M61B, Probabilités et intégration
Licence 3e année
Parcours mathématiques

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES | Université de Lille

# TD6 - Intégrale de Lebesgue *

Dans toute la fiche, on supposera sauf mention contraire que l'on se trouve sur un espace mesuré $(E, \mathscr{T}, \mu)$.

## 1 intégrale de Lebesgue

**Exercice 1 : Quizz**

1) La somme de deux fonctions intégrables est elle intégrable ?
2) Le carré d'une fonction intégrable est il intégrable ? Une fonction de carré intégrable est-elle elle même intégrable ?
3) La composée de deux fonctions intégrable est-elle intégrable ?

**Exercice 2**

On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Montrer que $f$ est Lebesgue intégrable sur $[0,1]$ et calculer son intégrale.

## 2 Autour du théorème de convergence monotone

**Exercice 3**

On note $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $f_n = \mathbb{1}_{[n,2n]}$. Vérifier que les $f_n$ sont postives et mesurables. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ et $\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n d\lambda$.

**Exercice 4**

On pose $I(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dx$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) On définit pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$. En

*Pour toute typo/question, me contacter à *clement.erignoux@inria.fr*. Les fiches de TD seront uploadées sur ma page web, http ://chercheurs.lille.inria.fr/cerignou/homepage.html. La difficulté de certains exercices est indiquée de ⋆ (facile) jusqu'à ⋆ ⋆ ⋆ (difficile).

étudiant $g_n(x) = (n+1)\ln\left(1-\frac{x}{n+1}\right) - n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)$, montrer que $(f_n)_n$ est une suite décroissante de fonctions.
2) En déduire la valeur de $I(\alpha)$ en fonction de $\alpha$.

## Exercice 5 : Théorème de convergence décroissante

Pour $n \geq 0$, on définit les fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{x}\mathbf{1}_{[n,+\infty[}(x).$$

1) Les fonctions $f_n$ sont elles intégrables sur $\mathbb{R}$ ?
2) Dans le théorème de convergence monotone, peut on remplacer "croissante" par "monotone" ?
3) Montrer que si l'on suppose qu'il existe $n_0$ tel que $\int_E f_{n_0} d\mu < \infty$, le théorème de convergence monotone s'applique également aux suites décroissantes de fonctions positives.

## Exercice 6 : Interversion série intégrale

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables et positives de $E$ dans $\mathbb{R}$.
1) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) d\mu.$$

2) En déduire la valeur de $\sum_{n=3}^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^n} dx$.
3) Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, soit $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.
(i) Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est une série convergente pour tout $x > 0$ et calculer sa somme $f(x)$.
(ii) Comparer $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$. Expliquer.

## Exercice 7 : Mesure de comptage ⋆

On rappelle que la mersure de comptage $\mu$ est définie sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ par $\mu(A) = \text{card}(A)$ si $A$ est fini et $\mu(A) = +\infty$ sinon.
1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_{\mathbb{N}} \mathbb{1}\{n\} d\mu$, $\int_{\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \mathbb{1}\{k\} d\mu$
2) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par $f(n) = \frac{1}{2^n}$. Calculer $\int_{\mathbb{N}} f d\mu$.
3) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ positive. Justifier que $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$.
4) Soit $(u_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Démontrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$$

5) En déduire la valeur de $\sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.

**Exercice 8 : Majoration d'intégrales qui passe à la limite ⋆⋆**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives convergeant simplement vers $f$. On suppose qu'il existe une constante $K$ telle que $\int f_n d\mu \leq K$ pour tout $n$. Montrer que $\int f d\mu \leq K$.

## 3 Théorème de convergence dominée

**Exercice 9 : ⋆**

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2x^2+1} dx$,
2) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{nx}\right) dx$,
3) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$,
4) $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \frac{n}{x(1+x^2)} dx$,
5) $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1+\cos^{2n}(x)} e^{-|x|} dx$,
6) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{x}{n}\right) e^{-x} dx$,
7) $\lim_{n\to+\infty} \int_{[-n,n]} \frac{\arctan(1+x^2/n)}{1+x^2} dx$,
8) $\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} (1+nx^2)(1+x^2)^{-n} dx$,
9) $\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,+\infty[} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)^{1/n}} dx$,
10) $\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,+\infty[} \frac{n}{1+n^2x^2} dx$, $a > 0$.

**Exercice 10 : ⋆**

En ré-écrivant les séries comme des intégrales par rapport à la mesure de comptage, calculer

1) $\lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 - \frac{1}{k(n+1)}\right)\right)$
2) $\lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{n}{k}\right)}{2^n}\right)$

**Exercice 11 : ⋆**

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f$ une fonction intégrable.

