M61B, Probabilités et intégration
Licence 3e année
Parcours mathématiques

DS3 Session de rattrapage - 3h

22 Juin 2022

- *La note maximale est 20, il n'y a pas besoin de traiter tout le DS pour l'obtenir. Parcourez rapidement tous les exercices avant de vous lancer, afin de vous concentrer en priorité sur ceux que vous maîtrisez le mieux.*
- *Les exercices sont indépendants entre eux, mais dans un même exercice, les questions ne le sont pas : pensez à utiliser les questions précédentes.*
- *Attention, les questions faciles valent moins de points, attaquez vous aussi à des questions difficiles !*
- *Il est possible d'admettre certaines questions pour traiter les suivantes.*
- *Attention aux justifications : une bonne réponse mal justifiée ne vaut pas grand chose...*
- *Aucune réponse du corrigé ne fait plus de 6 lignes, attention à ne pas se lancer dans des raisonnements trop compliqués !*

Exercice 1 : Questions de cours

1) Énoncer le lemme de Fatou.
2) Qu'est ce qu'une tribu ?
3) Énoncer l'inégalité de Jensen.
4) Qu'est ce qu'une mesure ?
5) Énoncer le théorème central limite

Solution. Voir poly.

Exercice 2 : Quizz

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la justifier, si elle est fausse, l'infirmer, par exemple à l'aide d'un contre exemple.

1) Si X et Y sont des variables indépendantes, alors les variables aléatoires X et $Z = XY$ sont également indépendantes.

Solution. C'est faux : si par exemple $X \sim \text{Bernoulli}(1/2)$ et $Y = 1$, on a évidemment pas X indépendant de $Z = X$.

2) Un borélien (c'est-à-dire un élément de la tribu borélienne) de $\mathbb{R}$ d'intérieur non-vide peut-être de mesure de Lebesgue nulle.

SOLUTION. C'est faux : un borélien B d'intérieur non-vide, par définition, contient un petit intervalle $]a,b[$ non vide. En particulier, B contient $]a,b[$ et donc $\lambda(B) > \lambda(]a,b[) = b-a > 0$.

3) Soit X_n une suite croissante de variables aléatoires. Alors, il existe une variable X vers laquelle (X_n) converge presque-sûrement, et par ailleurs $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n)$ existe et vaut $\mathbb{E}(X)$. *Indice : on pourra s'aider d'une variable aléatoire Y, à valeurs négatives, poser $X_n = Y\mathbf{1}_{\{Y\leq -n\}}$, et discuter selon que Y est intégrable ou non.*

SOLUTION. C'est faux, on ne peut pas ici appliquer le théorème de convergence monotone car les variables ne sont pas supposées positives. En particulier, Si Y est négative et non intégrable, on pose $X_n = Y\mathbf{1}_{\{Y\leq -n\}}$, qui est bien une suite croissante, mais telle que

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y\mathbf{1}_{\{Y\in]-n,0]\}}) \leq \mathbb{E}(Y) + n = -\infty.$$

Or Y_n converge presque surement vers $X = 0$, et $\mathbb{E}(X) = 0$.

4) Soit X une variables réelle à densité f_X continue par morceaux. La fonction de répartition F_X de X est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

SOLUTION. C'est faux, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$, et donc $F'_X = f_X$ n'est pas continue mais juste continue par morceaux.

Exercice 3 : Convergences en loi et en probabilités

Dans tout l'exercice, on considère une variable aléatoire X et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires, toutes réelles et construites sur le même espace de probabilités. L'objectif de l'exercice est de montrer que

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{(d)} X,$$

et que la réciproque est vraie si X est une variable presque-sûrement constante.

1) On suppose dans un premier temps que (X_n) converge vers X en probabilités, on veut montrer qu'elle converge également en loi.

(i) Rappeler ce que ces deux convergences signifient.

SOLUTION. Voir poly.

(ii) En séparant selon les deux cas $|X_n - X| < \varepsilon$ et $|X_n - X| \geq \varepsilon$, montrer que

$$\mathbb{P}(X_n \leq x) \leq \mathbb{P}(X \leq x+\varepsilon) + \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon).$$

SOLUTION. On écrit que

$$\mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(X_n \leq x \text{ et } |X_n - X| < \varepsilon) + \mathbb{P}(X_n \leq x \text{ et } |X_n - X| \geq \varepsilon)$$

$$\le \mathbb{P}(X \le x+\varepsilon) + \mathbb{P}(|X_n - X| \ge \varepsilon),$$

car $X_n \le x$ et $|X_n - X| < \varepsilon$ implique en particulier que $X \le x+\varepsilon$.

