M61B, Probabilités et intégration
Licence 3e année
Parcours mathématiques

DS3 Session de rattrapage - 3h

22 Juin 2022

- *La note maximale est 20, il n'y a pas besoin de traiter tout le DS pour l'obtenir. Parcourez rapidement tous les exercices avant de vous lancer, afin de vous concentrer en priorité sur ceux que vous maîtrisez le mieux.*
- *Les exercices sont indépendants entre eux, mais dans un même exercice, les questions ne le sont pas : pensez à utiliser les questions précédentes.*
- *Attention, les questions faciles valent moins de points, attaquez vous aussi à des questions difficiles !*
- *Il est possible d'admettre certaines questions pour traiter les suivantes.*
- *Attention aux justifications : une bonne réponse mal justifiée ne vaut pas grand chose...*
- *Aucune réponse du corrigé ne fait plus de 6 lignes, attention à ne pas se lancer dans des raisonnements trop compliqués !*

Exercice 1 : Questions de cours

1) Énoncer le lemme de Fatou.
2) Qu'est ce qu'une tribu ?
3) Énoncer l'inégalité de Jensen.
4) Qu'est ce qu'une mesure ?
5) Énoncer le théorème central limite

Exercice 2 : Quizz

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la justifier, si elle est fausse, l'infirmer, par exemple à l'aide d'un contre exemple.

1) Si X et Y sont des variables indépendantes, alors les variables aléatoires X et $Z = XY$ sont également indépendantes.

2) Un borélien (c'est-à-dire un élément de la tribu borélienne) de $\mathbb{R}$ d'intérieur non-vide peut-être de mesure de Lebesgue nulle.

3) Soit X_n une suite croissante de variables aléatoires. Alors, il existe une variable X vers laquelle (X_n) converge presque-sûrement, et par ailleurs $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n)$ existe et vaut $\mathbb{E}(X)$. *Indice : on pourra s'aider d'une variable aléatoire Y, à valeurs négatives, poser $X_n = Y\mathbf{1}_{\{Y\leq -n\}}$, et discuter selon que Y est intégrable ou non.*

4) Soit X une variables réelle à densité f_X continue par morceaux. La fonction de répartition F_X de X est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Convergences en loi et en probabilités

Dans tout l'exercice, on considère une variable aléatoire X et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires, toutes réelles et construites sur le même espace de probabilités. L'objectif de l'exercice est de montrer que

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{(d)} X,$$

et que la réciproque est vraie si X est une variable presque-sûrement constante.

1) On suppose dans un premier temps que (X_n) converge vers X en probabilités, on veut montrer qu'elle converge également en loi.

(i) Rappeler ce que ces deux convergences signifient.

(ii) En séparant selon les deux cas $|X_n - X| < \varepsilon$ et $|X_n - X| \geq \varepsilon$, montrer que

$$\mathbb{P}(X_n \leq x) \leq \mathbb{P}(X \leq x + \varepsilon) + \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon).$$

(iii) De la même manière, justifier que

$$\mathbb{P}(X \leq x - \varepsilon) \leq \mathbb{P}(X_n \leq x) + \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon)$$

(iv) On note F et F_n les fonctions de répartition respectives de X et X_n. Justifier avec les question précédentes qu'il existe une suite de fonctions h_n telle que $\lim_{n\to\infty} h_n(\varepsilon) = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$, et

$$F(x - \varepsilon) - h_n(\varepsilon) \leq F_n(x) \leq F(x + \varepsilon) + h_n(\varepsilon).$$

(v) On suppose que F est continue en x. En faisant tendre n vers l'infini puis ε vers 0, montrer que la limite quand $n \to \infty$ de $F_n(x)$ existe et vaut $F(x)$.

(vi) Conclure sur la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) On considère maintenant une variable X presque-sûrement constante, c'est à dire telle qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ que $\mathbb{P}(X = c) = 1$. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X en loi. On souhaite montrer qu'elle converge également en probabilités.

(i) Calculer en fonction de x la fonction de répartition F de X, et la tracer.

(ii) Quels sont les points de continuité de F ?

(iii) Exprimer $\mathbb{P}(c - \varepsilon < X_n \leq c + \varepsilon)$ en fonction de F_n, la fonction de répartition de X_n.

