M61B, Probabilités et intégration
Licence 3e année
Parcours mathématiques

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES | Université de Lille

TD1 - Événements, tribus*

1 - Rappels : probabilité, indépendance, conditionnement

Exercice 1 : Quizz ⋆⋆

Pour chacune des assertions suivantes, donner soit une preuve, soit un contre-exemple.

1) Si A et B sont deux événements indépendants et incompatibles alors l'un des deux événements au moins est de probabilité nulle.

2) Si l'un des événements A ou B est de probabilité nulle alors A et B sont indépendants et incompatibles.

3) Si un événement A est indépendant d'un événement B et d'un événement C, alors il est indépendant de $B \cup C$.

4) Si un événement A est indépendant d'un événement B et si C est un événement tel que $C \subset B$ alors A est indépendant de C.

Exercice 2 : Une inégalité injustement méconnue ⋆

Sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on note A un événement quelconque et B un événement tel que $0 < \mathbb{P}(B) < 1$.

1) Montrez que

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4} |\mathbb{P}(A \mid B) - \mathbb{P}(A \mid B^c)| . \tag{1}$$

Indice : Commencez par exprimer $\mathbb{P}(A \mid B) - \mathbb{P}(A \mid B^c)$ en fonction des seules probabilités $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$.

2) Que donne l'inégalité (1) lorsque $A \subset B$?

3) Dans quels cas (1) est-elle une égalité ?

---

*Pour toute typo/question, me contacter à *clement.erignoux@inria.fr*. Les fiches de TD seront uploadées sur ma page web, http ://chercheurs.lille.inria.fr/cerignou/homepage.html. La difficulté de certains exercices est indiquée de ⋆ (facile) jusqu'à ⋆ ⋆ ⋆ (difficile).

Exercice 3 : Etre de probabilité 1 ou ne pas être ⋆ ⋆ ⋆

1) Quelle est la probabilité d'une intersection dénombrable d'événements de probabilité 1 ?
2) Peut-il exister n événements indépendants de même probabilité p dont la réunion soit l'espace Ω tout entier ?

Exercice 4 : Tirer un nombre réel au hasard

On décide de « tirer au hasard » un réel $x \in [0, 1[$. Pour cela on effectue — par la pensée ! — une infinité de tirages avec remise dans une urne contenant des boules marquées chacune d'un chiffre décimal. On construit x en écrivant — toujours par la pensée — son développement décimal illimité, le numéro sorti au i^e tirage fournissant le i^e chiffre décimal de x. La composition précise de l'urne est inconnue. On sait seulement qu'il y a au moins une boule marquée 0, qu'il n'y a aucune boule marquée 9 et qu'il y a au moins une boule marquée d'un autre chiffre que 0. Comme aucune boule dans l'urne n'est marquée 9, le développement décimal illimité ainsi obtenu est forcément propre. On note p la probabilité de sortir une boule marquée 0 au i^e tirage. En raison du mode de tirage (une boule avec remise) et de la composition de l'urne, il est clair que p ne dépend pas de i et que $0 < p < 1$.
Pour chaque i de $\mathbb{N}^*$ on note N_i l'événement :

$$N_i := \{\text{le } i^e \text{ chiffre de } x \text{ après la virgule est un zéro}\}$$

Les N_i sont indépendants et tous de probabilité p.
1) Exprimer par des opérations ensemblistes sur les N_i les événements :

$$\begin{aligned} D_n &:= \{\text{l'écriture décimale illimitée de } x \text{ ne comporte} \\ &\qquad\qquad \text{que des zéros à partir du rang } n\}, \\ D &:= \{x \text{ est un nombre décimal}\}, \\ E &:= \{\text{l'écriture de } x \text{ comporte une infinité de zéros}\}. \end{aligned}$$

Comparer D et E.
2) Donner $\mathbb{P}(\{x < 10^{-4}\})$. Les N_i, $i \in \mathbb{N}^*$, sont-ils deux à deux disjoints ?
3) Calculer la probabilité de l'évènement

$$F_n := \{\text{le premier chiffre non-nul après la virgule est au rang } n\}.$$

Les F_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont-ils deux à deux disjoints ?
4) Écrire $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{+\infty} N_i^c$ à l'aide des F_n et calculer sa probabilité. En déduire $\mathbb{P}(\{x = 0\})$.
5) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, calculer la valeur de $\mathbb{P}(D_m)$. On pourra utiliser la monotonie de la suite $(G_n)_{n \geq m}$ où $G_n := \displaystyle\bigcap_{i=m}^{n} N_i$.

6) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre décimal avec ce type de tirage aléatoire ?
7) Reprendre la question précédente avec une urne dans laquelle on a rajouté une boule numerotée 9.