(iii) De la même manière, justifier que

$$\mathbb{P}(X \le x-\varepsilon) \le \mathbb{P}(X_n \le x) + \mathbb{P}(|X_n - X| \ge \varepsilon)$$

SOLUTION. On applique l'identité précédente en inversant le role de X_n et X, et à $x' = x+\varepsilon$.

(iv) On note F et F_n les fonctions de répartition respectives de X et X_n. Justifier avec les question précédentes qu'il existe une suite de fonctions h_n telle que $\lim_{n\to\infty} h_n(\varepsilon) = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$, et

$$F(x-\varepsilon) - h_n(\varepsilon) \le F_n(x) \le F(x+\varepsilon) + h_n(\varepsilon).$$

SOLUTION. On pose $h_n(\varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n - X| \ge \varepsilon)$, qui tend bien vers 0 pour tout $\varepsilon > 0$ car X_n tend vers X en probabilités. On utilise alors les deux inégalités précédentes et la définition de la fonction de répartition pour obtenir la borne voulue.

(v) On suppose que F est continue en x. En faisant tendre n vers l'infini puis ε vers 0, montrer que la limite quand $n \to \infty$ de $F_n(x)$ existe et vaut $F(x)$.
SOLUTION. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient que pour tout $\varepsilon > 0$

$$F(x-\varepsilon) \le \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \le \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \le F(x+\varepsilon).$$

F étant continue en x on fait ensuite tendre ε vers 0 pour obtenir que

$$F(x) \le \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \le \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \le F(x).$$

donc $F_n(x)$ converge, et sa limite vaut $F(x)$.

(vi) Conclure sur la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
SOLUTION. $F_n(x)$ converge donc vers $F(x)$ en tout x ou F est continue, c'est une des caractérisations de la convergence en loi que nous avons vues dans le cours.

2) On considère maintenant une variable X presque-sûrement constante, c'est à dire telle qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ que $\mathbb{P}(X = c) = 1$. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X en loi. On souhaite montrer qu'elle converge également en probabilités.
(i) Calculer en fonction de x la fonction de répartition F de X, et la tracer.
SOLUTION. La fonction F_X est un step en c : $F_X(x) = \mathbf{1}_{\{x\ge c\}}$.

(ii) Quels sont les points de continuité de F ?
SOLUTION. F_X est continue partout sauf en c.

(iii) Exprimer $\mathbb{P}(c-\varepsilon < X_n \leq c+\varepsilon)$ en fonction de F_n, la fonction de répartition de X_n.
SOLUTION. par union disjointe,

$$\mathbb{P}(c-\varepsilon < X_n \leq c+\varepsilon) = \mathbb{P}(X_n \leq c+\varepsilon) - \mathbb{P}(X_n \leq c-\varepsilon) = F_n(c+\varepsilon) - F_n(c-\varepsilon).$$

(iv) En utilisant la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(c-\varepsilon < X_n \leq c+\varepsilon)$$

existe et vaut 1, et ce pour tout $\varepsilon > 0$.
SOLUTION. Comme X_n converge en loi vers X, on a pour tout $x \neq c$, on a $F_n(x) \to F_X(x)$.en particulier, on fait tendre $n \to \infty$ dans l'identité précédente, pour obtenir

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(c-\varepsilon < X_n \leq c+\varepsilon) = F_X(c+\varepsilon) - F_X(c-\varepsilon) = 1$$

par la question 2)-i).

(v) Conclure sur la convergence en probabilités de (X_n) vers X.
SOLUTION. Par passage au complémentaire, on déduit de la question précédente que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) = 0$, c'est à dire que X_n tend vers c en probabilités.

Problème : Fonctions génératrice des moments

Les différentes parties du problèmes sont indépendantes.

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle *fonction génératrice des moments* de X la quantité

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}).$$

On souhaite étudier certaines propriétés de cette fonction.

PARTIE I : VARIABLES À DENSITÉ.

1) (i) Quelles valeurs peut prendre $M_X(t)$?
SOLUTION. e^{tX} est une variable aléatoire positive, on en déduit que son espérance est dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

(ii) On suppose que X est une variable à densité f_X. Exprimer à l'aide du théorème de transfert $M_X(t)$ en fonction de f_X et de t.

