M61B, Probabilités et intégration
Licence 3e année
Parcours mathématiques

DS3 Session de rattrapage – 3h

21 Juin 2021

- *La note maximale est 20, il n'y a pas besoin de traiter tout le DS pour l'obtenir. Parcourez rapidement tous les exercices avant de vous lancer, afin de vous concentrer en priorité sur ceux que vous maîtrisez le mieux.*
- *Ne restez pas coincés : vous pouvez admettre le résultat d'une question pour répondre aux questions suivantes.*
- *Les exercices sont indépendants entre eux, mais dans un même exercice, les questions ne le sont pas : pensez à utiliser les questions précédentes.*
- *Attention, les questions faciles valent moins de points, attaquez vous aussi à des questions difficiles !*
- *Les calculatrices et documents ne sont pas autorisées.*
- *Une ⋆ marque les questions les plus difficiles, commencez par vous attaquer aux autres !*

Exercice 1 : Questions de cours, 5 pts

1) Définir une tribu sur un espace E.
2) Qu'est ce qu'une mesure sur un espace mesurable $(E, \mathscr{T})$?
3) Énoncer le théorème de convergence dominée dans un espace mesuré $(E, \mathscr{T}, \mu)$.
4) Soit X une variable aléatoire admettant une densité f_X par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Donner en fonction de f_X l'expression de la fonction de répartition et de la variance de X.
5) Que signifie "X suit une loi normale de moyenne m et de variance σ^2 ?"

Exercice 2 : 5pts

On considère une suite i.i.d. de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, toutes de même loi qu'une variable aléatoire X. On suppose que X est de carré intégrable, et on note $\sigma^2 = Var(X)$. Enfin on suppose que

$$\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \text{ a la même loi que } X.$$

On va montrer que cette propriété suffit à déterminer la loi de X.

1) Calculer l'espérance de X.

SOLUTION. *Comme $(X_1 + X_2)/\sqrt{2}$ et X ont même loi, en particulier, elles ont même* *espérance. On en déduit par linéarité de l'espérance*

$$E\left[\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\right] = \frac{\mathbb{E}(X_1)+\mathbb{E}(X_2)}{\sqrt{2}} = \mathbb{E}(X).$$

Or $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est i.i.d. de loi celle de X, donc $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \mathbb{E}(X)$, ce dont on déduit que l'on doit avoir $\mathbb{E}(X) = 0$.

★2) On rappelle que l'égalité en loi est transitive, c'est à dire que si X et Y ont la même loi, et Y et Z ont la même loi, alors X et Z ont la même loi. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$$S_n := \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=1}^{2^n} X_k$$

a la même loi que X. Soit $x \in \mathbb{R}$, que vaut, en fonction de la loi de X, la suite $(\mathbb{P}(S_n \leq x))_{n\in\mathbb{N}}$?

<u>SOLUTION</u>. *L'initialisation est donnée par l'énoncé. Pour la récurrence, on pose $\widetilde{X}_1 = S_n$ qui par hypothèse de récurrence a même loi que X. On pose également*

$$\widetilde{X}_2 = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} X_k \overset{loi}{=} \widetilde{X}_1 \overset{loi}{=} X,$$

et qui est indépendente de $\widetilde{X}_1$ puisque la famille X_i est i.i.d. Par l'initialisation, on a donc également que

$$S_{n+1} = \frac{\widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2}{\sqrt{2}} \quad \textit{a la même loi que } X,$$

ce qui montre la récurrence.

3) En utilisant un résultat du cours, montrer que S_n/σ converge en loi vers une variable que l'on précisera. En déduire que S_n converge en loi vers une variable Y que l'on précisera.

<u>SOLUTION</u>. *On pose $N = 2^n$, par le théorème central limite, et comme les X_n sont des variables centrées*

$$\frac{S_n}{\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} X_k \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0,1),$$

par conséquent

$$S_n \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0,\sigma^2).$$

4) Déduire des questions précédentes la loi de X.

