M61B, Probabilités et intégration
Licence 3e année
Parcours mathématiques

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES | Université de Lille

# TD5 - Variables à densité *

Dans toute la fiche, on supposera que les variables aléatoires d'un même exercice sont définies sur un même espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

## 1 Autour de la fonction de répartition

**Exercice 1 ⋆**

Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions de répartition d'une variable aléatoire réelle ?

$$F(x) = \sin(x), \quad G(x) = \frac{1}{\pi}\Big(\arctan(x)+\frac{\pi}{2}\Big), \quad H(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[-1,0[}(x)+\frac{3}{4}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)+\mathbf{1}_{]1,+\infty[}(x),$$

**Exercice 2 ⋆⋆**

Soit $X$ une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0,1]$.

1) Quelle est la fonction de répartition de $X$ ?
2) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y$ dans les cas suivants :
   (i) $Y = 1 - X$ ;
   (ii) $Y = a + (b-a)X$, où $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a < b$.

**Exercice 3 ⋆⋆**

Soit $X$ une variable aléatoire réelle de fonction de répartition $F_X$. On pose $Z = \min(X, c)$ où $c$ est un réel.

1) Calculer la fonction de répartition de $Z$.
2) Si la loi de $X$ a pour densité $f$, est-ce que la loi de $Z$ est encore à densité ?

**Exercice 4 ⋆ ⋆ ⋆**

Soit $X$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et $Y$ la variable aléa-

*Pour toute typo/question, me contacter à *clement.erignoux@inria.fr*. Les fiches de TD seront uploadées sur ma page web, http ://chercheurs.lille.inria.fr/cerignou/homepage.html. La difficulté de certains exercices est indiquée de ⋆ (facile) jusqu'à ⋆ ⋆ ⋆ (difficile).

toire définie par

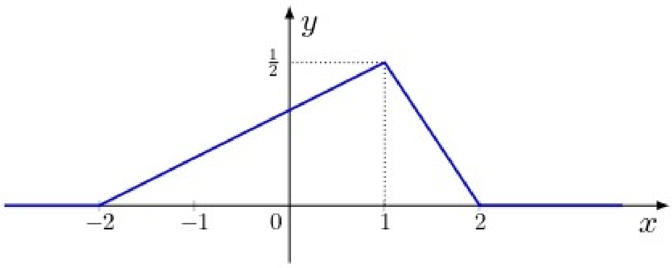
$$Y(\omega) := \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \in [0, 1/4] \cup [3/4, 1]; \\ 1 - X(\omega) & \text{si } X(\omega) \in \,]1/4, 3/4[. \end{cases}$$

1) Quelle est la loi de $Y$ ?
2) Trouver la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z := X + Y$ et vérifier que $Z$ n'est ni discrète ni à densité.

## 2 Variables aléatoires à densité

**Exercice 5 : Interprétation du graphique d'une densité ⋆**

La variable aléatoire $X$ a pour densité la fonction $f$ ci dessous :




1) En exploitant les informations fournies par ce graphique, donner les valeurs des probabilités suivantes :

$$\begin{array}{lll} \mathbb{P}(X \leq -2), & \mathbb{P}(X = -1), & \mathbb{P}(X \in [-2; 0]), \\ \mathbb{P}(X > 1), & \mathbb{P}(X \geq 1), & \mathbb{P}(|X| > 1). \end{array}$$

2) Déterminer la fonction de répartition de $X$.

**Exercice 6 ⋆**

Soit $X$ une v.a.r. de fonction de répartition $F$ donnée par

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad F(u) = \int_{-\infty}^{u} f(t)dt, \quad \text{avec} \quad f(t) = \begin{cases} 1 + t & \text{si } t \in [-1, 0], \\ \alpha & \text{si } t \in ]0, 2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Représenter $f$.
2) Calculer $F$, et en déduire $\alpha$.
3) Représenter $F$.

