de calculer.

(iv) À l'aide du théorème central limite, montrer que $S_n/\sigma\sqrt{n}$ converge en loi vers une variable aléatoire que l'on précisera.

5) Soit $\alpha > 1/2$, on souhaite étudier la variable aléatoire S_n/n^α.

★(i) Montrer que pour tout n, on a

$$\mathbb{P}\left(|S_n/\sqrt{n}| > \varepsilon n^{\alpha-1/2}\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n^{2\alpha-1}}.$$

(ii) En déduire que S_n/n^α converge en probabilités vers 0.