<u>SOLUTION</u>. *On a vu dans les questions précédentes que la loi de S_n est constante en n et égale à celle de X. Or S_n convergenen loi vers $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ d'après la question précédente, par conséquent la loi de X est $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.*

Problème : 20 pts

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles, qui converge en loi vers X. On suppose que X est une constante déterministe, noté $X \equiv a$, c'est à dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $X(\omega) = a$ pour tout $\omega \in \Omega$. L'objectif de ce problème est d'obtenir un certain nombre de propriétés de la convergence en probabilités vers une constante.

Les différentes parties du problème peuvent être traitées indépendamment.

PARTIE I (5pts)

1) On veut montrer que X_n converge en probabilités vers $X \equiv a$.

(i) Que vaut la fonction de répartition F_X de X ?

SOLUTION. $F_X(x) = \mathbf{1}_{\{a\leq x\}}$ *vaut* 0 *si* $x < a$*, et* 1 *sinon.*

(ii) Que veut dire "$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X" ? Que peut on dire sur les fonctions de répartitions F_{X_n} et F_X ?

SOLUTION. *cf. poly : pour toute fonction continue et bornée* φ, $\mathbb{E}(\varphi(X_n)) \to \mathbb{E}(\varphi(X))$. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *différent de* a*, qui est le seul point de discontinuité de* F*, on a* $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$.

$\star$(iii) Soit $\varepsilon > 0$, montrer que

$$\mathbb{P}(|X_n - a| > \varepsilon) \leq 1 + F_{X_n}(a-\varepsilon) - F_{X_n}(a+\varepsilon)$$

SOLUTION. *On a par* σ*-additivité*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X_n - a| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(X_n - a < -\varepsilon \text{ ou } X_n - a > \varepsilon)\\ &= \mathbb{P}(X_n < a-\varepsilon) + \mathbb{P}(X_n > a+\varepsilon)\\ &= \mathbb{P}(X_n \leq a-\varepsilon) - \mathbb{P}(X_n = a-\varepsilon) + 1 - \mathbb{P}(X_n \leq a+\varepsilon)\\ &\leq F_{X_n}(a-\varepsilon) + 1 - F_{X_n}(a+\varepsilon)\end{aligned}$$

(iv) Déduire des questions précédentes que X_n converge en probabilités vers a, c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - a| > \varepsilon) = 0.$$

SOLUTION. *ça découle directement des trois questions précédentes, il suffit de passer à la limite* $n \to \infty$ *dans la question précédente : en effet,*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(a+\varepsilon) = F_X(a+\varepsilon) = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(a-\varepsilon) = F_X(a-\varepsilon) = 0,$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - a| > \varepsilon) = 0.$$

PARTIE II (10pts)

Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On veut montrer que la suite $(X_n + b_n)$ converge en loi vers la constante déterministe $a+b$ si et seulement si (b_n) converge vers b.

2) On suppose dans un premier temps que (b_n) converge vers b. On fixe une fonction φ, continue et bornée sur $\mathbb{R}$

(i) Soit $\delta > 0$, justifier qu'il existe $\varepsilon := \varepsilon(\delta)$ tel que

$$|x-(a+b)| \leq 2\varepsilon \Longrightarrow |\varphi(x)-\varphi(a+b)| \leq \delta.$$

<u>Solution</u>. C'est une conséquence directe de la continuité de φ en $x = a+b$.

(ii) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\Big|\mathbb{E}(\varphi(X_n+b_n))-\varphi(a+b)\Big| \leq 2\mathbb{P}(|X_n-a|>\varepsilon)\sup_{\mathbb{R}}|\varphi| + \mathbb{E}\Big(\Big|\varphi(X_n+b_n)-\varphi(a+b)\Big|\mathbf{1}_{\{|X_n-a|\leq\varepsilon\}}\Big).$$

<u>Solution</u>. Soit $\varepsilon > 0$, comme $|\mathbb{E}(X)| \leq |\mathbb{E}(|X|)$, on a

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathbb{E}(\varphi(X_n+b_n))-\varphi(a+b)\Big| \\
&\qquad = \Big|\mathbb{E}((\varphi(X_n+b_n)-\varphi(a+b))\mathbf{1}_{\{|X_n-a|>\varepsilon\}}) + \mathbb{E}((\varphi(X_n+b_n)-\varphi(a+b))\mathbf{1}_{\{|X_n-a|\leq\varepsilon\}})\Big| \\
&\qquad \leq 2\mathbb{P}(|X_n-a|>\varepsilon)\sup_{\mathbb{R}}\varphi + \mathbb{E}\Big(\Big|\varphi(X_n+b_n)-\varphi(a+b)\Big|\mathbf{1}_{\{|X_n-a|\leq\varepsilon\}}\Big).
\end{aligned}$$

