M61B, Probabilités et intégration
Licence 3e année
Parcours mathématiques

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES | Université de Lille

TD2 - Applications mesurables *

Exercice 1 : Quizz

Soient f et g des applications d'un espace mesurable $(E, \mathscr{T})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier brièvement ou donner un contre-exemple.
1) Si f est $(\mathscr{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable, alors $|f|$ est aussi $(\mathscr{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.
2) Si f et g sont $(\mathscr{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables, alors les fonctions $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont aussi $(\mathscr{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables.
3) Si $|f|$ est $(\mathscr{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable, alors f est aussi $(\mathscr{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

Exercice 2 : Tribu grossière, triviale ⋆⋆

Quelles sont les applications mesurables h de $(E, \mathscr{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ lorsque $\mathscr{T}$ est la tribu grossière? lorsque $\mathscr{T}$ est la tribu triviale?

Exercice 3 : Partitions et fonctions mesurables

Soit $(A_n)_{n\in I}$ une partition d'un ensemble E où $I \subset \mathbb{N}$.
1) Caractériser les éléments de la tribu $\mathscr{T} := \sigma(\{A_n : n \in I\})$ lorsque $I = \{0\}$, $I = \{0, 1\}$, $I = \{0, 1, 2\}$, $I = \mathbb{N}$.
2) Soit f une fonction mesurable de $(E, \mathscr{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que f est constante sur chaque A_n. En déduire la forme générale des applications mesurables pour I comme dans la question a).

Exercice 4 : Résultats essentiels à retenir! ⋆ ⋆ ⋆

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables d'un espace mesurable $(E, \mathscr{T})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne. Montrer que l'on a les propriétés suivantes :
1) En considérant les images réciproques de $]-\infty, a]$ pour $a \in \mathbb{R}$, montrer que $\sup_n(f_n)$ est mesurable.
2) Montrer que $\inf_n(f_n)$ est mesurable.
3) Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f, montrer que

*Pour toute typo/question, me contacter à *clement.erignoux@inria.fr*. Les fiches de TD seront uploadées sur ma page web, http ://chercheurs.lille.inria.fr/cerignou/homepage.html. La difficulté de certains exercices est indiquée de ⋆ (facile) jusqu'à ⋆ ⋆ ⋆ (difficile).

pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(]-\infty, a]) = \bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} f_k^{-1}\left(\left]-\infty, a+\frac{1}{p}\right]\right).$$

En déduire que f est mesurable.

Exercice 5 : Une fonction mesurable non continue

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Montrer que f est mesurable mais n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 6 : Une fonction monotone est mesurable

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone.
1) Montrer que, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, c[)$ est convexe.
2) En déduire que f est mesurable.

Exercice 7 : Ensemble où deux fonctions mesurables coincident

Soient f, g deux applications mesurables d'un espace mesurable $(E, \mathscr{T})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ (muni de la tribu borélienne). Montrer que
$\{x \in E : f(x) = g(x)\} \in \mathscr{T}$.
Indication : on prendra garde au fait que les fonctions f et g peuvent prendre des valeurs infinies....

Exercice 8 : Mesurabilité de limites de fonctions mesurables ⋆

Soit (E,d) un espace métrique et $(E, \mathscr{T})$ un espace mesurable. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de E dans E qui sont $(\mathscr{T}, \mathcal{B}(E))$-mesurables.
1) Supposons dans cette question que $(f_n)_n$ converge simplement vers une application f. Montrer que f est $(\mathscr{T}, \mathcal{B}(E))$-mesurable.
2) Supposons que E soit complet. Montrer que

$$\{x \in E : (f_n(x))_n \text{ converge simplement}\} \in \mathscr{T}.$$

Exercice 9

On munit $\mathbb{R}$ de la tribu des borélien. Montrer que les fonctions suivantes sont mesurables :

1. La fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$,
2. la fonction f définie par $f(x) = x + 1$ si $x > 0$ et $f(x) = -x$ si $x \leq 0$.

3. La dérivée g' d'une fonction dérivable g; on remarquera que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(x+\frac{1}{n})-g(x)}{\frac{1}{n}} = g'(x),$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 10

Soit Ω un ensembles, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω, E une partie mesurable de Ω et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{T}$-$B(\mathbb{R})$-mesurable. On définit $g : \Omega \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin E \\ f(x) & \text{si } x \in E \end{cases}.$$

Montrer que f est mesurable si et seulement si g est mesurable (on pourra commencer par le cas où f est constante égale à 1).