M61B, Probabilités et intégration
Licence 3e année
Parcours mathématiques

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES | Université de Lille

TD4 - Variables aléatoires discrètes *

Dans toute la fiche, on supposera que les variables aléatoires d'un même exercice sont définies sur un même espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

1 Pour s'échauffer : événements, calculs de probabilités

Exercice 1 : Calculs de probabilités ⋆

Dans un restaurant (à l'époque ou cela existait encore), on compte 18 femmes et 12 hommes. Il y a 21 droitiers en tout, dont 15 sont des femmes. En choisissant un client au hasard, quelle est la probabilité qu'il/elle soit gaucher-ère ? Même question si l'on choisit un homme au hasard.

Exercice 2 : Les chats de Shrödinger ⋆

Considérons l'expérience de pensée suivante : on place 20 chats dans des boites individuelles. Par ailleurs,

- 10 boites sont vides.
- 5 boites contiennent 3g d'arsenic.
- 5 boites contiennent 10g d'arsenic.

Au bout d'une heure, la probabilité qu'un chat soit encore en vie dans la boite est égale à 1 si la boite est vide, 0,6 si la boite contient 3g d'arsenic, et 0,2 si la boite contient 10g d'arsenic[a]. On choisit une des 20 boites au hasard.

1) Quelle est la probabilité que le chat qui s'y trouve soit encore en vie au bout d'une heure ?

2) Le chat est en vie. Quelle est la probabilité que la boite ait été vide quand on l'y a placé ?

a. Aucun chat n'a été maltraité pour l'élaboration de cette expérience de pensée !

*Pour toute typo/question, me contacter à *clement.erignoux@inria.fr*. Les fiches de TD seront uploadées sur ma page web, http ://chercheurs.lille.inria.fr/cerignou/homepage.html. La difficulté de certains exercices est indiquée de ⋆ (facile) jusqu'à ⋆ ⋆ ⋆ (difficile).

Exercice 3 : Un problème de transit ⋆⋆

Deux avions (A et B), contenant respectivement $n_A = 20$ et $n_B = 40$ passagers, atterrissent à l'aéroport Charles de Gaulle. Dans le premier, qui vient de Séoul, en Corée du sud, chaque passager à une probabilité $p_A = 0.01$ d'être infecté par le coronavirus. Dans le second, qui vient de Houston, USA, chaque passager y a une probabilité $p_B = 0.2$ d'être infecté. On suppose que les passagers sont tous indépendants entre eux.

1) On note X_A et X_B le nombre de passager infectés dans chacun des avions.

(i) Quelle est la loi de X_A et X_B ?

(ii) Quelle est l'espérance du nombre total de passagers infectés ?

(iii) S'il y a deux ou plus passagers infectés, peu importe leur provenance, l'aéroport doit être scellé, et tous les passagers mis en quarantaine. Quelle est la probabilité que cela ne soit pas nécessaire ?

2) Un bus attend les passagers de Houston (avion B), mais un passager n'est pas autorisé à monter si une caméra thermique lui repère de la fièvre, donc le bus ne contiendra que les $Y_B \leq 40$ passagers pour lesquels aucune fièvre n'a été repérée. La caméra repère de la fièvre pour un passager infecté dans 95% des cas, et repère de la fièvre pour un passager sain dans 20% des cas.

(i) On suppose que $X_B = 10$. Quelle est la distribution du nombre de passagers sains qui a pu monter dans le bus ? Quelle est la distribution du nombre de passagers infectés qui a pu monter dans le bus ?

(ii) On suppose toujours que $X_B = 10$. On choisit une personne au hasard dans le groupe de Houston, quelle est la probabilité p_E qu'elle soit autorisée à monter dans le bus ? Même question si $X_B = k \in \{0, \ldots, 40\}$.

(iii) On ne suppose plus rien sur X_B. On choisit au hasard un des passagers en provenance de Houston, calculer p_E.