(iv) En utilisant la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(c - \varepsilon < X_n \leq c + \varepsilon)$$

existe et vaut 1, et ce pour tout $\varepsilon > 0$.

(v) Conclure sur la convergence en probabilités de (X_n) vers X.

Problème : Fonctions génératrice des moments

Les différentes parties du problèmes sont indépendantes.

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle *fonction génératrice des moments* de X la quantité

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}).$$

On souhaite étudier certaines propriétés de cette fonction.

Partie I : Variables à densité.

1) (i) Quelles valeurs peut prendre $M_X(t)$?

(ii) On suppose que X est une variable à densité f_X. Exprimer à l'aide du théorème de transfert $M_X(t)$ en fonction de f_X et de t.

(iii) Donner la définition d'une variable exponentielle, et montrer que si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, on a

$$M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}$$

2) On considère encore une variable aléatoire X à densité sur $\mathbb{R}$, et on suppose que sa densité f_X est maintenant de la forme

$$f_X(x) = \frac{c}{x^2}\mathbf{1}_{\{x\geq 1\}}.$$

(i) Déterminer la constante c.

(ii) On fixe $t > 0$, la fonction $e^{tx} f_X(x)$ est elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

(iii) En déduire la valeur de $M_X(t)$ pour $t > 0$.

3) Plus généralement, soit X une variable réelle positive (pas nécessairement à densité), on suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{E}(X^m) = +\infty$. Après avoir justifié que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et pour tout x positif,

$$e^x \geq \frac{x^k}{k!},$$

calculer la valeur de $M_X(t)$ pour $t > 0$.

Partie II : Variable Gaussienne.

On souhaite maintenant calculer la fonction génératrice des moments d'une variable gaussienne.

4) (i) Rappeler l'expression de la densité f_X d'une variable gaussienne centrée réduite $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

(ii) Montrer que l'on peut écrire

$$M_X(t) = e^{t^2/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-(x-t)^2/2\right) dx$$

(iii) En s'aidant d'un changement de variable $x \mapsto x - t$, calculer l'intégrale ci dessus. En déduire la valeur de $M_X(t)$ en fonction de t.

5) (i) On fixe $\sigma > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Quelle est la loi de $Z = \mu + \sigma X$?

(ii) Montrer que la fonction génératrice des moments d'une variable normale de moyenne μ et de variance σ^2 est donnée par

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + (\sigma t)^2/2\right)$$

Partie III : Intégrabilité.

Soit X une variable aléatoire réelle (pas nécessairement à densité), on suppose maintenant qu'il existe $t_0 > 0$ tel que

$$M_X(t_0) < +\infty \quad \text{et} \quad M_X(-t_0) < +\infty. \tag{$\star$}$$

L'objectif de cette partie est d'exprimer $M_X(s)$ pour $s \in [-t_0, t_0]$ comme une série entière.

6) (i) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \leq e^{|x|} \leq e^x + e^{-x}$.

(ii) Justifier que si X est positive, pour tout $s > 0$, on a $M_X(-s) \leq M_X(s)$.

(iii) Déduire des deux questions précédentes que $M_{|X|}(t_0) < +\infty$, puis que pour tout $s \in [-t_0, t_0]$, on a $M_{|X|}(s) < +\infty$.

(iv) Conclure que pour tout $s \in [-t_0, t_0]$, on a $M_X(s) < +\infty$.

7) On fixe maintenant $s \in [-t_0, t_0]$. On définit la suite de variables aléatoires

$$Y_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{|sX|^k}{k!}.$$

(i) Montrer que $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement, quand $m \to \infty$, vers une variable aléatoire Y que l'on précisera.

(ii) A l'aide de la question 6), montrer que Y est intégrable.

(iii) Après avoir justifié que la suite de variables aléatoires $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est croissante (en m), montrer que

$$\mathbb{E}(Y) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}(Y_m),$$

et en déduire que

$$\mathbb{E}\left(\exp(|sX|)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|s|^k \mathbb{E}(|X|^k)}{k!}$$

8) On pose maintenant

$$Z_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{s^k X^k}{k!}.$$

(i) Justifier la domination $|Z_m| \leq Y$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

(ii) En déduire que Z_m converge presque-sûrement et dans L^1 vers

$$Z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k X^k}{k!}.$$

(iii) En déduire que

$$M_X(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k \mathbb{E}(X^k)}{k!}.$$