M61B, Probabilités et intégration
Licence 3e année
Parcours mathématiques

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES | Université de Lille

TD3 - Mesures et mesure de Lebesgue *

1 Exemples et propriétés des mesures

Exercice 1 : La mesure de comptage ⋆

Soit X un ensemble non vide. Pour $A \in \mathcal{P}(X)$, on pose

$$c(A) = \mathrm{card}(A).$$

Montrer que c est une mesure sur $(X, \mathcal{P}(X))$. Cette mesure s'appelle la mesure de comptage sur X.

Exercice 2 : Montrer qu'une application est une mesure ⋆⋆

Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Dans chacun des cas suivants, montrer que l'application donnée est une mesure.

1. pour $a \in E$ fixé, δ_a est l'application définie par $\forall A \in \mathcal{T}$, $\delta_a(A) = \mathbf{1}_A(a)$.
2. $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ A \text{ ou } A^c \text{ est dénombrable}\}$ et $\mu(A) = 0$ si A est dénombrable, $\mu(A) = 1$ sinon.

Exercice 3 : Ensembles de mesure positive ⋆ ⋆ ⋆

Soit $f : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. Soit μ une mesure sur $(E, \mathcal{T})$.

1. Montrer que si $\mu(E) \neq 0$, alors il existe $A \in \mathcal{T}$, $\mu(A) \neq 0$ tel que f soit bornée sur A.
2. Justifier que $\{f \neq 0\} \in \mathcal{T}$.
3. Montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$, alors il existe $A \in \mathcal{T}$, $\mu(A) \neq 0$ tel que $|f|$ est minorée sur A par une constante strictement positive.

---

*Pour toute typo/question, me contacter à *clement.erignoux@inria.fr*. Les fiches de TD seront uploadées sur ma page web, http ://chercheurs.lille.inria.fr/cerignou/homepage.html. La difficulté de certains exercices est indiquée de ⋆ (facile) jusqu'à ⋆ ⋆ ⋆ (difficile).

Exercice 4

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On note

$$\mathscr{T} = \{A \in \mathscr{F} \mid \mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } \mathbb{P}(A) = 1\}.$$

Montrer que $\mathscr{T}$ est une tribu.

Exercice 5 : Régularité et mesure finie ⋆⋆

Soit μ une mesure **finie** sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. L'objectif de l'exercice est de montrer que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \text{ fermé }, F \subset A\}$$

et

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) : O \text{ ouvert }, A \subset O\}.$$

1. Montrer qu'il suffit de prouver que tout borélien A de $\mathbb{R}$ vérifie la propriété suivante :

$$(P) \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ il existe un ouvert } O \text{ et un fermé } F$$

$$\text{de } \mathbb{R} \text{ tels que } F \subset A \subset O \text{ et } \mu(O \setminus F) \leq \varepsilon.$$

2. Introduisons $\mathscr{T} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A \text{ vérifie (P)}\}$.
   (a) Montrer que $\mathscr{T}$ contient $\mathcal{O}(\mathbb{R})$, l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$.
   Indication : soit $A \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$; on pourra considérer $F_p = \{x \in \mathbb{R} : d(x, A^c) \geq 1/p\}$, $p \geq 1$, et remarquer que $A = \bigcup_{p \geq 1} F_p$.
   (b) Montrer que $\mathscr{T}$ est stable par union dénombrable.
   Indication : soit $A_n \in \mathscr{T}$, $n \geq 1$, et $\varepsilon > 0$. Considérer alors F_n fermé de $\mathbb{R}$ et O_n ouvert de $\mathbb{R}$ tels que $F_n \subset A_n \subset O_n$ et $\mu(O_n \setminus F_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Remarquer qu'il existe $n \geq 1$ tel que $\mu(\bigcup_{k \geq 1} F_n) \leq \mu(\bigcup_{k=1}^{n} F_k) + \frac{\varepsilon}{2}$.
   (c) Montrer que $\mathscr{T}$ est stable par passage au complémentaire.
   (d) Conclure.

Exercice 6

Soit $(E, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (E, \mathscr{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. On suppose que $\mu(\{x \in E \mid f(x) > 0\}) > 0$. Démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mu(\{x \in E \mid f(x) > \varepsilon\}) > 0.$$

Exercice 7

Soit μ une mesure sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$. On suppose que μ est non nulle et invariante par translation, i. e. pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mu(n + A) = \mu(A)$ où $n + A = \{n + p \ / \ p \in A\}$.

1. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\mu(\{n_0\}) \neq 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mu(\{n_0\}) = \mu(\{n\})$.
3. En déduire que $\mu(\mathbb{Z}) = +\infty$.

2 Autour de la mesure de Lebesgue

Exercice 8

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(U) < +\infty$. La réciproque est-elle vraie ? (Considérez des ouverts centrés en n pour $n \in \mathbb{N}$.)
2. Soit $\varepsilon > 0$. Construire un ouvert U dense dans $\mathbb{R}$ de sorte que $\lambda(U) \leq \varepsilon$. Pour cela, on pourra considérer une partie dense et dénombrable de $\mathbb{R}$.
3. Soit A un borélien de $\mathbb{R}$. Montrer que si A contient un ouvert non vide, alors $\mu(A) > 0$. Si $A = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, que vaut $\lambda(A)$? A peut-il contenir un ouvert ?

Exercice 9 : Lebesgue nulle et intérieur ⋆

Montrer que tout sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue nulle est d'intérieur vide.

Exercice 10 : Un calcul avec la mesure de Lebesgue ⋆

On considère $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ. Pour $n \geq 0$, on pose $A_n =]n, n + 2^{-n}[$.

1. Justifier que pour tout $n \geq 1$, on a $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. Soit $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$. Justifier que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Calculer $\lambda(A)$.
3. Un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure (de Lebesgue) finie est-il nécessairement borné ?

Exercice 11 : Un deuxième calcul avec la mesure de Lebesgue ⋆⋆

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombre réels. On pose

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}^*, |x - a_n| \leq 2^{-n}\}.$$

1. Justifier que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $1 \leq \lambda(A) \leq 2$ (ici comme d'habitude λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$).
3. Calculer $\lambda(A^c)$ où A^c désigne le complémentaire de A dans $\mathbb{R}$.
4. Calculer $\lambda(A)$ lorsque $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.
5. Calculer $\lambda(A)$ lorsque $a_n = n$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 12 : Un ensemble non borélien : l'ensemble de Vitali ⋆ ⋆ ⋆

Nous allons exhiber dans cet exercice une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas dans la tribu des boréliens.

1. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on définit la relation suivante : $x\mathcal{R}y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. En déduire qu'il existe $E \subset [0, 1]$ tel que pour tout réel x, on peut trouver un réel unique $y \in E$ avec $x - y \in \mathbb{Q}$.
3. On pose
$$G = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}\cap[-1,1]} (E + r).$$
Montrer que $[0, 1] \subset G \subset [-1, 2]$ et montrer que si $r, s \in \mathbb{Q}$, alors $r \neq s \iff (E + r) \cap (E + s) = \emptyset$.
4. En utilisant la mesure de Lebesgue, en déduire que $E \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (on raisonnera par l'absurde).

Exercice 13 : Continuité et notion de presque partout ⋆ ⋆ ⋆

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ (i.e. la restriction à $[0, 1]$ de la mesure de Lebesgue). Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et supposons que f est nulle sur un borélien de mesure 1, c'est à dire que $\lambda\left(f^{-1}(0)\right) = 1$. Montrer alors que f est identiquement nulle. Le résultat subsiste-t-il si on remplace continue par mesurable ?