L3 MASS
Université Lille 1

Probabilités Avancées :
Chaînes de Markov

Clément Erignoux *

1 Probabilités conditionnelles

Définition 1 (Probabilité conditionnelle)

Soient A et B deux événements. On suppose $\mathbb{P}(B) > 0$. La probabilité de A sachant B est définie par
$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Exercice 1

Montrer que pour tout événement B, la mesure $\mathbb{P}_B := \mathbb{P}(\,\cdot \mid B)$ est une loi de probabilité définie sur le même espace de probabilités. Étant donnés trois évènements $A,\ B,\ B'$, que vaut $\mathbb{P}_B(A \mid B')$?

Solution : la sigma-additivité vient de celle de $\mathbb{P}$, et on obtient immédiatement les identités $\mathbb{P}_B(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}_B(\emptyset) = 0$. Par définition,

$$\mathbb{P}_B(A \mid B') = \frac{\mathbb{P}_B(A \cap B')}{\mathbb{P}_B(B')} = \frac{\mathbb{P}_B(A \cap B' \cap B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(B \cap B')} = \mathbb{P}(A \mid B \cap B').$$

□

Exercice 2

Dans la classe, on compte 18 filles et 12 garçons. Il y a 21 droitiers en tout, dont 15 sont des filles. En choisissant un(e) élève au hasard, quelle est la probabilité qu'il/elle soit gaucher-ère ? Même question si l'on choisit un garçon au hasard.

Solution : notons G (resp. D) si l'élève choisi est gaucher (resp. droitier). Notons F (resp. H) si l'élève choisi est une fille (resp. un garçon). Alors, étant donné qu'il y a

*Pour toute typo/question, me contacter à *clement.erignoux@inria.fr*. Les notes de cours seront uploadées sur ma page web, http ://chercheurs.lille.inria.fr/cerignou/homepage.html

30 élèves dans la classe, on sait que

$$\mathbb{P}(G) = 1 - \mathbb{P}(D) = 1 - \frac{21}{30} = 0,3.$$

Pour une garçon, cette probabilité devient

$$\mathbb{P}(G \mid H) = \frac{\mathbb{P}(G \cap H)}{\mathbb{P}(H)} = \frac{30}{12} \times \mathbb{P}(G \cap H).$$

On note alors que $\mathbb{P}(G \cap H) = \mathbb{P}(H) - \mathbb{P}(D \cap H) = 12/30 - 6/30 = 6/30$, soit $\mathbb{P}(G \mid F) = 6/12 = 0,5$. □

Proposition 1 (Formule de conditionnements successifs)

Soit $n \geq 2$, et soient des événements $A_1, \ldots, A_n$, on a

$$\mathbb{P}(\cap_{k=1}^n A_k) = \mathbb{P}(A_1) \times \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_{k+1} \mid \cap_{j=1}^k A_j).$$

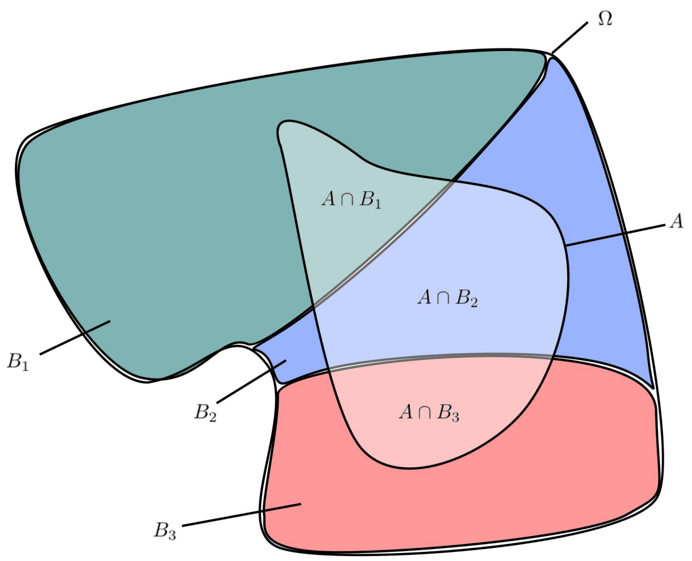
Preuve : Par récurrence sur n en utilisant la définition des probabilités conditionnelles. □

Proposition 2 (Formule des probabilités totales)

Soit une famille d'événements finie ou dénombrable $B_1, \ldots, B_K$ formant une partition de $\Omega = \sqcup_{k=1}^K B_k$ (K entier ≥ 1 ou éventuellement infini, le $\sqcup$ indique une union *disjointe*). Alors,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^K \mathbb{P}(A \mid B_k)\mathbb{P}(B_k).$$

Preuve : Résulte de la σ-additivité de la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ (c'est à dire que $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$), et de l'égalité $A = \bigsqcup_{k=1}^K (A \cap B_k)$.



$\square$

Exemple : (Formule d'inversion du conditionnement)

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)}{\underbrace{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \mid A^c)\mathbb{P}(A^c)}_{=\mathbb{P}(B)}}$$

Exercice 3 : Les chats de Shrödinger

Considérons l'expérience de pensée suivante : on place 20 chats dans des boites individuelles. Par ailleurs,

— *10 boites sont vides.*

— *5 boites contiennent 3g d'arsenic.*

— *5 boites contiennent 10g d'arsenic.*

Au bout d'une heure, la probabilité qu'un chat soit encore en vie dans la boite est égale à 1 si la boite est vide, 0,6 si la boite contient 3g d'arsenic, et 0,2 si la boite contient 10g d'arsenic [1]*. On choisit une des 20 boites au hasard.*

1) *Quelle est la probabilité que le chat qui s'y trouve soit encore en vie au bout d'une heure ?*

2) *Le chat est en vie. Quelle est la probabilité que la boite ait été vide quand on l'y a placé ?*

Solution :

1) On note les trois types de boites A (vide), B (3g d'arsenic), C (10g d'arsenic), et on note V l'événement "le chat est vivant au bout d'une heure". La boite étant choisie au hasard, $\mathbb{P}(A) = 1/2$, $\mathbb{P}(B) = 1/4$, $\mathbb{P}(C) = 1/4$. Par ailleurs, on sait que $\mathbb{P}(V \mid A) = 1$, $\mathbb{P}(V \mid B) = 0,6$, et $\mathbb{P}(V \mid C) = 0,2$. La formule des probabilités totales donne alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(V \mid A) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(V \mid B) + \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(V \mid C) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 0,6 + \frac{1}{4} \times 0,2 = 0,7.\end{aligned}$$

2) On utilise la formule d'*inversion du conditionnement* :

$$\mathbb{P}(A \mid V) = \frac{\mathbb{P}(V \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{0,5}{0,7} = 5/7.$$

$\square$

1. Aucun chat n'a été maltraité pour l'élaboration de cette expérience de pensée !

2 Chaînes de Markov

2.1 Définition

Idée clé : définir un "*processus aléatoire*" évoluant dans le temps, mais dont l'évolution à partir du temps $n+1$ ne dépend que de son état au temps n, c'est à dire que de son présent.

Dans ce qui suit, on introduit un ensemble E, toujours supposé *fini ou dénombrable*, qui sera l'espace des *états possibles de la chaîne de Markov.*

Définition 2 (Chaîne de Markov)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires (v.a.) à valeurs dans E, et définies sur un espace de probabilité commun $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une *chaîne de Markov*, si pour tout entier $n \geq 0$, et pour tous $e_0, \ldots, e_{n+1} \in E$, on a l'égalité

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = e_{n+1} \mid X_0 = e_0, \ldots, X_n = e_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = e_{n+1} \mid X_n = e_n). \tag{1}$$

La propriété (1) est appelée *propriété de Markov*. L'ensemble E est appelé l'*espace d'états* de la chaîne de Markov.

Exemple : Une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ est définie par $X_0 = 0$, et pour tout $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 & \text{avec probabilité } 1/2 \\ X_n + 1 & \text{avec probabilité } 1/2 \end{cases}.$$

Ce processus est une *chaîne de Markov sur l'espace d'états* $E := \mathbb{Z}$. De tels processus peuvent notamment modéliser des systèmes physiques (diffusion gazeuse), ou économiques (stock market, ruine du joueur).

2.2 Homogénéité et probabilités de transition

Définition 3 (Chaîne de Markov Homogène)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov d'espace d'états E. On dit que $(X_n)_{n\geq 0}$ est *homogène* si pour tout entier $n \geq 0$, et pour tous $e,\ e' \in E$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = e' \mid X_n = e) = \mathbb{P}(X_1 = e' \mid X_0 = e).$$

La notion d'homogénéité nous permet d'introduire la notion de probabilités de transition de la chaîne de Markov.