## Exercice 7 : Apnée ⋆⋆

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'*apnée statique*, qui consiste à rester immobile immergé dans une piscine. Un individu "quelconque" va à la piscine, et s'entraîne à l'apnée. On appelle $T$ la durée (en minutes) maximale d'apnée statique qu'il réalise [a]. On suppose que la loi de $T$ est donnée par la fonction de répartition suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)ds, \quad \text{avec} \quad f(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 0 \text{ ou } s \geq 10, \\ \lambda s(10 - s) & \text{si } 0 \leq s < 10, \end{cases}$$

où $\lambda$ est un réel strictement positif.

1) Donner l'allure du graphe de la fonction $f$.

2) Calculer la fonction de répartition de $T$. En déduire $\lambda$.

---

[a] Le record d'apnée statique est à 11'35" pour les hommes, 9'02"pour les femmes.

## Exercice 8 : Loi de Rayleigh ⋆⋆

Soit $U$ une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1]$.

1) Rappeler la fonction de répartition $F_U$ de $U$.

Soit $\sigma$ un réel strictement positif, on définit une nouvelle variable aléatoire réelle, $X$, par

$$X = \sigma\sqrt{-2\ln U}.$$

2) Calculer la fonction de répartition de $X$, $F_X$.

3) La variable aléatoire $X$ est-elle à densité ? Si oui, donner une densité de $X$.

4) Retrouver sans calcul la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{[0,+\infty[} x\, e^{-x^2/2\sigma^2} d\lambda_1(x)$ ?

## Exercice 9 : Simulation ⋆⋆

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $a > 0$, et dont on note $F$ la fonction de répartition.

1) Sur quel intervalle maximal $F$ est-elle bijective ? Déterminer sa réciproque, $G$, sur cet intervalle.

2) Soit $U$ une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1[$. On pose $Y := G(U)$. Quelle est la loi de $Y$ ?

3) Pour conclure, expliquer pourquoi il suffit et il est intéressant de considérer $-\frac{\ln U}{a}$ pour simuler une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $a > 0$.

## 3 Loi normale

**Exercice 10** ⋆⋆

*Pour cet exercices, on pourra s'aider de la table de la loi normale en page 5.* On suppose que les notes d'un contrôle de probabilité suivent une loi normale de paramètre $(8,5;4)$.

1) Quelle est la probabilité pour un étudiant d'avoir la moyenne ?

2) On veut améliorer les notes à l'aide d'une transformation affine $Y = aX + b$. Déterminer $a$ et $b$ pour qu'un étudiant ait la moyenne avec une probabilité de $1/2$ et une note supérieure à 8 avec une probabilité de $3/4$.

**Exercice 11** ⋆ ⋆ ⋆

*Pour cet exercices, on pourra s'aider de la table de la loi normale en page 5.* Les trajets dont il est question dans cet exercice sont censés suivre des lois normales et être indépendants.

1) Un employé E quitte son domicile à 8h30. La durée moyenne de son trajet à son lieu de travail est 25 minutes et son écart-type 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il arrive avant 9h sur son lieu de travail ?

2) Un autre employé, F, doit utiliser consécutivement deux moyens de transport pour se rendre à son travail. Il prend le train à 8h20, et son bus démarre à 8h45. La durée moyenne de son trajet en train est 23 minutes et, d'autre part, la probabilité que ce trajet dure entre 18 et 28 minutes est 0,6915. La durée moyenne de son trajet en bus est 14 minutes et son écart-type est 2 minutes. Quel est l'écart-type du trajet en train ? Quelle est la probabilité que $F$ arrive avant 9h sur son lieu de travail ?

3) Seuls E et F ont une clé de leur lieu de travail. Quelle est la probabilité que cette agence ouvre avant 9h ?

4) Même question dans l'hypothèse où ils doivent être présents tous deux pour l'ouverture.

5) On rappelle qu'en l'état actuel des choses, le voyage dans le temps n'existe pas. Est-il raisonnable de modéliser un temps de trajet par une loi normale ?