SOLUTION. Par théorème de transfert,

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f_X(x) dx.$$

(iii) Donner la définition d'une variable exponentielle, et montrer que si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, on a

$$M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}$$

SOLUTION. cf. cours, et donc

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \lambda \int_0^{+\infty} e^{tx} e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{(t-\lambda)x} dx = -\frac{\lambda}{t-\lambda},$$

ce qui prouve le résultat.

2) On considère encore une variable aléatoire X à densité sur $\mathbb{R}$, et on suppose que sa densité f_X est maintenant de la forme

$$f_X(x) = \frac{c}{x^2} \mathbf{1}_{\{x \geq 1\}}.$$

(i) Déterminer la constante c.
SOLUTION. On doit avoir $\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = 1$, et donc

$$1 = c \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{-c}{x}\right]_1^{+\infty},$$

d'où $c = 1$.

(ii) On fixe $t > 0$, la fonction $e^{tx} f_X(x)$ est elle intégrable sur $\mathbb{R}$?
SOLUTION. Pour $t > 0$, $e^{tx} f_X(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, elle n'est donc en particulier pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

(iii) En déduire la valeur de $M_X(t)$ pour $t > 0$.
SOLUTION. On en dédiot que $M_X(t) = +\infty$ pour $t > 0$.

3) Plus généralement, soit X une variable réelle positive (pas nécessairement à densité), on suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{E}(X^m) = +\infty$. Après avoir justifié que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et pour tout x positif,

$$e^x \geq \frac{x^k}{k!},$$

calculer la valeur de $M_X(t)$ pour $t > 0$.

SOLUTION. En écrivant, pour $x > 0$, $e^x = \sum x^k/k!$ comme une série de termes positifs, elle est supérieure à chacun de ses termes, et donc $e^x > x^k/k!$ pour tout $k \geq 0$. On en déduit que si pour m fixé, $\mathbb{E}(X^m) = +\infty$, on a pour tout $t > 0$,

$$M_X(t) > \mathbb{E}((tX)^m/m!) = t^m\mathbb{E}(X^m)/m! = +\infty.$$

PARTIE II : VARIABLE GAUSSIENNE.

On souhaite maintenant calculer la fonction génératrice des moments d'une variable gaussienne.

4) (i) Rappeler l'expression de la densité f_X d'une variable gaussienne centrée réduite $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

SOLUTION. cf. cours.

(ii) Montrer que l'on peut écrire

$$M_X(t) = e^{t^2/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-(x-t)^2/2\right) dx$$

SOLUTION. Par le théorème de transfert,

$$M_X(t) \int_{\mathbb{R}} f_X(x)e^{tx}dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-x^2/2 + tx\right) dx.$$

On écrit alors $-x^2/2 + tx = -(x-t)^2/2 + t^2/2$ pour obtenir le résultat.

(iii) En s'aidant d'un changement de variable $x \mapsto x - t$, calculer l'intégrale ci dessus. En déduire la valeur de $M_X(t)$ en fonction de t.

SOLUTION. En opérant le changement de variable, on voit que l'intégrale vaut 1, puisque c'est l'intégrale sur $\mathbb{R}$ d'une dénsité gaussienne de moyenne t. Par conséquent, $M_X(t) = e^{t^2}/2$.

5) (i) On fixe $\sigma > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Quelle est la loi de $Z = \mu + \sigma X$?

SOLUTION. C'est une loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, de moyenne μ et de variance σ^2.

(ii) Montrer que la fonction génératrice des moments d'une variable normale de moyenne μ et de variance σ^2 est donnée par

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + (\sigma t)^2/2\right)$$

SOLUTION. On définit $Y = (X-\mu)/\sigma$ qui suit une loi normale centrée réduite. On a vu que $M_Y(t) = e^{t^2/2}$, or par sa définition

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \mathbb{E}(\exp(t\sigma(X-\mu)/\sigma + t\mu)) = e^{t\mu}M_Y(t\sigma),$$

ce qui prouve le résultat.

Partie III : Intégrabilité.

Soit X une variable aléatoire réelle (pas nécessairement à densité), on suppose maintenant qu'il existe $t_0 > 0$ tel que

$$M_X(t_0) < +\infty \qquad \text{et} \qquad M_X(-t_0) < +\infty. \tag{$\star$}$$

L'objectif de cette partie est d'exprimer $M_X(s)$ pour $s \in [-t_0, t_0]$ comme une série entière.