1) Soit $A_n$ une suite d'ensembles mesurables tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu(A_n) < \frac{1}{n^2}$. On pose $f_n = f\mathbb{1}_{A_n}$.
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mu(\cup_{k=n}^{+\infty} A_k) = 0$. En déduire que pour tout $\mu$-presque $x$, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers 0.
2) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu = 0$.
3) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) < \delta$ implique $\int_A |f| d\mu < \varepsilon$.

**Exercice 12**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}^1(\mu)$. On suppose que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_E |f_n| d\mu < \infty.$$

1) Montrer que $\int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu < \infty$. En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ converge $\mu$-presque partout.
2) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge pour $\mu$-presque tout $x$ et à un ensemble négligeable près définit une fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
3) Montrer que l'on a

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n d\mu.$$

4) Calculer

$$\int_0^1 \frac{\log(x)}{1-x} dx$$

## 4 Lemme de Fatou

**Exercice 13 : Inégalité de Fatou stricte I**

On note $\lambda$ la mesure de Lebesgue. Soit $f_n = n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$.
1) Appliquer si possible le lemme de Fatou.
2) Calculer $\liminf_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ et $\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to+\infty} f_n d\lambda$

**Exercice 14 : Inégalité de Fatou stricte II**

Soit $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[-1,1]$, et $g = \mathbf{1}_{[0,1]}$. On définit $f_n(x)$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } n \text{ est pair,} \\ g(-x) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Montrer que

$$\int_{[-1,1]} \liminf_{n\to\infty} f_n d\lambda < \liminf_{n\to\infty} \int_{[-1,1]} f_n d\lambda.$$

**Exercice 15**

On note $\lambda$ la mesure de Lebesgue. Soit $f_n = -\frac{1}{n}\mathbb{1}_{[}0,n]$, $n \in \mathbb{N}$ et $f = 0$. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f$ mais que

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda < \int_{\mathbb{R}} f d\lambda.$$

Pourquoi est-ce que cela ne contredit pas le lemme de Fatou ?

**Exercice 16**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction réelle, mesurable, strictement positive, et intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit $a$ un réel strictement positif. Montrer qu'il existe une constant $c$, que l'on déterminera, telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} n \log\left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^a\right) dx = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 < a < 1, \\ c & \text{si } a = 1, \\ 0 & \text{si } 1 < a \end{cases}.$$

## 5 Applications

**Exercice 17 : Lemme de Fatou et quasi-domination**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables convergeant simplement $\mu$-presque partout vers $f$. Soient $h$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions positives et $\mu$-intégrables. On suppose que $|f_n| \leq g_n + h$, et que $\lim_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu = 0$

1) En utilisant le Lemme de Fatou, montrer que $f$ est $\mu$-intégrable.

2) Montrer que $\liminf g_n = 0$ $\mu$-presque-partout en utilisant le Lemme de Fatou.

3) Grâce au Lemme de Fatou et aux fonctions $h \pm f + \liminf g_n$, montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu,$$

en déduire $\lim \int_E f_n d\mu$.

**Exercice 18**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a, b]$, dont la dérivée $f'$ est bornée sur $[a, b]$. Montrer que $f'$ est intégrable sur $[a, b]$, et que

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

*Indication :* on pourra considérer $g_n(x) = n\mathbf{1}_{[a,b-1/n[}(x)\left(f(x + 1/n) - f(x)\right)$.

## Exercice 19 : Mesures à densité

Soit $h : E \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. On définit $\nu$ sur $\mathscr{T}$ par $\nu(A) = \int_A h d\mu := \int_E \mathbf{1}_A h d\mu$.
1) Verifier que $\nu$ est une mesure sur $(E, \mathscr{T})$.
2) Démontrer que si $A \in \mathscr{T}$ satisfait $\mu(A) = 0$, alors $\nu(A) = 0$.
3) Soit $f : (E, \mathscr{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable. Montrer que $f$ est $\nu$-intégrable si et seulement si $fh$ est $\mu$-intégrable et que dans ce cas

$$\int_E f d\nu = \int_E f h d\mu.$$

## Exercice 20 : Un critère d'intégrabilité

Supposons que $\mu$ est une mesure finie, et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_n = \{x \in E, |f(x)| \geq n\} \quad \text{et} \quad B_n = \{x \in E,\ n \leq |f(x)| < n + 1\}.$$

Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.
1) La fonction $f$ est intégrable.
2) La série $\sum_{n \geq 0} n\mu(B_n)$ est convergente.
3) La série $\sum_{n \geq 0} \mu(A_n)$ est convergente.