Définition 4 (Probabilité de transition)

La probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X_{n+1} = e' \mid X_n = e)$ d'une chaîne de Markov *homogène* ne dépend pas de n. Elle est appelée *probabilité de transition* de e vers e', notée $P(e, e')$.

2.3 Matrice de transition

On numérote les états de E dans un ordre arbitraire, de façon à ce que les états de E soient identifiés comme état 1, état 2, etc. (En d'autres termes, on identifie E avec l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$ si $card(E) = N$ et avec $\mathbb{N}$ si $card(E) = \infty$).

Dans toute la suite, on opérera systématiquement cette identification, ce qui revient à considérer $E = \{1, \ldots, N\}$ si E est fini de cardinal N ou $E = \mathbb{N}$ si E est infini dénombrable. On peut alors placer les différentes probabilités de transition dans une "matrice", qui caractérise entièrement une chaîne de Markov homogène.

Définition 5 (Matrice de transition)

La *matrice de transition* P d'une chaîne de Markov homogène a pour coefficient $P(i,j) = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)$ à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

En particulier, si E est fini et $card(E) = N$, P est une matrice carrée $N \times N$.

Proposition 3 (propriétés des matrices de transition)

Les coefficients P(i,j) de la matrice de transition sont compris entre 0 et 1, et leurs sommes sur chaque ligne valent 1, c'est à dire que $\forall i \in E$,

$$\sum_{j \in E} P(i,j) = 1.$$

Dans ce qui suit, on supposera systématiquement les chaînes de Markov considérées *homogènes*. La matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène permet de la caractériser entièrement. En pratique, on représente souvent une chaîne de Markov homogènes par un graphes, dont

— chaque site représente un état possible de la chaîne de Markov.

— Une arête va du site i au site j et est étiquetée $p \in]0,1]$ ssi $P(i,j) = p$.

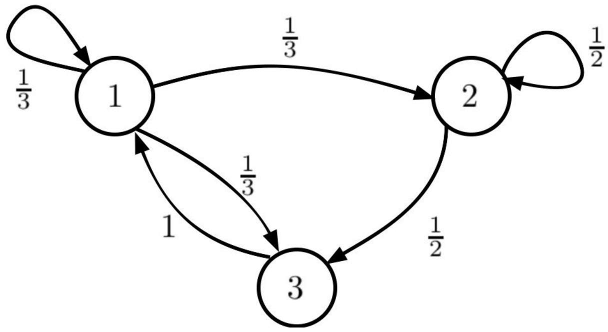
Exercice 4

On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $E = \{1, 2, 3\}$, dont la matrice de transition est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tracer le graphe la représentant.

SOLUTION :



□

2.4 Probabilité d'une trajectoire

Définition 6 (Trajectoire)

Pour $\omega \in \Omega$ fixé, on appelle ω-trajectoire, ou plus simplement *trajectoire* de (X_n), la suite $(X_0(\omega), X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega), \ldots)$.

Proposition 4 (Probabilité d'une trajectoire partielle)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P. Alors, pour toute suite d'états $e_0, \ldots, e_n \in E$,

$$\mathbb{P}(X_0 = e_0, \ldots, X_n = e_n) = \mathbb{P}(X_0 = e_0) \prod_{k=1}^{n} P(e_{k-1}, e_k).$$

Preuve : Il suffit d'appliquer la formule des conditionnements successifs aux événements $A_k := \{X_k = e_k\}$, puis d'utiliser la propriété de Markov à chaque terme. □

2.5 Transitions d'ordre supérieur

Définissons, pour $e \in E$, $\mu_n(e) = \mathbb{P}(X_n = e)$. Cette fonction peut être représentée par le vecteur ligne $\mu_n = (\mu_n(e),\ e \in E)$ qui détermine la loi de la variable aléatoire X_n.

Proposition 5 (Relation de récurrence)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P, dont la loi au temps n est donnée par le *vecteur ligne* $\mu_n = (\mu_n(e),\ e \in E)$. Alors, pour tout $n \geq 0$, on a les relations matricielles

$$\mu_{n+1} = \mu_n P \quad \text{et} \quad \mu_n = \mu_0 P^n.$$

Preuve : Pour montrer la première identité, utilisons la *formule des probabilités totales* à chaque élément du vecteur μ_{n+1}, en conditionnant selon la valeur de X_n. Plus particulièrement, pour tout $e \in E$,

$$\begin{aligned}
\mu_{n+1}(e) \stackrel{(d)}{=} \mathbb{P}(X_{n+1} = e) &= \sum_{e' \in E} \mathbb{P}(X_{n+1} = e \mid X_n = e')\mathbb{P}(X_n = e') \\
&= \sum_{e' \in E} P(e', e)\mu_n(e') \\
&= [\mu_n P](e).
\end{aligned}$$

La seconde identité est immédiate (récurrence sur n) grâce à la première. $\square$

La matrice P nous donne la probabilité que la chaîne de Markov passe de e à e' en 1 pas. On souhaiterait maintenant pouvoir estimer les probabilités de transitions en k pas, pour $k > 1$.

Proposition 6

En notant P^k la puissance k-ième de la matrice de transition P, on a la relation

$$\mathbb{P}(X_{n+k} = e' \mid X_n = e) = P^k(e, e').$$

Exemple : le cas $k = 2$. Étant donné que $\mathbb{P}(\,\cdot \mid X_n = e)$ est une mesure de probabilités, on somme selon la valeur de X_{n+1}, pour écrire

$$\mathbb{P}(X_{n+2} = e' \mid X_n = e) = \sum_{x \in E} \mathbb{P}(X_{n+2} = e',\, X_{n+1} = x \mid X_n = e).$$

On peut également écrire par la formule des conditionnements successifs

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+2} = e',\, X_{n+1} = x \mid X_n = e) \\
&\quad = \mathbb{P}(X_{n+2} = e' \mid X_{n+1} = x,\, X_n = e)\mathbb{P}(X_{n+1} = x \mid X_n = e) = P(e, x)P(x, e'),
\end{aligned}$$

soit

$$\mathbb{P}(X_{n+2} = e' \mid X_n = e) = [P^2](e, e').$$

2.6 Types d'états d'une chaîne de Markov

Définition 7 (États communicants, chaînes irréductibles)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov d'espace d'états E et de matrice de transition P.

Un état e' est dit *accessible* à partir d'un état e s'il existe $n \geq 0$ et une suite finie $e_0 := e,\ e_1,\ e_2,\ \ldots, e_{n-1},\ e_n := e'$ telle que pour tout $i \in \{0, \ldots n-1\}$, on ait $P(e_i, e_{i+1}) > 0$. On note alors $e \to e'$. À noter que par définition, pour tout état e, on a $e \to e$.

Si $e \to e'$ et $e' \to e$, on dit que e et e' *communiquent*, ce que l'on note $e \leftrightarrow e'$. Cette relation binaire est une *relation d'équivalence sur* E, qui définit une partition de E en *classes d'équivalences d'états communicant entre eux*.

S'il n'existe qu'une seule classe d'équivalence, i.e. $\forall e, e' \in E$, $e \leftrightarrow e'$, la chaîne de Markov est dite *irréductible*.

Exercice 5

Montrer que $e \to e'$ si et seulement si il existe $n \geq 0$ tel que $[P^n](e, e') > 0$.

<u>*Solution*</u> : On déduit de la Proposition 6 que pour tout $n \geq 2$,

$$[P^n](e, e') = \sum_{e_1,\ldots,e_{n-1}\in E} P(e, e_1)P(e_{n-1}, e') \prod_{i=1}^{n-1} P(e_{i-1}, e_i).$$

On peut alors conclure : si $e \to e'$ alors il exists n tel qu'un des termes de la somme de droite soit strictement positif, et donc $[P^n](e, e') > 0$. Si au contraire il existe n tel que $[P^n](e, e') > 0$, alors au moins un des termes de la somme doit être strictement positif, et donc $e \to e'$. □

Définition 8 (États récurrents, transients)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov d'espace d'états E. Un état e est dit *récurrent* si

$$\mathbb{P}(\exists n \geq 1 : X_n = e \mid X_0 = e) = 1.$$

Sinon, l'état e est dit *transient*.

Proposition 7 (admis)

Récurrence et transience sont des propriétés de classes, dans le sens où

— $\{e \text{ est récurrent et } e \leftrightarrow e'\} \Rightarrow e' \text{ est récurrent.}$

— $\{e \text{ est transient et } e \leftrightarrow e'\} \Rightarrow e' \text{ est transient.}$

Proposition 8 (admis)

Si l'espace d'états E est fini, alors il existe au moins un état récurrent.