## Table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$$

| $x$ | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,50000 | 0,50399 | 0,50798 | 0,51197 | 0,51595 | 0,51994 | 0,52392 | 0,52790 | 0,53188 | 0,53586 |
| 0,1 | 0,53983 | 0,54380 | 0,54776 | 0,55172 | 0,55567 | 0,55962 | 0,56356 | 0,56749 | 0,57142 | 0,57535 |
| 0,2 | 0,57926 | 0,58317 | 0,58706 | 0,59095 | 0,59483 | 0,59871 | 0,60257 | 0,60642 | 0,61026 | 0,61409 |
| 0,3 | 0,61791 | 0,62172 | 0,62552 | 0,62930 | 0,63307 | 0,63683 | 0,64058 | 0,64431 | 0,64803 | 0,65173 |
| 0,4 | 0,65542 | 0,65910 | 0,66276 | 0,66640 | 0,67003 | 0,67364 | 0,67724 | 0,68082 | 0,68439 | 0,68793 |
| 0,5 | 0,69146 | 0,69497 | 0,69847 | 0,70194 | 0,70540 | 0,70884 | 0,71226 | 0,71566 | 0,71904 | 0,72240 |
| 0,6 | 0,72575 | 0,72907 | 0,73237 | 0,73565 | 0,73891 | 0,74215 | 0,74537 | 0,74857 | 0,75175 | 0,75490 |
| 0,7 | 0,75804 | 0,76115 | 0,76424 | 0,76730 | 0,77035 | 0,77337 | 0,77637 | 0,77935 | 0,78230 | 0,78524 |
| 0,8 | 0,78814 | 0,79103 | 0,79389 | 0,79673 | 0,79955 | 0,80234 | 0,80511 | 0,80785 | 0,81057 | 0,81327 |
| 0,9 | 0,81594 | 0,81859 | 0,82121 | 0,82381 | 0,82639 | 0,82894 | 0,83147 | 0,83398 | 0,83646 | 0,83891 |
| 1,0 | 0,84134 | 0,84375 | 0,84614 | 0,84849 | 0,85083 | 0,85314 | 0,85543 | 0,85769 | 0,85993 | 0,86214 |
| 1,1 | 0,86433 | 0,86650 | 0,86864 | 0,87076 | 0,87286 | 0,87493 | 0,87698 | 0,87900 | 0,88100 | 0,88298 |
| 1,2 | 0,88493 | 0,88686 | 0,88877 | 0,89065 | 0,89251 | 0,89435 | 0,89617 | 0,89796 | 0,89973 | 0,90147 |
| 1,3 | 0,90320 | 0,90490 | 0,90658 | 0,90824 | 0,90988 | 0,91149 | 0,91309 | 0,91466 | 0,91621 | 0,91774 |
| 1,4 | 0,91924 | 0,92073 | 0,92220 | 0,92364 | 0,92507 | 0,92647 | 0,92785 | 0,92922 | 0,93056 | 0,93189 |
| 1,5 | 0,93319 | 0,93448 | 0,93574 | 0,93699 | 0,93822 | 0,93943 | 0,94062 | 0,94179 | 0,94295 | 0,94408 |
| 1,6 | 0,94520 | 0,94630 | 0,94738 | 0,94845 | 0,94950 | 0,95053 | 0,95154 | 0,95254 | 0,95352 | 0,95449 |
| 1,7 | 0,95543 | 0,95637 | 0,95728 | 0,95818 | 0,95907 | 0,95994 | 0,96080 | 0,96164 | 0,96246 | 0,96327 |
| 1,8 | 0,96407 | 0,96485 | 0,96562 | 0,96638 | 0,96712 | 0,96784 | 0,96856 | 0,96926 | 0,96995 | 0,97062 |
| 1,9 | 0,97128 | 0,97193 | 0,97257 | 0,97320 | 0,97381 | 0,97441 | 0,97500 | 0,97558 | 0,97615 | 0,97670 |