3) On suppose que la caméra thermique a scanné également les passagers de Seoul. Quelle est la probabilité qu'elle n'ait repéré de la fièvre chez aucun des passagers des deux vols ?

Exercice 4 : Contrôleur contre fraudeur ⋆⋆

Une compagnie de métro pratique les tarifs suivants. Le ticket donnant droit à un trajet coûte 1 € ; les amendes sont fixées à 20 € pour la première infraction constatée, 40 € pour la deuxième et 400 € pour la troisième. La probabilité p pour un voyageur d'être contrôlé au cours d'un trajet est supposée constante et connue de la seule compagnie ($0 < p < 1$). Un fraudeur décide de prendre systématiquement le métro sans payer jusqu'à la deuxième amende et d'arrêter alors de frauder. On note T le nombre de trajets effectués jusqu'à la deuxième amende (T est le numéro du trajet où le fraudeur est contrôlé pour la deuxième fois). On note $q = 1 - p$ la probabilité de faire un trajet sans contrôle.

1) Montrer que la loi de T est donnée par

$$\mathbb{P}(T = k) = (k-1)p^2 q^{k-2}, \quad k \geq 2.$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer $\mathbb{P}(T > n)$.
Indication : On pourra commencer par chercher une formule explicite pour la somme de la série entière $f(x) := \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^{k-1}$, puis pour sa dérivée terme à terme.
3) Calculer numériquement $\mathbb{P}(T > 60)$ (pourquoi s'intéresse-t-on à cette quantité ?) lorsque $p = 1/10$ et lorsque $p = 1/20$.

2 Variables aléatoires discrètes et propriétés des lois classiques

Exercice 5 : Sur la loi uniforme ⋆⋆

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$.
1) Déterminer $\mathbb{P}(X = Y)$.
2) Déterminer $\mathbb{P}(X \geq Y)$.
3) Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 6 : D'après CCP 1998 ⋆⋆

On considère deux variables X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, et on suppose que l'on a, pour tout $(j, k) \in \mathbb{N}^2$

$$\mathbb{P}(X = j, Y = k) = \frac{(j+k)(1/2)^{j+k}}{e\, j!k!}.$$

Cette quantité est la *loi jointe* du couple de variables aléatoires (X, Y), dont Xet Y sont les *marginales*.
1) À partir de cette formule, déterminer la loi de X et la loi de Y. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
2) Montrer que $\mathbb{E}[2^{X+Y}] < \infty$, et la calculer.

Exercice 7

On considère deux variables X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, et on suppose que l'on a, pour tout $(j, k) \in \mathbb{N}^2$

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{\alpha}{j!k!}.$$

1) Déterminer le réel α.

2) Déterminer la loi des variables X et Y.
3) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4) Quelle est l'espérance de $X+Y$.

Exercice 8 : Minimum de lois géométriques ⋆⋆

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On considère N variables indépendantes $X_1, \ldots, X_N$, chacune de loi géométrique de paramètre p.
1) Soit $i \in \{1, \ldots, N\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}(X_i \leq n)$ puis $\mathbb{P}(X_i > n)$.
2) On définit la V.A. Y par $Y = \min_{1 \leq i \leq N} X_i$, c'est à dire que pour tout $\omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min\{X_i(\omega), \ldots, X_N(\omega)\}$.
   (i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(Y > n)$. En déduire $\mathbb{P}(Y \leq n)$, puis $\mathbb{P}(Y = n)$.
   (ii) Y admet-elle une espérance finie ? Si oui, la calculer.

Exercice 9 : Deux propriétés classiques des lois de Poisson ⋆⋆

1) Soient X_1 et X_2 deux V.A. indépendantes de lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2.
   (i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n)$.
   (ii) En déduire $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$ et $V(X_1 + X_2)$
2) On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ, et qu'il existe $p \in [0,1]$ tel que pour tout $k \leq m$,

$$\mathbb{P}(X = k \mid Y = m) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}.$$

On dira alors que la distribution *conditionnelle* de X sachant $\{Y = m\}$ est Binomiale(m,p). Déterminer la loi de X.