Définition 9 (États périodiques)

Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov. On appelle *période* d'un état e le nombre entier (éventuellement infini)

$$d(e) = PGCD\{k \geq 1 \; : \; P^k(e,e) > 0\}.$$

Si $d(e) = 1$, on dit que l'état e est *apériodique*.

Proposition 9 (admis)

La périodicité est également une propriété de classe : si $d(e) = k$ et $e \leftrightarrow e'$, alors $d(e') = k$.

3 Mesures invariantes et convergence en temps long

Définition 10 (Mesure invariante)

Soit une matrice de transition P sur un espace d'états E. Soit π une mesure sur E vue comme vecteur ligne. La mesure π est dite

— *invariante* si $\pi P = \pi$,

— *réversible* si pour tout $e,\ e' \in E$, on a $\pi(e)P(e,e') = \pi(e')P(e',e)$.

Si de plus π est une mesure de probabilité, on parlera de *mesure de probabilité invariante*, (resp. *mesure de probabilité réversible* pour le second cas).

Exercice 6

Montrer que toute mesure réversible est également invariante.

SOLUTION : Soit m une mesure réversible, calculons mP. Plus précisément, on écrit

$$\pi P(e) = \sum_{e' \in E} \pi(e')P(e',e) \overset{\pi \text{ réversible}}{=} \sum_{e' \in E} \pi(e)P(e,e') = \pi(e) \sum_{e' \in E} P(e,e') = \pi(e)$$

car P est une matrice de transition. La mesure π est donc également invariante. □

Proposition 10 (existence de mesures invariantes, admis)

Une chaîne de Markov irréductible (cf. Définition 7) admet au plus *une unique* mesure de probabilité invariante.

Une chaîne de Markov *irréductible* à espace d'états fini admet une unique mesure de probabilité invariante.

Pourquoi la notion d'invariance est-elle fondamentale ? Supposons que pour tout $e \in E$, il existe une limite $\pi(e) := \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = e) = \lim_{n\to\infty} \mu_n$. Alors, on peut écrire l'égalité (en termes de vecteurs ligne)

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \mu_n = \lim_{n\to\infty} \mu_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \mu_n P = \pi P,$$

par conséquent, la distribution en temps long de la chaîne de Markov converge vers sa distribution invariante. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Théorème 1 (Convergence en loi, admis)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov *irréductible* et *apériodique*.

— Supposons que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une mesure de probabilité invariante π. Alors, pour tout état initial e_0 de la chaîne, et pour tout $e \in E$ on a

$$\mathbb{P}(X_n = e \mid X_0 = e_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi(e).$$

— Si au contraire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de mesure de probabilité invariante, pour tout état initial e_0, et pour tout $e \in E$, on a

$$\mathbb{P}(X_n = e \mid X_0 = e_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

À noter que, d'après la Proposition 6, $\mathbb{P}(X_n = e \mid X_0 = e_0) = [P^n](e_0, e)$.

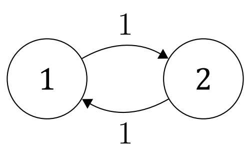
Exercice 7 : [Bonus, difficile]

Construire une chaîne de Markov n'admettant pas de mesure de probabilités invariante.

Exercice 8 : De l'importance de l'apériodicité

Construire une chaîne de Markov (la plus simple possible) irréductible, admettant une mesure de probabilités invariante, mais telle que $\mathbb{P}(X_n = e \mid X_0 = e_0)$ n'admette de limite $n \to \infty$ pour aucun $e,\ e_0$.

__Solution__ : On considère la chaîne de Markov suivante



Pour cette chaîne, $\mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_0 = 1)$ vaut 0 si n est impair, et 1 si n est pair, et n'admet donc pas de limite quand $n \to \infty$. On peut traiter de même les autres cas. $\square$

Théorème 2 (Théorème Ergodique / Loi faible des grands nombres, admis)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible et apériodique admettant une mesure de probabilité invariante π. Pour toute fonction f telle que $\sum_{e\in E} |f(e)|\pi(e) < \infty$, on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{e\in E} f(e)\pi(e)\right) = 1.$$

Interprétation heuristique : pour chaque $e \in E$, choisir $f(x) = \mathbf{1}_{\{x=e\}}$, qu'obtient t-on ? en temps long, la chaîne aura passé une proportion $\pi(e)$ de son temps en l'état e.

4 Exercices

Exercice 9

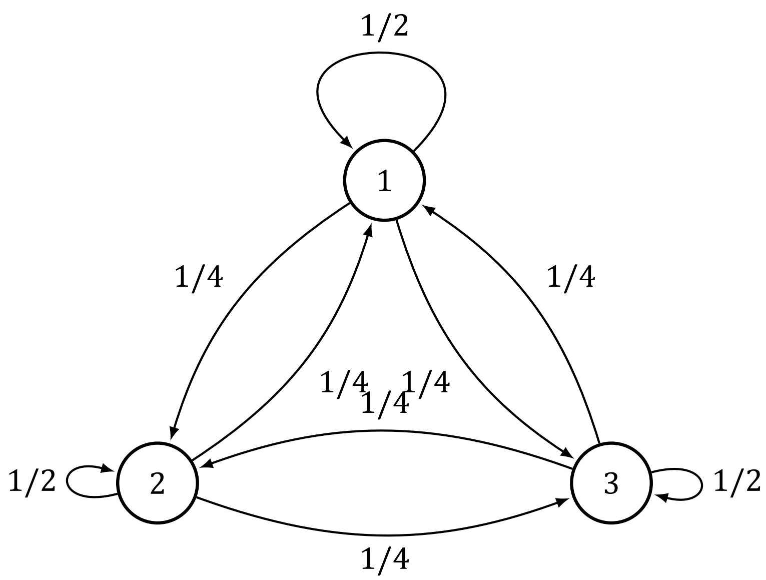
Considérons la matrice de transition définie sur $E = \{1, 2, 3\}$ par

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1) *Dessiner le graphe de transition.*
2) *Cette chaîne de Markov est-elle irréductible ? Est-elle apériodique ?*
3) *Tous les états sont-ils récurrents ? Si oui, comment peut-on modifier P pour qu'ils ne le soient pas tous ?*
4) *La répartition à l'instant n a-t-elle une limite quand n tend vers l'infini ? Laquelle ?*

<u>Solution</u> :

1)



2) La chaîne est irréductible et apériodique.

3) Tous les états sont récurrents. On peut rendre 1 et 2 transient en rendant 3 absorbant avec la matrice

$$P' = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) La chaîne étant irréductible, elle a une unique probabilité invariante π. on peut la déterminer en résolvant $\pi P = \pi$ mais il est plus rapide de deviner qu'à cause de la symétrie du problème π est uniforme : $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$. La chaîne étant irréductible et apériodique, pour tous les états initiaux possibles e_0 on a

$$\forall e \in \{1,2,3\} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = e | X_0 = e_0) = \frac{1}{3}$$

et comme $\mathbb{P}(X_n = e) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X_n = e | X_0 = i)\mathbb{P}(X_0 = i)$

$$\begin{aligned} \forall e \in \{1,2,3\} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = e) &= \sum_{i=1}^{3} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = e | X_0 = i)\mathbb{P}(X_0 = i) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_0 = i) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

Exercice 10 : Restaurant qui ne durera pas

La situation financière d'un restaurant évolue chaque année. Elle peut être dans décrite par trois états : 0 (faillite), 1 (au bord de la faillite) et 2 (solvable). La matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

1) Cette chaîne de Markov est-elle irréductible ?

2) Si le restaurant est actuellement solvable, dans combien d'années en moyenne fera-t-il faillite ? Quelle est la probabilité qu'il ne fasse pas faillite ?

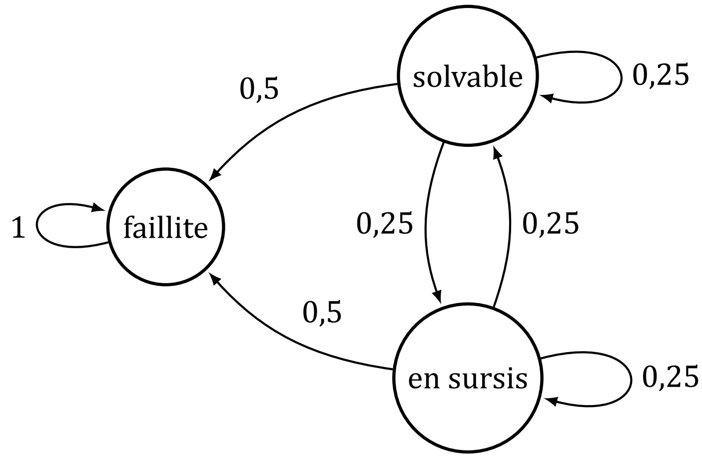
3) En fait, l'oncle du propriétaire est très riche et injecte du cash dès que l'état 0 est atteint, pour revenir à l'état solvable. La nouvelle matrice de transition est alors

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Cette nouvelle chaîne de Markov est-elle irréductible ? apériodique ? Combien d'années y a-t-il en moyenne entre les injections de cash ?