| 2,0 | 0,97725 | 0,97778 | 0,97831 | 0,97882 | 0,97932 | 0,97982 | 0,98030 | 0,98077 | 0,98124 | 0,98169 |
| 2,1 | 0,98214 | 0,98257 | 0,98300 | 0,98341 | 0,98382 | 0,98422 | 0,98461 | 0,98500 | 0,98537 | 0,98574 |
| 2,2 | 0,98610 | 0,98645 | 0,98679 | 0,98713 | 0,98745 | 0,98778 | 0,98809 | 0,98840 | 0,98870 | 0,98899 |
| 2,3 | 0,98928 | 0,98956 | 0,98983 | 0,99010 | 0,99036 | 0,99061 | 0,99086 | 0,99111 | 0,99134 | 0,99158 |
| 2,4 | 0,99180 | 0,99202 | 0,99224 | 0,99245 | 0,99266 | 0,99286 | 0,99305 | 0,99324 | 0,99343 | 0,99361 |
| 2,5 | 0,99379 | 0,99396 | 0,99413 | 0,99430 | 0,99446 | 0,99461 | 0,99477 | 0,99492 | 0,99506 | 0,99520 |
| 2,6 | 0,99534 | 0,99547 | 0,99560 | 0,99573 | 0,99585 | 0,99598 | 0,99609 | 0,99621 | 0,99632 | 0,99643 |
| 2,7 | 0,99653 | 0,99664 | 0,99674 | 0,99683 | 0,99693 | 0,99702 | 0,99711 | 0,99720 | 0,99728 | 0,99736 |
| 2,8 | 0,99744 | 0,99752 | 0,99760 | 0,99767 | 0,99774 | 0,99781 | 0,99788 | 0,99795 | 0,99801 | 0,99807 |
| 2,9 | 0,99813 | 0,99819 | 0,99825 | 0,99831 | 0,99836 | 0,99841 | 0,99846 | 0,99851 | 0,99856 | 0,99861 |
| 3,0 | 0,99865 | 0,99869 | 0,99874 | 0,99878 | 0,99882 | 0,99886 | 0,99889 | 0,99893 | 0,99896 | 0,99900 |
| 3,1 | 0,99903 | 0,99906 | 0,99910 | 0,99913 | 0,99916 | 0,99918 | 0,99921 | 0,99924 | 0,99926 | 0,99929 |
| 3,2 | 0,99931 | 0,99934 | 0,99936 | 0,99938 | 0,99940 | 0,99942 | 0,99944 | 0,99946 | 0,99948 | 0,99950 |
| 3,3 | 0,99952 | 0,99953 | 0,99955 | 0,99957 | 0,99958 | 0,99960 | 0,99961 | 0,99962 | 0,99964 | 0,99965 |
| 3,4 | 0,99966 | 0,99968 | 0,99969 | 0,99970 | 0,99971 | 0,99972 | 0,99973 | 0,99974 | 0,99975 | 0,99976 |
| 3,5 | 0,99977 | 0,99978 | 0,99978 | 0,99979 | 0,99980 | 0,99981 | 0,99981 | 0,99982 | 0,99983 | 0,99983 |
| 3,6 | 0,99984 | 0,99985 | 0,99985 | 0,99986 | 0,99986 | 0,99987 | 0,99987 | 0,99988 | 0,99988 | 0,99989 |
| 3,7 | 0,99989 | 0,99990 | 0,99990 | 0,99990 | 0,99991 | 0,99991 | 0,99992 | 0,99992 | 0,99992 | 0,99992 |
| 3,8 | 0,99993 | 0,99993 | 0,99993 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99995 | 0,99995 | 0,99995 |
| 3,9 | 0,99995 | 0,99995 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99997 | 0,99997 |
| 4,0 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99998 | 0,99998 | 0,99998 | 0,99998 |

Exemple : pour $x = 1,03$ on lit $\phi(1,03) = 0,84849$