M61B, Probabilités et intégration
Licence 3e année
Parcours mathématiques

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES | Université de Lille

TD7 - Mesures et variables aléatoires réelles *

1 Caractérisation de mesures

Exercice 1 : Mesures de Stieltjes

Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on considère une mesure (positive) finie μ et on définit la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ par $F(x) = \mu([x, +\infty[)$.

1) Montrer que μ est uniquement déterminée par la donnée de F.

2) Montrer que F est décroissante, continue à gauche sur $\mathbb{R}$ et calculer ses limites en $\pm\infty$.

3) Calculer $\mu\{x\}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et montrer que F est continue en x si et seulement si $\mu\{x\} = 0$. Que peut-on en déduire sur $D = \{x \in \mathbb{R},\ \mu\{x\} \neq 0\}$?

Exercice 2 : Caractérisation des mesures sur $\mathbb{R}$

Soient μ et ν deux mesures sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant pour tout $x \geq 0$:

$$\mu([0, x]) = \nu([0, x]) < +\infty$$

et pour tout $x < 0$:

$$\mu([x, 0]) = \nu([x, 0]) < +\infty$$

Montrer alors que $\mu = \nu$.

Exercice 3 : Mesure de dirac

1) Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\delta_a(B) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \in B \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

(i) Montrer que l'application δ_a est une mesure sur $\mathbb{R}$, appellée la *mesure de Dirac* en a.

(ii) Quelles sont les parties de $\mathbb{R}$ négligeables pour δ_a ?

(iii) Soit f une fonction borélienne. Calculer $\int f d\delta_a$.

*Pour toute typo/question, me contacter à *clement.erignoux@inria.fr*. Les fiches de TD seront uploadées sur ma page web, http ://chercheurs.lille.inria.fr/cerignou/homepage.html. La difficulté de certains exercices est indiquée de ⋆ (facile) jusqu'à ⋆ ⋆ ⋆ (difficile).

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, On définit l'application ν_n sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\nu_n(B) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{-n} \delta_k(B)$$

(i) Montrer que ν_n est une mesure de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(ii) Soit X une variable aléatoire réelle de distribution $\mathbb{P}_X = \nu_n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer la probabilité $\mathbb{P}(X = x)$.

(iii) Conclure sur la nature de X.

2 Calculs de probabilités

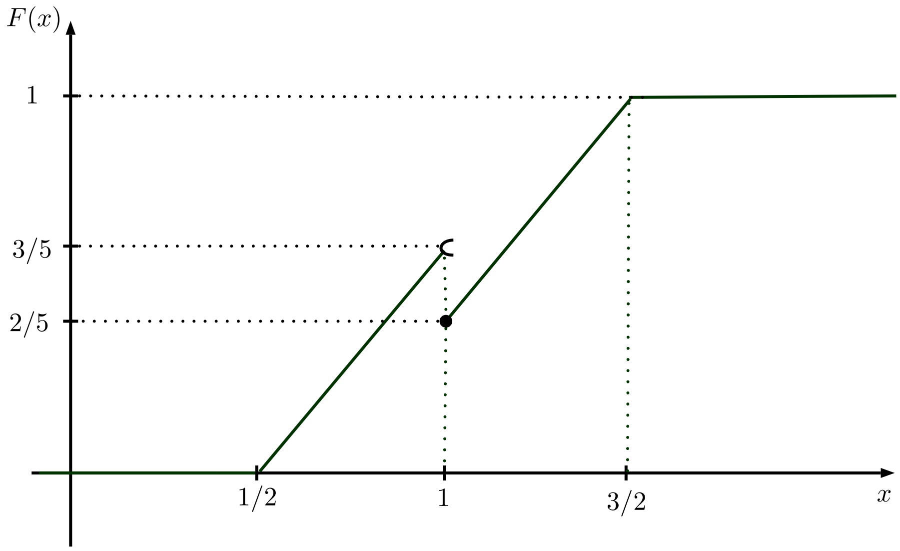
Exercice 4 Quizz

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la montrer, sinon l'infirmer à l'aide d'un contre-exemple ou d'un dessin.

1) Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, on a nécessairement $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2) Soit X une variable aléatoire telle que X est indépendante d'elle même, c'est à dire que pour tous boréliens A,B, $\mathbb{P}(X \in A \cap B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(X \in B)$. Alors, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = x) = 1$. *Indication :* on pourra s'intéresser à la variance de X.

3) La fonction ci-dessous est-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle ? Si oui, quelle est la loi de la variable aléatoire associée ?



4) Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires telles que pour tout $i \neq j \in I$, et pour tous boréliens A, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}(X_i \in A, X_j \in B) = \mathbb{P}(X_i \in A)\mathbb{P}(X_j \in B).$$

Alors, la famille $(X_i)_{i\in I}$ est indépendante.
5) Soit X une variable aléatoire telle que pour tout k, la variable aléatoire $X\mathbf{1}_{|X|\leq k}$ est intégrable, et $\alpha_k := \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{|X|\leq k})$ converge vers $\alpha \in \mathbb{R}$ quand $k \to \infty$. Alors, X est intégrable.

Exercice 5

Le temps d'attente (en minutes) pour accéder à des données suit une loi uniforme $\mathcal{U}([1,6])$.
1) Déterminer la probabilité d'attendre au moins 5 minutes.
2) Déterminer le temps d'attente moyen.