<u>*SOLUTION*</u> :

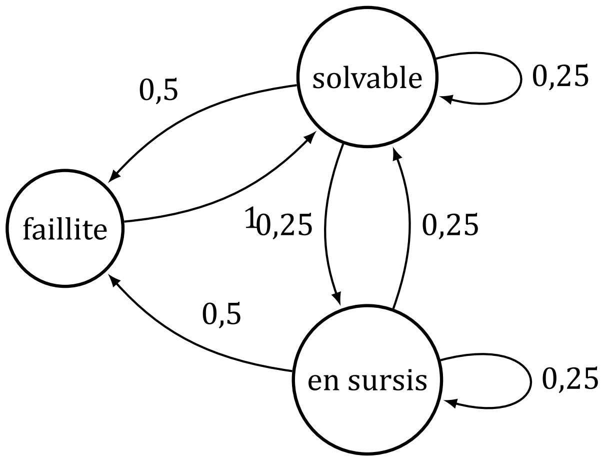
1)



Cette chaîne n'est pas irréductible, les états 1 et 2 ne sont pas accessible à partrir de l'état 0.

2) Tant que le restaurant n'est pas en faillite, à chaque étape il a une probabilité $0,5$ de se mettre en faillite, indépendamment des étapes précédentes. Le nombre d'étapes avant la faillite suite donc la loi géométrique de paramètre $1/2$. Si le restaurant est actuellement solvable, le nombre moyen d'années avant la faillite est de 2. La probabilité qu'il ne fasse pas faillite est nulle.

3)



Cette nouvelle chaîne de Markov est irréductible et apériodique. D'après la question précédente, il s'écoule en moyenne 2 ans entre les injections de cash. $\square$

Exercice 11 : Etats absorbants et trajectoires

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace d'états $E = \{1,2,3,4\}$ et de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Tracer le graphe des transitions.

2) Un état est absorbant si, quand on y est, la probabilité d'en sortir est nulle. Un état absorbant est-il récurrent ou transient ? Quels sont les états absorbants de cette chaîne ? Les autres états sont-ils récurrents ou transients ?

3) Calculer en fonction de la loi initiale μ_0 les probabilités des trajectoires suivantes

— $\{X_0 = 1$ *et* $\forall n \geq 1 \quad X_n = 3\}$

— $\{X_0 = 1 \, , \; X_1 = 2$ *et* $\forall n \geq 2 \quad X_n = 4\}$

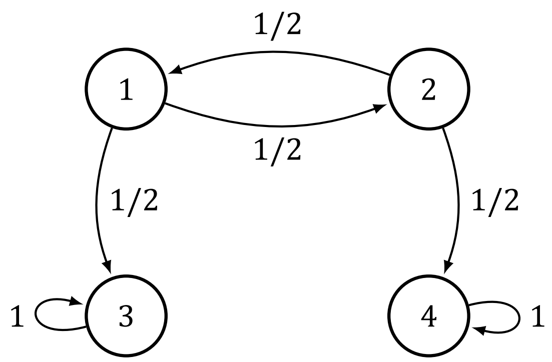
— $\{\forall n \in \mathbb{N} \quad X_0 = 1$ *si* n *est pair et* $X_n = 2$ *si* n *est impair* $\}$

4) Calculer la distribution à l'instant $n = 1$ puis à l'instant $n = 2$ lorsque la distribution est uniforme à l'instant initial. Même question pour la distribution initale $\mu_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$.

5) Est-il vrai qu'en temps long on finit toujours par atteindre un état absorbant ? Expliciter cette affirmation et la justifier.

Solution :

1)



2) Un état absorbant est récurrent.

Les états 3 et 4 sont absorbants car $\mathbb{P}(X_{n+1} = 3 \mid X_n = 3) = 1$, idem pour 4.

Les états 1 et 2 sont transients car

$$P(\{\exists n \in \mathbb{N}^* \, , \; X_n = 1\} \mid X_0 = 1) \leq \mathbb{P}(X_1 \neq 3 \mid X_0 = 1) = \frac{1}{2}$$

et pareil pour 2.

3) On écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\{X_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1 \quad X_n = 3\}\right) &= \mathbb{P}\left(\{X_0 = 1 \text{ et } X_1 = 3\}\right) \\ &= \mathbb{P}(X_0 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 3|X_0 = 1) = \frac{1}{2}\mu_0(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\{X_0 = 1 \, , \; X_1 = 2 \text{ et } \forall n \geq 2 \quad X_n = 4\}\right) &= \mathbb{P}\left(\{X_0 = 1 \, , \; X_1 = 2 \, , \; X_2 = 4\}\right) \\ &= \mathbb{P}(X_0 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 4|X_1 = 3) = \frac{1}{4}\mu_0(1)\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}\left(\{\forall n \in \mathbb{N} \quad X_0 = 1 \text{ si } n \text{ est pair et } X_n = 2 \text{ si } n \text{ est impair } \}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\cap_{k=0}^{n}\{X_{2k} = 1 \text{ et } X_{2k+1} = 2\}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu_0(1)(\frac{1}{2})^{2n+1} = 0$$

4) Si $\mu_0 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ then $\mu_1 = \mu_0 P = (\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8})$ and $\mu_2 = \mu_1 P = (\frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{7}{16}, \frac{7}{16})$.
Si $\mu_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$ then $\mu_1 = \mu_0 P = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ hence $\mu_2 = \mu_1 P = (\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8})$.

5) L'affirmation "*en temps long on finit toujours par atteindre un état absorbant*" se traduit par

$$\mathbb{P}\left(\{\exists n \in \mathbb{N}^*\ ,\ X_n \in \{3,4\}\}\right) = 1$$

Elle est vraie car l'évènement contraire est de probabilité nulle en raisonnant comme ci-dessus :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ X_n \in \{1,2\}\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\{\forall n \in \mathbb{N}\quad X_0 = 1 \text{ si } n \text{ est pair et } X_n = 2 \text{ si } n \text{ est impair }\}\right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(\{\forall n \in \mathbb{N}\quad X_0 = 2 \text{ si } n \text{ est pair et } X_n = 1 \text{ si } n \text{ est impair }\}\right) \\
&= 0 + 0
\end{aligned}$$

□

Exercice 12 : Gestion de stock

Dans une entreprise, la demande d'une marchandise pendant la journée n est notée D_n, et la quantité de cette marchandise en stock à la fin de la journée n est notée X_n. Le gestionnaire de l'entrepot a fixé un niveau maximal de stock S. Dès que $X_n = 0$, on réapprovisionne. Le réapprovisionnement se fait en 24h et remet le stock au niveau S. Tant que $X_n > 0$ on ne fait pas de réapprovisionnement.

1) Trouver une relation entre X_n, D_{n+1} et X_{n+1}. En déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sous une condition qu'on précisera. A quelle condition cette chaîne est-elle homogène ?

2) On suppose $S = 2$ et les D_n i.i.d. de loi donnée par

$$P(D_1 = 0) = 0,5 \quad P(D_1 = 1) = 0,4 \quad P(D_1 = 2) = 0,1$$

Quel est le niveau moyen du stock sur une longue période ?

<u>Solution</u> :

1)

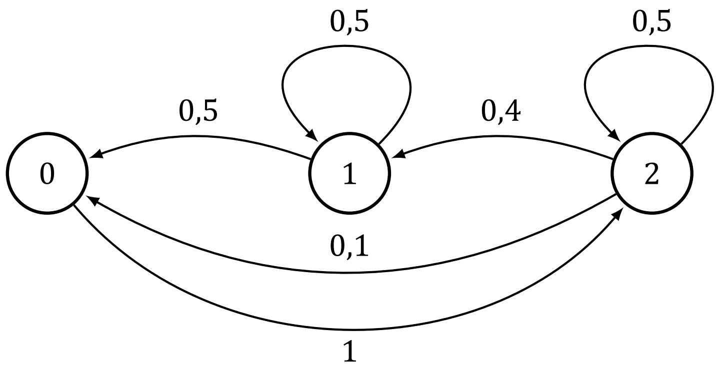
$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - D_n \text{ si } X_n > D_n \\ 0 \text{ si } D_n \geq X_n \\ S \text{ si } X_n = 0 \end{cases}$$

L'espace d'états des X_n est $E = \{0, 1, \cdots, S\}$. Supposons les D_n indépendants les uns des autres. Pour $e_0, e_1, \cdots, e_n, e_{n+1} \in E$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+1} = e_{n+1} | X_n = e_n, \cdots, X_0 = e_0) \\
&= \begin{cases} P(D_{n+1} = e_n - e_{n+1}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = e_{n+1} | X_n = e_n) \text{ si } S \geq e_n \geq e_{n+1} > 0 \\ P(D_{n+1} \geq e_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = e_n) \text{ si } e_{n+1} = 0 \text{ et } e_n > 0 \\ 1 = \mathbb{P}(X_{n+1} = S | X_n = 0) \text{ si } e_{n+1} = S \text{ et } e_n = 0 \\ 0 = \mathbb{P}(X_{n+1} = e_{n+1} | X_n = e_n) \text{ dans tous les autres cas} \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov. Elle est homogène si la loi de D_n ne dépend pas de n, i.e. si les D_n sont i.i.d.