$\star$(iii) On fixe $\delta > 0$ et le $\varepsilon(\delta)$ correspondant donné par la question 2) $-$ i). Montrer qu'il existe un entier n_0 (dépendant de ε) tel que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\Big|\varphi(X_n(\omega)+b_n)-\varphi(a+b)\Big|\mathbf{1}_{\{|X_n(\omega)-a|\leq\varepsilon\}} \leq \delta.$$

<u>Solution</u>. Comme (b_n) converge vers b, il suffit de fixer n_0 tel que $|b_n - b| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. On a donc, en supposant que $|X_n(\omega)-a| \leq \varepsilon$,

$$|X_n(\omega)+b_n-(a+b)| \leq 2\varepsilon.$$

L'identité voulue vient alors de la question 2) $-$ i) appliquée à $x := X_n(\omega)+b_n$.

$\star$(iv) En utilisant les questions précédentes, montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe $n_1 > 0$ dépendant de δ tel que pour tout $n > n_1$

$$\Big|\mathbb{E}(\varphi(X_n+b_n))-\varphi(a+b)\Big| \leq 2\delta.$$

Que peut-on en déduire sur la suite $(\mathbb{E}(\varphi(X_n+b_n)))_{n\in\mathbb{N}}$?

<u>Solution</u>. Fixons $\delta > 0$. Comme X_n converge en probabilités vers a, étant donné le $\varepsilon(\delta)$ de la question 2) $-$ i), $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|X_n-a|>\varepsilon) = 0$, et donc il existe n_2 tel que pour tout $n \geq n_2$,

$$\mathbb{P}(|X_n-a|>\varepsilon) \leq \frac{\delta}{2\sup_{\mathbb{R}}\varphi}.$$

On définit alors $n_1 = \max\{n_0, n_2\}$*, et pour tout* $n \geq n_1$*, on déduit des deux questions précédentes que*

$$\Big|\mathbb{E}(\varphi(X_n + b_n)) - \varphi(a + b)\Big| \leq 2\delta.$$

Cela signifie que la suite $(\mathbb{E}(\varphi(X_n + b_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge quand* $n \to \infty$ *vers* $\varphi(a + b)$

(v) Montrer que la suite $(X_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la constante déterministe $a + b$.

<u>Solution</u>. La convergence de la question précédente est valide pour toute fonction φ *continue et bornée, on en déduit que* $(X_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en loi vers la variable aléatoire constante déterministe égale à* $a + b$.

3) On suppose maintenant que $(X_n + b_n)$ converge en loi vers une constante déterministe, on veut montrer que la suite (b_n) est convergente. On note c la limite (en loi), déterministe de $(X_n + b_n)$, et on rappelle que a est la limite en loi de (X_n).

(i) Justifier à l'aide de la PARTIE I que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n + b_n - c| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - a| > \varepsilon) = 0.$$

<u>Solution</u>. On a montré en PARTIE I *que la convergence en probabilité découle de la convergence en loi vers une constante. C'en sont deux applications directes.*

(ii) Justifier que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$|b_n - c + a| > 2\varepsilon \Longrightarrow |X_n(\omega) + b_n - c| > \varepsilon \ \text{ ou } \ |X_n(\omega) - a| > \varepsilon,$$

et montrer que pour deux événements A, B,

$$\mathbf{1}_{A\cup B} \leq \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B.$$

<u>Solution</u>. La première implication est une conséquence de l'inégalité triangulaire : pour tout $\omega \in \Omega$*, on réécrit* $b_n - c + a$ *comme*

$$(X_n(\omega) + b_n - c) - (X_n(\omega) - a),$$

et donc $b_n - c + a$ *ne peut être plus grand que* 2ε *si et seulement si l'un des deux termes est plus grand que* ε*. Soient* A *et* B *deux événements, on a*

$$\mathbf{1}_{A\cup B} \leq \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B},$$

ce qui montre l'inégalité suivante.