2 - Intégrabilité, limsup, liminf

Exercice 5 : Fonction non Riemann intégrable ⋆ ⋆ ⋆

1) Soit h la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,1], \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} .$$

Vérifier que h est Riemann intégrable.
2) Considérons $f(x) = \mathbf{1}_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)$. Montrer que f n'est pas Riemann intégrable sur $[0,1]$.
3) Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ avec pgcd}(p,q) = 1, 0 < p \leq q, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que g est Riemann intégrable et que $f = h \circ g$. Que peut-on en déduire ?

4) On rappelle que $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ est dénombrable et on note $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une numérotation de cet ensemble. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \mathbf{1}_{\{r_1,\dots,r_n\}}(x)$.
Montrer que f_n est Riemann intégrable sur $[0,1]$.
5) Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement vers f. Que peut-on en déduire ?

Exercice 6 : Limites supérieures et inférieures d'ensemble ⋆ ⋆ ⋆

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble Ω, on définit

$$\limsup A_n = \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{p\geq n} A_p \quad \text{et} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n\geq 0} \bigcap_{p\geq n} A_p.$$

1) Justifier que $\limsup_{n\to+\infty} A_n$ est l'ensemble des éléments de Ω appartenant à une infinité de A_n et $\liminf_{n\to+\infty} A_n$ est l'ensemble des éléments de Ω appartenant à tous les A_n sauf à un nombre fini.
2) Montrer que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, alors

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

3) Montrer que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, alors

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

4) Calculer $\mathbf{1}_{\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n}$, $\mathbf{1}_{\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n}$, $\mathbf{1}_{\limsup A_n}$ et $\mathbf{1}_{\liminf A_n}$ en fonction des $\mathbf{1}_{A_n}$.

5) Montrer que

   (i) $(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$.

   (ii) $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

   (iii) $\limsup A_n = \{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n} = +\infty\}$.

   (iv) $\liminf A_n = \{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n^c} < +\infty\}$.

   (v) $\limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n$.

   (vi) $\limsup(A_n \cap B_n) \subset \limsup A_n \cap \limsup B_n$.

6) Calculer $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ dans les cas suivants :

   (i) $A_n =]-\infty, a_n]$ avec $a_{2p} = 1 + \frac{1}{2p}$ et $a_{2p+1} = -1 - \frac{1}{2p+1}$.

   (ii) $A_{2p} =]0, 3 + \frac{1}{3p}[$ et $A_{2p+1} =]-1 - \frac{1}{3p}, 2]$.

   (iii) $A_k = p_k\mathbb{N}$ où $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la suite des nombres premiers.

3 - Tribus

Exercice 7 : Quizz ⋆

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier brièvement ou donner un contre-exemple.

1) Soient $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ deux tribus sur Ω. Alors $\mathscr{T} \cup \mathscr{T}'$ est une tribu sur Ω.

2) Si A est un ensemble inclus dans un ensemble B mesurable, alors A est mesurable.

Exercice 8 : Union et intersection de tribus ⋆⋆

1) Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.

   (i) Identifier la tribu $\mathcal{F}_1$, engendrée par le singleton $\{1\}$ et la tribu $\mathcal{F}_2$ engendrée par $\{2\}$.

   (ii) Identifier $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. Est-ce que ce sont des tribus ?

2) Soit Ω un ensemble quelconque et C_1 et C_2 des collections d'ensembles de Ω. Donc $C_i \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

   (i) Montrer que $\mathcal{F}_{C_1\cap C_2} \subset \mathcal{F}_{C_1} \cap \mathcal{F}_{C_2}$.

   (ii) Montrer qu'il n'est pas toujours vrai que $\mathcal{F}_{C_1} \cap \mathcal{F}_{C_2} \subset \mathcal{F}_{C_1\cap C_2}$.

3) Soit $C \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

   (i) Soit $C^c = \mathcal{P}(\Omega) \setminus C$. Est-il vrai que $\mathcal{F}_C \cap \mathcal{F}_{C^c} = \emptyset$? Est-il vrai que $\mathcal{F}_C = \mathcal{F}_{C^c}$?

   (ii) Soit $C \subset \mathcal{P}(\Omega)$ et soit $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) | A^c \in C\}$. Est-il vrai que $\mathcal{F}_C = \mathcal{F}_{\mathcal{D}}$?

Exercice 9 : Tribu, expérience, information

1) On lance un dé à quatre faces. Ecrire l'ensemble Ω de tous les résultats possibles.
2) Une personne lance le dé et nous annonce le résultat tiré. Ecrire la tribu $\mathcal{F}_2$ de tous les évènements observables pour nous.
3) La personne lance le dé et nous annonce seulement "pair" ou "impair". Ecrire la tribu $\mathcal{F}_1$ des évènements observables pour nous.
4) La personne lance le dé et n'annonce rien ! A quelle la tribu $\mathcal{F}_0$ correspond cette fois l'expérience que nous observons ?
5) On dit que $(\mathcal{F}_0,\ \mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2)$ est une suite croissante de tribus. En quoi est-elle croissante ? Qu'est-ce qui augmente, intuitivement, le long de cette suite ? Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, que représente la tribu $\mathcal{F}$?
6) La modélisation mathématique des produits financiers dérivés (stock-options) utilise des espaces probabilisés complexes. Ils sont munis de tribus $\mathcal{F}_t$ indexées par la date et contenant tous les événements observables de l'origine jusqu'à la date t. L'affirmation $\mathcal{F}_{2 \text{ janvier } 2020} \subset \mathcal{F}_{31 \text{ mars } 2022}$ est considérée par les quants comme une évidence. Pourquoi ? Quelle capacité (réaliste ?) présuppose ce choix de modélisation ?