2) $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov homogène de graphe



Cette chaîne est irréductible apériodique de matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Etant irréductible sur un espace d'états fini, elle a une unique probabilité invariante $\pi = (a, b, c)$

$$\begin{aligned} (a,b,c)P = (a,b,c) \quad &\Longleftrightarrow \quad (5b+c, 5b+4c, 10a+5c) = 10(a,b,c) \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 5b+c = 10a \\ 4c = 5b \\ 10a = 5c \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = c/2 \\ b = 4c/5 \\ 4c+c = 5c \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui avec $a+b+c=1$ i.e. $\frac{c}{2} + \frac{4c}{5} + c = 1$ donne $\pi = (5/23, 8/23, 10/23)$.

La chaîne étant irréductible, d'après le théorème ergodique

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} X_n = \frac{n}{n+1}\,\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \sum_{x=1}^{2} x\pi(x)$$

Donc en temps long le stock moyen s'élève à $\sum_{x=1}^{2} x\pi(x) = 0\times 5/23 + 1\times 8/23 + 2\times 10/23 = 28/23$ unités. $\square$

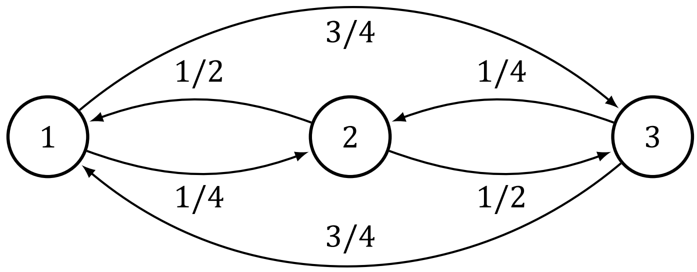
Exercice 13 : Stationnarité et réversibilité

Pour les chaînes de matrice de transition suivantes, dessiner le graphe, déterminer si la chaîne est irréductible, quels états sont récurrents ou transients, quelle est la période de chaque état, et chercher une probabilité réversible puis une probabilité invariante.

$$1)\quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad 2)\quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution :

1) $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov homogène de graphe



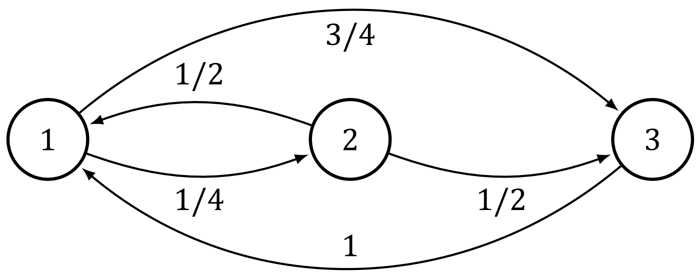
La chaîne est irréductible apériodique (la période de l'état 1 est pgcd$(2, 3, 4, 5, \cdots)$). Tous les états sont récurrents.

Pour $\pi = (a, b, c)$ la condition de réversibilité comporte $C_3^2 = 3$ équations :

$$\begin{cases} a/4 = b/2 \\ c/4 = b/2 \\ a/4 = c/4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2b \\ c = 2b \\ a = c \end{cases}$$

donc $\pi = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ est une probabilité réversible. C'est aussi l'unique probabilité stationnaire.

2) $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov homogène de graphe



La chaîne est irréductible apériodique (la période de l'état 1 est pgcd$(2, 3, 4, 5, \cdots)$). Tous les états sont récurrents.

Pour $\pi = (a, b, c)$ la condition de réversibilité comporte $C_3^2 = 3$ équations :

$$\begin{cases} a/4 = b/2 \\ b/2 = 0 \\ 3a/4 = c \end{cases} \iff a = b = c = 0$$

donc la seule mesure réversible est la mesure nulle. Cherchons l'unique mesure stationnaire :

$$(a, b, c) \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (a, b, c) \qquad \iff (2b + 4c, a, 3a + 2b) = 4(a, b, c)$$

$$\iff \begin{cases} a = 4b \\ 14b = 4c \\ 2b + 4c = 16b \end{cases} \qquad \iff \begin{cases} a = 4b \\ c = 7b/2 \end{cases}$$

L'unique mesure stationnaire est $(8/17, 2/17, 7/17)$. Elle est non réversible, évidemment. $\square$

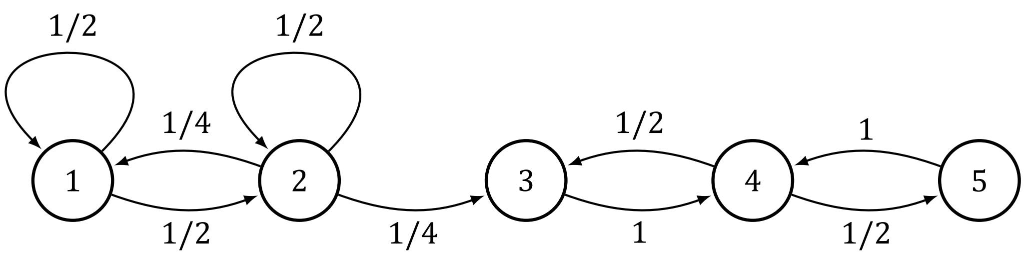
5 Approfondissement

Exercice 14

Etudier la chaîne de Markov homogène à 5 *états de matrice de transition*

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>*Solution*</u> :



L'état 2 n'est pas accessible à partir de l'état 3, la chaîne n'est donc pas irréductible. Les classes d'élements qui communiquent sont $\{1, 2\}$ et $\{3, 4.5\}$. Les états 3, 4 et 5 sont récurrents, de période 2. Les états 1 et 2 sont transients car

$$P(\{\exists n \in \mathbb{N}^*\ ,\ X_n = 2\} \mid X_0 = 2) \leq 1 - \mathbb{P}(X_1 = 3 \mid X_0 = 2) = \frac{3}{4} < 1$$

$$\begin{aligned} P(\{\exists n \in \mathbb{N}^*\ ,\ X_n = 1\} \mid X_0 = 1) &\leq 1 - \mathbb{P}(X_2 = 3, X_1 = 2 \mid X_0 = 2) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{8} < 1 \end{aligned}$$

Le théorème sur l'existence d'une unique mesure invariante pour les chaînes irréductibles ne s'applique pas. On peut néanmoins calculer à la main les éventuelles mesures invariantes :

$$
\begin{aligned}
&(a,b,c,d,e)P = (a,b,c,d,e)\\
&\iff \quad (2a+b, 2a+2b, b+2d, 4c+4e, 2d) = 4(a,b,c,d,e)\\
&\iff \quad \begin{cases} b = -2a \\ a = b \\ b+2d = 4c \\ b+2d+4e = 4d \\ d = 2e \end{cases} \iff \quad \begin{cases} a = b = 0 \\ d = 2c = 2e \end{cases}
\end{aligned}
$$

Les mesures invariantes sont proportionnelles à $\pi = (0, 0, 1/4, 1/2, 1/4)$.

On remarque que

$$
\begin{aligned}
&P(X_{n+1} \in \{1,2\} \mid X_n \in \{1,2\})\\
&= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} \in \{1,2\} \text{ et } X_n \in \{1,2\})}{\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 2)}\\
&= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} \in \{1,2\} | X_n = 1)\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} \in \{1,2\} | X_n = 2)\mathbb{P}(X_n = 2)}{\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 2)}\\
&= \frac{\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{3}{4}\mathbb{P}(X_n = 2)}{\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 2)} \leq \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

donc

$$P(\{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \in \{1,2\}\}) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \mathbb{P}(X_0 \in \{1,2\}) = 0$$

□

Exercice 15 : La ruine du joueur

Un joueur joue à pile ou face contre un adversaire. La pièce a une probabilité p de faire pile. Si elle fait pile, le joueur reçoit un euro de son adversaire. Si elle fait face, il donne un euro à l'adversaire. Au début, le joueur possède k euros et son adversaire $N-k$ euros. Les fortunes des deux personnes évoluent ainsi jusqu'à ce que l'un des deux ait gagné tout l'argent de son adversaire, après quoi elles cessent d'évoluer : on n'est pas autorisé à risquer de s'endetter.