Exercice 6

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, continue à droite, vérifiant $\lim_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{+\infty} F = 1$. On veut démontrer qu'il existe une variable aléatoire X dont F est la fonction de répartition. Pour $u \in]0,1[$, on pose

$$G(u) = \inf\{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq u\}.$$

1) Vérifier que G est bien définie.
2) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $u \in]0,1[$,

$$F(x) \geq u \iff x \geq G(u)$$

3) Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1]$. Quelle est la fonction de répartition de $G(U)$?

Exercice 7 Fonctions génératrices

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle *fonction génératrice* de X la série entière

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)t^n$$

1) Soit R le rayon de convergence de cette série, montrer que $R \geq 1$.
2) À l'aide du théorème de transfert, exprimer $G_X(t)$ comme l'espérance d'une fonction de X pour $t < R$.
3) Montrer que si $G_X = G_Y$ sur $]-1,1[$, alors X et Y ont même loi.
4) Calculer G_X lorsque X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, puis lorsque X suit une loi binomiale de paramètres (n,p).
5) On suppose que X et Y sont indépendantes. Démontrer que pour tout $t \in]-1,1[$

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

6) Soit $X \sim Bin(n,p)$ et $Y \sim Bin(n,p)$ deux variables aléatoires indépendantes. En utilisant les fonctions caractéristiques, déterminer la loi de $X+Y$. Retrouver ce résultat sans les fonctions génératrices.

Exercice 8

Étant donné X une variable aléatoire réelle de densité f_X, on appelle entropie de X la quantité suivante, si elle existe,

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\ln f_X(x)dx.$$

1) Calculer l'entropie d'une loi aléatoire uniforme sur le segment $[a,b]$.
2) On suppose que X suit une loi normale, d'espérance m et variance σ^2, i.e. $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, dont on rappelle la densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

(i) Rappeler l'expression de l'espérance et de la variance de X, sous formes d'intégrales de f_X.
(ii) Montrer que $h(X) = \frac{1}{2}(1+\ln(2\pi\sigma^2))$.

3) On souhaite prouver que, parmi les variable aléatoires de variance donnée, les lois normales admettent une entropie maximale. On fixe Y une variable aléatoire réelle centrée (c'est à dire d'espérance nulle), de densité f_Y et de variance σ^2, admettant une entropie. On note φ la densité d'une loi normale centrée ($m=0$), de variance σ^2. On suppose que les fonctions

$$x \mapsto f_Y(x)\ln\frac{\varphi(x)}{f_Y(x)} \quad \text{et} \quad x \mapsto f_Y(x)\ln\varphi(x)$$

sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

(i) Démontrer que pour tout $x>0$, $\ln x \leq x-1$.
(ii) Vérifier que

$$h(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x)\ln\frac{\varphi(x)}{f_Y(x)}dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x)\ln\varphi(x)dx.$$

(iii) En déduire que $h(Y) \leq \frac{1}{2}(1+\ln(2\pi\sigma^2))$.

3 Moments

Exercice 9

1) Soit X une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[1,3]$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}\left(X^2\right)$.
2) Soit X une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0,\pi]$. Calculer $\mathbb{E}(\sin(X))$ et $\mathbb{E}(\cos(X))$.
3) Soit X une variable aléatoire réelle de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Calculer $\mathbb{E}\left(e^{X/2}\right)$ lorsqu'elle existe.

Exercice 10

Soit X une variable uniforme sur $[1,3]$ et $a \in [1,3]$.
1) Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = \min\{X, a\}$?
2) Admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
3) Que vaut cette espérance si $a = 1$? $a = 3$? Est-ce que vous auriez pu trouver ces deux résultats autrement ?

Exercice 11 : Consommation d'eau

La consommation journalière en eau d'une agglomération au cours du mois de juillet est une variable aléatoire X dont la densité f a la forme :

$$f(t) = c(t-a)(b-t)\mathbf{1}_{[a,b]}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

où a, b, c sont des constantes strictement positives $(a < b)$.
1) Vérifier que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_a^b (t-a)^n(b-t)\,dt = \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

2) Exprimer la constante c en fonction de a et b.
3) Calculer $\mathbb{E}(X-a)$ et $\mathbb{E}\left((X-a)^2\right)$. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.
4) Donner la fonction de répartition F de la variable aléatoire X : on distinguera pour le calcul de $F(x)$ les cas $x < a$, $a \le x \le b$ et $x > b$ et, dans le deuxième cas, on écrira $F(x)$ en fonction de $(x-a)$ et $(b-x)$ sans développer ni réduire le polynôme obtenu. Donner l'allure des représentations graphiques de f et F. Proposer une interprétation physique des constantes a et b.

Exercice 12 : Moments de la loi normale

Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite.
1) Que vaut $\mathbb{P}(X \ge 0)$?

2) Que valent $\mathbb{E}\left(X^{2n+1}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$?

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \mathbb{E}\left(X^{2n}\right)$. Montrer que $c_n = (2n-1)c_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire une formule explicite pour $\mathbb{E}\left(X^{2n}\right)$.

4) Pour $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{R}$, on définit la variable aléatoire $Y = \sigma X + m$.

  (i) Que valent $\mathbb{E}(Y)$ et $Var(Y)$?

  (ii) Déterminer la loi de Y.