Exercice 10 : Une tribu sur les entiers ⋆

Soit $\Omega = \mathbb{Z}$. On considère $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par les ensembles

$$S_n = \{n, n+1, n+2\}$$

avec $z \in \mathbb{Z}$.
1) Montrer que quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, $\{n\}$ appartient à $\mathcal{T}$.
2) En déduire $\mathcal{T}$.

Exercice 11 : Tribu engendrée par une partition ⋆⋆

Soit E un ensemble et $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ une partition de E, c'est-à-dire

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \qquad E_i \cap E_j = \emptyset,\ i \neq j.$$

Montrer que

$$\sigma(\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}) = \left\{ \bigcup_{i \in I} E_i :\ I \subset \{1, 2, \ldots, n\} \right\}.$$

Exercice 12 : Ensemble engendrant la tribu borélienne

Soit $\mathcal{B}(]0,1[)$ la tribu Borélienne sur $]0,1[$.
1) Montrer que tout ouvert de $]0,1[$ peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles de $]0,1[$ de la forme $[r-\delta, r+\delta]$ où r et δ sont des rationnels de $]0,1[$.
2) Montrer que $\mathcal{B}(]0,1[)$ est engendrée par chacune des familles suivantes :
   (i) $C_1 = \{[a,b],\ a \leq b,\ a,b \in]0,1[\}$.
   (ii) $C_2 = \{[a,b],\ a \leq b,\ a,b \in]0,1[\cap\mathbb{Q}\}$.
   (iii) $C_3 = \{]0,t],\ t \in]0,1[\}$.
   (iv) $C_4 = \{]0, \frac{1}{2^n}[,\ [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[,\ n \in \mathbb{N},\ k \in \{1, \dots 2^n - 1\}\}$.
3) Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la famille suivante d'ensembles de $]0,1[$:

$$\mathscr{T}_n = \sigma\Big(]0, 1/2^n[,\ [k/2^n, (k+1)/2^n[,\ k \in \{1, \dots 2^n - 1\}\Big).$$

Montrer que la suite des $(\mathscr{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion mais que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{T}_n$ n'est pas une tribu.
Indication : on pourra vérifier que

$$\{1/2\} = \bigcap_{n\geq 1} \left[\frac{k_n}{2^n}, \frac{k_n+1}{2^n}\right[,$$

pour une certaine suite d'entiers $k_n \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$ et raisonner par l'absurde en montrant que si $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{T}_n$ est une tribu, alors $\{1/2\} \in \mathscr{T}_n$, pour un certain n. On conclura à une absurdité en utilisant l'Exercice 11.

Exercice 13 : Tribu engendrée par les singletons

Soit Ω un ensemble non vide et $\mathscr{T} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) : A \text{ dénombrable ou } \Omega \setminus A \text{ dénombrable}\}$.
1) Vérifier que $\mathscr{T}$ est une tribu sur Ω.
2) Montrer que la tribu engendrée par les singletons de Ω est $\mathscr{T}$.
3) Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des parties finies de Ω ?

Exercice 14 : Points de convergence d'une suite d'applications ⋆ ⋆ ⋆

Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications continues de $\mathbb{R}$ dans lui-même.
1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $(f_n(x))_n$ converge vers l si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $l \geq k$, $|f_l(x) - l| < \frac{1}{n}$.
2) Soit $A = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\}$. Montrer que

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{l\geq k} f_l^{-1}\,]-1/n, 1/n[\,.$$

En déduire que A est un borélien de $\mathbb{R}$.
3) Montrer que $B = \{x \in \mathbb{R} : (f_n(x))_n \text{ admet } 0 \text{ comme valeur d'adhérence}\}$

est un borélien de $\mathbb{R}$.
4) Soit $C = \{x \in \mathbb{R} : (f_n(x))_{n\geq 1}$ converge simplement$\}$ En procédant comme dans les questions 1) et 2) avec le critère de Cauchy, montrer que C est un borélien de $\mathbb{R}$.

Exercice 15

On rappelle que la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^2$ est engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^2$. Démontrer que les ensembles suivants sont des boréliens de $\mathbb{R}^2$:

(i) $\Delta = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \in \mathbb{R}\}$.

(ii) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 = 1 \text{ et } x \notin \mathbb{Q}\}$.