Chaque lancer dure une minute. On note X_n la fortune du joueur après n minutes de jeu.

1) Quelle chaîne de Markov modélise ce jeu ? Donner son graphe et sa matrice de transition. Est-elle irréductible ? Apériodique ?

2) On note R l'événement le joueur finit ruiné *et r_k la probabilité qu'il finisse ruiné quand il démarre avec une fortune initial k. Exprimer R à partir des X_n. Combien valent r_0 et r_N ? Établir une relation entre r_k, r_{k+1} et r_{k-1}.*

3) En utilisant les différences $r'_k = r_{k+1} - r_k$, exprimer r_k en tant que fonction de k, N et p.

4) Trouver sans calcul la probabilité g_k que l'adversaire de fortune initiale $N-k$ finisse ruiné. Montrer que le jeu se termine en temps fini, presque sûrement.

5) Quelle est la limite de la probabilité de ruine quand on se rapproche de la situation typique du joueur de casino : p proche de $\frac{1}{2}$ avec $p < \frac{1}{2}$ et N presque infiniment plus grand que k ?

6) La roulette est un dispositif où une bille s'arrête au hasard sur une case, dans un cercle de 37 *cases numérotées de* 0 *à* 36*. Il y a* 18 *cases rouges et* 18 *cases noires, le zéro étant vert. Un joueur double sa mise s'il a joué la bonne couleur et la perd sinon.*

Un joueur possède 10 *euros et veut essayer d'en gagner* 10 *de plus en jouant à la roulette. Calculer sa probabilité de réussir pour chacune des deux stratégies suivantes :*

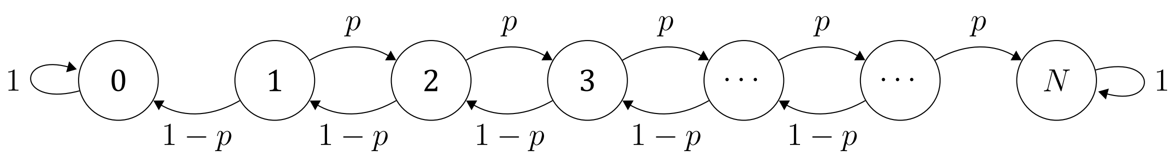
— *Il mise ses 10 euros en une seule fois sur le rouge ou le noir.*

— *Il mise un euro à la fois sur le rouge ou le noir et persévère jusqu'à ce que sa fortune atteigne* 20 *euros ou qu'il soit ruiné.*

<u>Solution</u> :

1) La matrice de transition est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et le graphe est



Chaine non irréductible, trois classes d'états communicants :

— $\{0\}$ (période 1),

— $\{1, 2, \cdots, N-1\}$ (période 2)

— $\{N\}$(période 1).

2) $R = \{\exists n \in \mathbb{N} \;\; X_n = 0\}$ et $r_k = P(R|X_0 = k)$.

Il est clair que $r_0 = 1$ (on est ruiné dès le départ) et $r_N = 0$ (l'adversaire est ruiné dès le départ, le jeu n'a pas lieu).

Dans le cas où $0 < k < N$, en conditionnant par les deux cas possibles pour la probabilité $P(\cdot|X_0 = k)$ et en utilisant la propriété de Markov

$$\begin{aligned} r_k =& P(\exists n \in \mathbb{N} \;\; X_n = 0 \mid X_0 = k) = P(\exists n \geq 1 \; X_n = 0 \mid X_0 = k) \\ &= P(\exists n \geq 1 \; X_n = 0 \mid X_1 = k+1, X_0 = k)\mathbb{P}(X_1 = k+1|X_0 = k) \\ &\quad + P(\exists n \geq 1 \; X_n = 0 \mid X_1 = k-1, X_0 = k)\mathbb{P}(X_1 = k+1|X_0 = k) \\ &= P(\exists n \geq 1 \; X_n = 0 \mid X_1 = k+1)\mathbb{P}(X_1 = k+1|X_0 = k) \\ &\quad + P(\exists n \geq 1 \; X_n = 0 \mid X_1 = k-1)\mathbb{P}(X_1 = k+1|X_0 = k) \\ &= P(\exists n \geq 0 \; X_n = 0 \mid X_0 = k+1)p + P(\exists n \geq 0 \; X_n = 0 \mid X_0 = k-1)(1-p) \\ &= p\, r_{k+1} + (1-p)\, r_{k-1} \end{aligned}$$

3) En notant $r'_k = r_{k+1} - r_k$, on réécrit l'égalité ci-dessus en $p(r_{k+1} - r_k) = (1-p)(r_k - r_{k-1})$ i.e. $p\, r'_k = (1-p) r'_{k-1}$.

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, N-1\} \qquad r'_k = \frac{1-p}{p}\, r'_{k-1} = a\, r'_{k-1} \quad \text{où} \quad a := \frac{1-p}{p}$$

$$\forall k \in \{0,1,\cdots,N-1\} \quad r'_k = a^k r'_0$$

— pour $p \neq \frac{1}{2}$ i.e. $a \neq 1$: $\forall k \in \{0,1,\cdots,N-1\} \quad r_{k+1} = r_0 + \sum_{i=0}^{k} r'_i = 1 + r'_0 \, \dfrac{1-a^{k+1}}{1-a}$

Comme $r_N = 1 + r'_0 \, \frac{1-a^N}{1-a} = 0$ on a $r'_0 = \frac{a-1}{1-a^N}$ donc

$$\forall k \in \{0,1,\cdots,N\} \quad r_k = 1 - \frac{1-a^k}{1-a^N} = \frac{a^k - a^N}{1-a^N}$$

— pour $p = \frac{1}{2}$ i.e. $a = 1$: tous les r'_k sont égaux à r'_0 donc

$$\forall k \in \{0,1,\cdots,N-1\} \quad r_{k+1} = r_0 + \sum_{i=0}^{k} r'_i = 1 + r'_0\,(k+1)$$

Comme $r_N = 1 + r'_0\,N = 0$ on a $r'_0 = \frac{-1}{N}$ donc

$$\forall k \in \{0,1,\cdots,N\} \quad r_k = 1 - \frac{k}{N}$$

4) On trouve sans calcul la probabilité g_k que l'adversaire finisse ruiné en utilisant ce qui précède avec une probabilité $1-p$ de gagner, p de perdre, et une fortune initiale de $N-k$ euros.

— pour $p \neq \frac{1}{2}$ i.e. $a \neq 1$: $g_k = \dfrac{a^{-(N-k)} - a^{-N}}{1-a^{-N}} = \dfrac{a^k - 1}{a^N - 1}$

— pour $p = \frac{1}{2}$ i.e. $a = 1$: $g_k = 1 - \dfrac{N-k}{N} = \dfrac{k}{N}$

Dans les deux cas $g_k + r_k = 1$ donc la probabilité que l'un des joueurs soit ruiné au bout d'un temps fini est égale à 1.

5) Dans la situation typique du joueur de casino (p proche de $\frac{1}{2}$ avec $p < \frac{1}{2}$ donc $a > 1$ avec $a = \frac{1-p}{p}$ proche de 1 et N proche de l'infini) la probabilité de ruine est $r_k = \frac{a^k - a^N}{1-a^N} = \frac{1-a^{k-N}}{1-a^{-N}}$ qui est proche de 1.

6) A chaque lancer de la roulette, le joueur qui a misé sur le rouge ou le noir a une probabilité $p = 18/37$ de doubler sa mise.

— S'il mise ses 10 euros en une seule fois, il atteidra une fortune de 20 euros avec probabilité $18/37 \simeq 0,486$.