6) (i) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \leq e^{|x|} \leq e^x + e^{-x}$.

Solution. *La première partie de l'identité vient du fait que exponentielle est croissante, et que $|x| \leq x$. Pour la seconde, on sépare selon le signe de x, et on utilise que e^x et e^{-x} sont toutes deux positives.*

(ii) Justifier que si X est positive, pour tout $s > 0$, on a $M_X(-s) \leq M_X(s)$.

Solution. *Si X est positive, et s aussi, on a presque-sûrement $e^{-Xs} \leq e^{Xs}$, passer à l'espérance prouve le résultat.*

(iii) Déduire des deux questions précédentes que $M_{|X|}(t_0) < +\infty$, puis que pour tout $s \in [-t_0, t_0]$, on a $M_{|X|}(s) < +\infty$.

Solution. *On a supposé que $M_X(t_0)$ et $M_X(-t_0)$ qui sont finies, et donc par i), $M_{|X|}(t_0) < \infty$. Comme $|X|$ est positive, $M_{|X|}(t)$ est une fonction croissante en t, et donc $M_{|X|}(t) < \infty$ pour tout $t < t_0$.*

(iv) Conclure que pour tout $s \in [-t_0, t_0]$, on a $M_X(s) < +\infty$.

Solution. *Toujours par i), on a montré que $e^x \leq e^{|x|}$, et donc pour s positif, $M_X(s) \leq M_{|X|}(s) < +\infty$. Pour s négatif, $M_X(s) < M_X(-s) < +\infty$.*

7) On fixe maintenant $s \in [-t_0, t_0]$. On définit la suite de variables aléatoires

$$Y_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{|sX|^k}{k!}.$$

(i) Montrer que $(Y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge presque-sûrement, quand $m \to \infty$, vers une variable aléatoire Y que l'on précisera.

Solution. *On reconnait la série exponentielle, et donc Y_m converge p.s. vers $Y = e^{|sX|}$.*

(ii) A l'aide de la question 6), montrer que Y est intégrable.

Solution. *Comme $s \in [-t_0, t_0]$, Y est intégrable par la question 6) – iii).*

(iii) Après avoir justifié que la suite de variables aléatoires $(Y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est croissante (en m), montrer que

$$\mathbb{E}(Y) = \lim_{m \to \infty} \mathbb{E}(Y_m),$$

et en déduire que

$$\mathbb{E}\left(\exp(|sX|)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|s|^k \mathbb{E}(|X|^k)}{k!}$$

<u>SOLUTION</u>. La suite $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est la somme partielle d'une série à termes positifs, elle est croissante. En particulier, $0 \leq Y_m \leq Y$, on peut donc utiliser le théorème de convergence monotone parce que les Y_m sont positifs, pour obtenir que $\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}(Y_m) = \mathbb{E}(Y)$. Or $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\exp(|sX|)$, et par ailleurs

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}(Y_m) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|s|^k \mathbb{E}(|X|^k)}{k!}$$

par linéarité de l'espérance.

8) On pose maintenant

$$Z_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{s^k X^k}{k!}.$$

(i) Justifier la domination $|Z_m| \leq Y$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

<u>SOLUTION</u>. on passe à la valeur absolue, par inégalité triangulaire, pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$|Z_m| \leq \sum_{k=0}^{m} \frac{|s^k X^k|}{k!} = Y_m \leq Y.$$

(ii) En déduire que Z_m converge presque-sûrement et dans L^1 vers

$$Z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k X^k}{k!}.$$

<u>SOLUTION</u>. On remarque que $Z_m(\omega)$ converge pour tout ω vers $Z(\omega) = e^{sX(\omega)}$. On a la domination de la question précédente, qui satisfait que $\mathbb{E}(Y) < \infty$ est intégrable, on applique le théorème de convergence dominée, pour obtenir que Z_m converge dans L^1 vers $Z = e^{sX}$.

(iii) En déduire que

$$M_X(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k \mathbb{E}(X^k)}{k!}.$$

<u>SOLUTION</u>. Par la question précédente, on a en particulier $M_X(s) = \mathbb{E}(Z) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}(Z_m)$. Or la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k \mathbb{E}(X^k)}{k!}$$

est absolument convergente par inégalite triangulaire, elle est donc également convergente, c'est la limite de ses sommes partielles. On en déduit par la linéarité de l'espérance le résultat voulu.