Exercice 10 : Une autre formule pour l'espérance ⋆⋆

Soit X une variable aléatoire d'espace d'états $\{0, \ldots, N\}$ Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > k).$$

Que peut on dire si X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ tout entier ?

Exercice 11 : Fonctions génératrices, 10 pts

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle *fonction* *génératrice* de X la série entière

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n.$$

1) Soit R le rayon de convergence de cette série, montrer que $R \geq 1$.
2) À l'aide du théorème de transfert, exprimer $G_X(t)$ comme l'espérance d'une fonction de X pour $t < R$.
3) (i) Justifier que G_X est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.
(ii) En calculant ses premières dérivées, justifier que sa dérivée k-ième $G_X^{(k)}$ est donnée par

$$G_X^{(k)} = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\frac{n!}{(n-k)!}t^{n-k}.$$

(iii) Exprimer $G_X^{(k)}$ en fonction de la distribution de X.
(iv) En déduire que si $G_X = G_Y$ sur $]-1,1[$ alors X et Y ont même loi.
4) (i) Calculer G_X lorsque X suit une loi de Bernoulli de paramètre p puis lorsque X suit une loi binomiale de paramètres (n,p).
(ii) On suppose que X et Y sont indépendantes. Démontrer que pour tout $t \in]-1,1[$

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

(iii) Soit $X \sim Bin(n,p)$ et $Y \sim Bin(m,p)$ deux variables aléatoires indépendantes. En utilisant les fonctions générarices, déterminer la loi de $X+Y$. Retrouver ce résultat sans les fonctions génératrices.
5) On suppose maintenant que $R > 1$.
(i) On suppose que X est intégrable, i.e. $\sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) < +\infty$. Calculer la dérivée G'_X de G_X et exprimer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de G'_X.
(ii) On suppose maintenant que X est de carré intégrable, i.e. $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\mathbb{P}(X = n) < +\infty$. Calculer G''_X et montrer que

$$\mathbb{E}(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1).$$

(iii) En déduire en fonction de G_X l'expression de la variance de X.

3 Borel-Cantelli

Exercice 12 : Borel-Cantelli et les retours à l'origine

Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes telles que :

$$P(X_i = +1) = p \qquad P(X_i = -1) = 1 - p = q \qquad 0 < p < 1 \quad p \neq \frac{1}{2}.$$

On pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad A_n = \{S_n = 0\}$$

L'événement A_n est un retour à zéro. On pose

$A := \{\omega \in \Omega \; ;$ la suite $S_n(\omega)$ repasse une infinité de fois en $0\} = \cap_{k\geq 1} \cup_{j\geq k} A_j$.

Prouver que $P(A) = 0$.

Exercice 13

Soit $\alpha > 0$. Considérons une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha} = 1 - P(X_n = 0).$$

1) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = 0$.
2) Comme on le verra plus en détail dans le cours, on dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque surement vers une variable aléatoire X si $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$. Étudier la convergence presque sûre de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 14

Considérons un jeu infini de pile ou face avec une pièce équilibrée et définissons la suite de variables aléatoires $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

$$Y_k = \begin{cases} 0 & \text{si le premier jet donne face} \\ \begin{cases} 0 & \text{si le k-ème jet donne face} \\ 1 & \text{si le k-ème jet donne pile.} \end{cases} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit E_n l'événement $\{Y_n = 1\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et E l'événement « les événements E_n se produisent infiniment souvent ».
1) Montrer que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} P(E_n) = +\infty \quad \text{et} \quad P(E) = \frac{1}{2}.$$

2) Expliquer pourquoi ceci n'est pas en contradiction avec le second Lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 15 : L'armée des singes dactylographes

Montrer que dans le jeu de pile ou face infini, la séquence `pfffp` apparaît presque sûrement une infinité de fois. Généraliser.