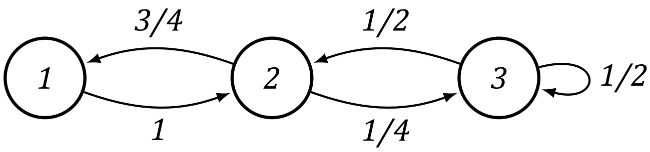
— S'il mise un euro à la fois, il réalise une chaîne de Markov comme ci-dessus avec $p = 18/37$, $k = 10$ et $N = 20$. Sa probabilité de réussite est donc

$$1 - r_{10} = 1 - \frac{a^{10} - a^{20}}{1-a^{20}} = \frac{1-a^{10}}{1-a^{20}} \simeq 0,368 \quad \text{où} \quad a := \frac{19/37}{18/37} = \frac{19}{18}$$

$\square$

Exercice 16 : Puissances de matrice et convergence de chaîne

On étudie une chaîne de Markov de graphe de transition



1) Déterminer sa matrice de transition P. La chaîne est-elle irréductible ? Calculer les périodes des états.

2) La chaîne a-t-elle une probabilité invariante ? Laquelle ?

3) Factoriser le polynôme caractéristique $\Pi(X)$ de P et déterminer ses valeurs propres et vecteurs propres.

4) Que vaut $\lim_{n\to+\infty} P^n$?

__Solution__ :

1) La chaîne est irréductible apériodique.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2) Cette chaîne est irréductible sur un espace d'états fini donc elle a une unique probabilité invariante.

$$\begin{aligned} (a,b,c)P = (a,b,c) \quad &\iff (3b, 4a+2c, b+2c) = 4(a,b,c) \\ &\iff \begin{cases} 3b = 4a \\ 4a + 2c = 4b \\ b = 2c \end{cases} \quad \iff \begin{cases} a = 3b/4 \\ c = b/2 \end{cases} \end{aligned}$$

La probabilité invariante est donc $(1/3, 4/9, 2/9)$.

3) Le polynôme caractéristique $\Pi(X)$ de P est

$$\det(XI_d - P) = \det \begin{pmatrix} X & -1 & 0 \\ -3/4 & X & -1/4 \\ 0 & -1/2 & X - 1/2 \end{pmatrix} = X(X(X-1/2)-1/8) - 3/4(X-1/2)$$

$$\Pi(X) = X^3 - X^2/2 - 7X/8 + 3/8 = (X-1)(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$$

où

$$\lambda_1 = \frac{-1-\sqrt{7}}{4} \text{ et } \lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}$$

La matrice P est diagonalisable puisque les dimensions des sous-espaces-propres sont égales à la multiplicité de la valeur propre correspondante : ils sont tous de dimension 1. Calculons les vecteurs propres associés aux valeurs propres :

$$P \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} v = u \\ 3u + w = 4v \\ v + w = 2w \end{cases} \qquad \iff \quad u = v = w$$

$$P \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad \iff \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} v = \lambda_1 u \\ 3u + w = 4\lambda_1 v \\ v + w = 2\lambda_1 w \end{cases} \qquad \iff \begin{cases} v = (2\lambda_1 - 1)w = \frac{-3-\sqrt{7}}{2} w \\ u = v/\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{7}}{2} \times \frac{4}{1+\sqrt{7}} w = \frac{4+2\sqrt{7}}{3} w \end{cases}$$

Un vecteur propre pour λ_2 se calcule de la même façon :

$$P \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad \iff \begin{cases} v = \lambda_2 u \\ 3u + w = 4\lambda_2 v \\ v + w = 2\lambda_2 w \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} v = (2\lambda_2 - 1)w = \frac{-3+\sqrt{7}}{2} w \\ u = v/\lambda_2 = \frac{-3+\sqrt{7}}{2} \times \frac{4}{\sqrt{7}-1} w = 2\frac{(-3+\sqrt{7})(\sqrt{7}+1)}{6} w = \frac{4-2\sqrt{7}}{3} w \end{cases}$$

Au final

$$P = SDS^{-1} \quad \text{où} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4+2\sqrt{7}}{3} & \frac{4-2\sqrt{7}}{3} \\ 1 & \frac{-3-\sqrt{7}}{2} & \frac{-3+\sqrt{7}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

donc $P = SD^nS^{-1}$. Comme $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$, les D^n convergent vers $D_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$SD_\infty = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4+2\sqrt{7}}{3} & \frac{4-2\sqrt{7}}{3} \\ 1 & \frac{-3-\sqrt{7}}{2} & \frac{-3+\sqrt{7}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $SD_\infty S^{-1}$ a trois lignes identiques, égales à la première ligne de S^{-1}, qu'on peut calculer en utilisant la transposée de la matrice des cofacteurs.

$$\begin{aligned} \det(S) &= -\sqrt{7} - \frac{4+2\sqrt{7}}{3} \times \frac{5-\sqrt{7}}{2} + \frac{4-2\sqrt{7}}{3} \times \frac{5+\sqrt{7}}{2} \\ &= \frac{-6\sqrt{7} - 20 - 6\sqrt{7} + 14 + 20 - 6\sqrt{7} - 14}{6} = \frac{-18\sqrt{7}}{6} = -3\sqrt{7}. \end{aligned}$$

La première colonne de la matrice des cofacteurs de S a les coefficients $-\sqrt{7}$, $-4\sqrt{7}/3$ et $\frac{(4+2\sqrt{7})}{3}\frac{(-3+\sqrt{7})}{2} - \frac{(4-2\sqrt{7})}{3}\frac{(-3-\sqrt{7})}{2} = \frac{-4\sqrt{7}}{6}$. L'inverse de S est donc de la forme

$$S^{-1} = \frac{1}{\det(S)} \begin{pmatrix} -\sqrt{7} & ? & ? \\ -4\sqrt{7}/3 & ? & ? \\ -4\sqrt{7}/6 & ? & ? \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1/3 & 4/9 & 2/9 \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

La limite des puissances de la matrice de transition est donc

$$\lim_{n\to+\infty} P^n = SD_\infty S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 4/9 & 2/9 \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 4/9 & 2/9 \\ 1/3 & 4/9 & 2/9 \\ 1/3 & 4/9 & 2/9 \end{pmatrix}$$

On retrouve le fait que quel que soit l'état initial, on tend vers la distribution invariante (théorème de convergence en loi). □

Exercice 17 : Fiabilité d'une machine (examen décembre 2018)

On modélise le fonctionnement d'une machine. Pour simplifier, on considérera qu'on observe la machine à chaque heure et qu'elle a trois états possibles : 1 (bon état), 2 (mauvais état) et 3 (en panne). Le passage d'un état donné à l'état une heure après se fait de la façon suivante :

— *quand la machine est en bon état, il y a* 9 *chances sur* 10 *qu'elle le reste, et* 1 *chance sur* 10 *qu'elle devienne en mauvais état;*

— *quand elle est en mauvais état, il y a* 3 *chances sur* 5 *qu'elle le reste,* 1 *chance sur* 5 *pour qu'elle tombe en panne, et* 1 *chance sur* 5 *pour qu'un technicien s'en aperçoive et la répare. La réparation remet la machine en bon état.*

— *quand la machine tombe en panne, un technicien vient immédiatement la réparer. Une heure après, elle redémarre en bon état.*

On note X_n *l'état de la machine au bout de* n *heures.*

1) Dessiner le graphe de la chaîne de Markov représentant les états de la machine, et écrire sa matrice de transition.

2) Ce matin, la machine a démarré en bon état. Quelle est la probabilité que trois heures après elle soit en bon état ?

3) La chaîne est-elle irréductible ? Est-elle apériodique ?

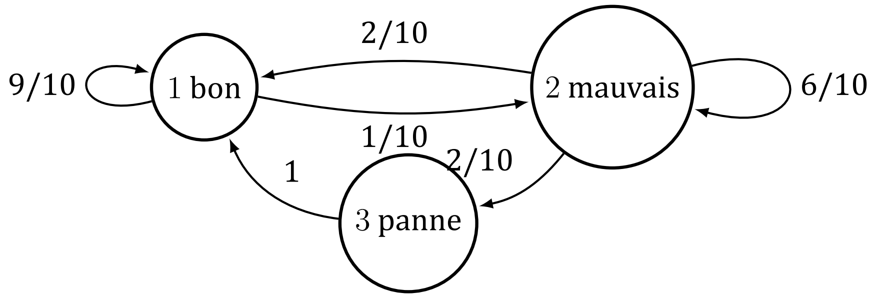
4) A-t-elle une probabilité réversible ? Si oui, laquelle ? A-t-elle une probabilité invariante ? Si oui, laquelle ?