(iii) En déduire que pour tout $\omega \in \Omega$

$$\mathbf{1}_{\{|b_n - c + a| > 2\varepsilon\}} \leq \mathbf{1}_{\{|X_n(\omega) + b_n - c| > \varepsilon\}} + \mathbf{1}_{\{|X_n(\omega) - a| > \varepsilon\}}.$$

Solution. *Posons $A = \{|X_n(\omega)+b_n-c| > \varepsilon\}$, $B = \{|X_n(\omega)-a| > \varepsilon\}$, et $C = \{|b_n-c+a| > 2\varepsilon\}$. D'après la question précédente, on a $C \subset A \cup B$, donc*

$$\mathbf{1}_C \leq \mathbf{1}_{A\cup B} \leq \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B.$$

⋆(iv) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{\{|b_n-c+a|>2\varepsilon\}} = 0$, puis que b_n converge vers $c - a$.

Solution. *On passe à l'espérance dans l'identité précédente. L'espérance de $\mathbf{1}_{\{|b_n-c+a|>2\varepsilon\}}$ est elle même, puisque cette quantité n'est pas aléatoire. Les deux autres espérances sont les probas de la question 3) – i), qui tendent vers 0 quand $n \to \infty$. On en déduit que $\mathbf{1}_{\{|b_n-c+a|>2\varepsilon\}}$ est majorée par la somme de deux suites qui tendent vers 0, comme elle est positive, elle tend vers 0 également.*
En particulier, la suite $\mathbf{1}_{\{|b_n-c+a|>2\varepsilon\}}$ est plus petite que 1/2 pour n assez grand. Comme elle ne peut prendre que les valeurs 0 et 1, elle doit être égale à 0 pour n assez grand, et donc pour n assez grand, $|b_n - c + a| \leq 2\varepsilon$. Cela montre que la suite $b_n - c + a$ converge vers 0.

PARTIE III (5pts)

4) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles indépendantes de même loi, de densité

$$f(x) = \frac{C|x|}{(1+x^2)^3},$$

où C est une constante positive. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

(i) Déterminer la constante C.

Solution. *Pour que f soit une densité, on doit avoir $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$, et donc*

$$\frac{1}{C} = \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{(1+x^2)^3}dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^3}dx = 2\left[\frac{-1}{4(1+x^2)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

On en conclut que $C = 2$.

(ii) Après avoir justifié de son existence, montrer que $\mathbb{E}(X_1) = 0$.

Solution. *On a*

$$\mathbb{E}(|X_1|) = \int_{\mathbb{R}} \frac{2x^2}{(1+x^2)^3}dx \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{(1+x^2)^2}dx,$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, comme la densité de X_1 est symétrique, on a $\mathbb{E}(X_1) = 0$.

(iii) Montrer que les (X_n) sont de carré intégrable, on note σ^2 leur variance commune, que l'on ne demande pas de calculer.

Solution. *De même,*

$$\mathbb{E}(|X_1|^2) = \int_{\mathbb{R}} \frac{2|x|^3}{(1+x^2)^3}dx \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{2|x|}{(1+x^2)^2}dx,$$

qui est également intégrable par le même type de calcul qu'à la question i).

(iv) À l'aide du théorème central limite, montrer que $S_n/\sigma\sqrt{n}$ converge en loi vers une variable aléatoire que l'on précisera.

SOLUTION. Par le théorème central limite,

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0,1).$$

5) Soit $\alpha > 1/2$, on souhaite étudier la variable aléatoire S_n/n^α.

$\star$(i) Montrer que pour tout n, on a

$$\mathbb{P}\left(|S_n/\sqrt{n}| > \varepsilon n^{\alpha-1/2}\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n^{2\alpha-1}}.$$

SOLUTION. C'est une application directe de l'inégalité de Bienaymé-Chebychev, puisque $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1) = 0$.

(ii) En déduire que S_n/n^α converge en probabilités vers 0.

SOLUTION. Grâce à la question précédente, on sait que

$$\mathbb{P}\left(|S_n/n^\alpha| > \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n^{2\alpha-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et donc S_n/n^α converge en probabilités vers 0.