5) Quelle est la probabilité qu'à un moment quelconque, longtemps après la mise en service de la machine, elle soit en bon état ? (justifier)

6) En moyenne sur une longue période, quelle proportion du temps est perdue pour cause de panne ? (justifier)

Solution :

1) $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov homogène de graphe et de matrice



$$P = \begin{pmatrix} 9/10 & 1/10 & 0 \\ 2/10 & 6/10 & 2/10 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) *Ce matin, la machine a démarré en bon état* signifie que la loi de X_0 est $\mu_0 = (1, 0, 0)$. Elle sera trois heures après dans l'état X_3 de loi μ_3.

$$\mu_1 = (1, 0, 0)P = (9/10, 1/10, 0) \qquad \mu_2 = (9/10, 1/10, 0)P = (83/100, 15/100, 2/100)$$

$$\begin{aligned} \mu_3 = \left(\frac{83}{100}, \frac{15}{100}, \frac{2}{100}\right) P &= \left(\frac{83 \times 9 + 15 \times 2 + 20}{1000}, \frac{83 + 15 \times 6}{1000}, \frac{30}{1000}\right) \\ &= \left(\frac{797}{1000}, \frac{173}{1000}, \frac{30}{1000}\right) \end{aligned}$$

La probabilité que trois heures après la machine soit en bon état est de 797 chances sur 1000.

3) La chaîne est irréductible (tout état est accessible à partir des autres) donc tous les états ont la même période, qui vaut 1 car $\mathbb{P}(X_1 = 1 | X_0 = 1) > 0$ par exemple. La chaîne est donc apériodique.

4) S'il existe une probabilité réversible $\pi = (a, b, c)$, elle doit satisfaire les conditions

$$a\frac{1}{10} = b\frac{2}{10} \qquad b\frac{2}{10} = c \times 0 \qquad a \times 0 = c \times 1$$

La seule solution est $\pi = (0, 0, 0)$ qui n'est pas une probabilité donc il n'existe pas de probabilité réversible.

S'il existe une probabilité invariante $\pi = (a, b, c)$, elle doit satisfaire les conditions

$$(a, b, c) \begin{pmatrix} 9/10 & 1/10 & 0 \\ 2/10 & 6/10 & 2/10 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (a, b, c) \iff (9a + 2b + 10c, a + 6b, 2b) = 10(a, b, c)$$

$$\iff \begin{cases} b = 5c \\ a + 6b = 10b \\ 2b + 10c = a \end{cases} \iff \begin{cases} b = 5c \\ a = 20c \end{cases}$$

L'unique probabilité stationnaire est $(20/26, 5/26, 1/26)$. Elle est non réversible, évidemment.

5) La chaîne étant irréductible et apériodique de probabilité stationnaire la mesure $(20/26, 5/26, 1/26)$, le théorème de convergence en loi assure que pour tout état initial j on a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 1 | X_0 = j) = 20/26$.

Le conditionnement par tous les cas possibles $\mathbb{P}(X_n = 1) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X_n = 1|X_0 = j)\mathbb{P}(X_0 = j)$ entraine

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{3} \frac{20}{26}\mathbb{P}(X_0 = j) = \frac{10}{13}$$

Au bout d'un temps long après sa mise en service, la probabilité que la machine soit en bon état est de $20/26$.

6) La chaîne étant irréductible de proba. stationnaire $\pi = (20/26, 5/26, 1/26)$, le théorème ergodique indique que

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{\{X_n=3\}} = \frac{n}{n+1}\,\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{\{X_n=3\}} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \sum_{x=1}^{3} \mathbf{1}_{\{x=3\}}\pi(x) = \pi(3) = 1/26$$

En moyenne sur une longue période, la proportion du temps perdue pour cause de panne est de $1/26$. □

Exercice 18 : Abreuvoir automatique (deuxième session, juin 2019)

Un élevage est équipé d'un abreuvoir automatique qui ne peut être utilisé que par un animal à la fois. On suppose qu'à chaque minute, il y a une probabilité $\frac{1}{2}$ qu'un seul animal vienne boire, une probabilité $\frac{1}{6}$ que deux animaux viennent boire et une probabilité $\frac{1}{3}$ qu'aucun animal ne vienne. Si un animal qui arrive trouve l'abreuvoir libre, il boit pendant une minute et s'en va, sinon il attend. On suppose qu'il n'y a jamais plus de deux animaux en attente, c'est-à-dire qu'un animal qui trouve l'abreuvoir occupé avec déjà deux bêtes en attente renonce à boire et s'en va (de même, si deux animaux arrivent en même temps et qu'il y a déjà une bête en attente, un seul des deux arrivants fait la queue et l'autre renonce).

On note X_n le nombre d'animaux au temps n à l'abreuvoir (en attente ou en train de boire). A l'instant 0 (mise en service de l'abreuvoir) on a $X_0 = 0$.

1) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène. Quel est son espace d'états ? Tracer le graphe correspondant et donner la matrice de transition P.

2) A l'instant 0, l'abreuvoir est inutilisé. Calculer la probabilité qu'il soit utilisé pour la première fois à l'instant k. Au bout de combien de temps, en moyenne, commence-t-il à être utilisé ?

3) Sachant qu'à l'instant 0 il n'y aucun animal à l'abreuvoir, calculer la probabilité qu'un animal qui se présente seul à l'instant 3 n'ait pas à attendre.

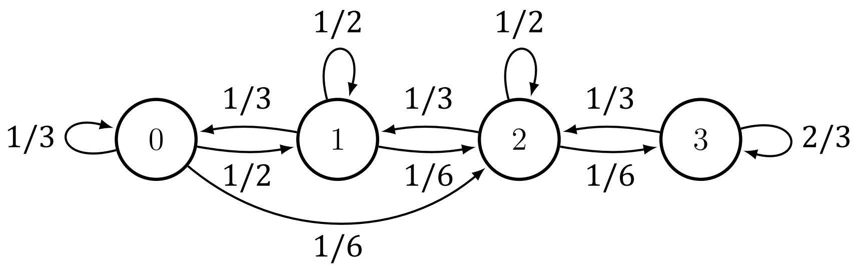
4) Si à l'instant 10 il y a deux bêtes en attente, calculer la probabilité que la situation soit la même à l'instant 15 et que l'abreuvoir soit resté inutilisé au moins une minute entre-temps.

5) X_n a-t-elle une loi limite quand n devient grand ? Si oui, la calculer. Que peut-on en déduire sur la convergence éventuelle (et la limite) de la suite des P^n ?

6) L'éleveur est prêt à investir dans un second abreuvoir si, plus de la moitié du temps, il y a deux animaux en attente. Il reste un long moment à coté de l'abreuvoir après sa mise en service et observe la proportion de temps où deux animaux attendent. Que constate-t-il ? Doit-il installer un deuxième abreuvoir ?

SOLUTION :

1) Le nombre X_n d'animaux en attente ou en train de boire à l'instant n peut valoir $0, 1, 2$ ou 3, pas plus puisqu'il n'y a jamais plus de deux animaux en attente. L'espace d'états est donc $E = \{0, 1, 2, 3\}$. Puisque à chaque minute, il y a une probabilité $\frac{1}{2}$ qu'un seul animal vienne boire, une probabilité $\frac{1}{6}$ que deux animaux viennent boire et une probabilité $\frac{1}{3}$ qu'aucun animal ne vienne, et qu'un animal qui trouve l'abreuvoir occupé avec déjà deux bêtes en attente renonce à boire, le graphe est :



et

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

2) A chaque minute indépendamment, la probabilité que l'abreuvoir ne soit pas encore utilisé est de $1/3$. Le nombre de minutes jusqu'à la première où il est utilisé suit donc la loi géométrique de paramètre $2/3$, qui a pour espérance $3/2$: en moyenne, l'abreuvoir commence à être utilisé au bout de $1,5$ minutes. La probabilité qu'il soit utilisé pour la première fois à l'instant k est $\frac{2}{3}(\frac{1}{3})^{k-1}$.

3) La probabilité qu'un animal qui se présente seul à l'instant 3 n'ait pas à attendre est la probabilité qu'à l'instant précédent il n'y ait que zéro ou un animal à l'abreuvoir :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_2 \in \{0,1\} | X_0 = 0) \\
&= P(X_2 = 0 | X_0 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_0 = 0) \\
&= P(X_2 = 0, X_1 = 0 | X_0 = 0) + P(X_2 = 0, X_1 = 1 | X_0 = 0) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 = 0 | X_0 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 = 1 | X_0 = 0) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{25}{36}
\end{aligned}$$

4) Sachant que $X_{10} = 3$, on ne peut avoir $X_{15} = 3$ en étant passé par l'état 0 que par une seule trajectoire :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{15} = 3 \text{ et } X_n = 0 \text{ pour un } n | X_{10} = 3) \\
&= \mathbb{P}(X_{15} = 3, X_{14} = 2, X_{13} = 0, X_{12} = 1, X_{11} = 2 | X_{10} = 3) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{972}
\end{aligned}$$

5) La chaîne est irréductible (tout état est accessible à partir des autres) donc tous les états ont la même période, qui vaut 1 car $\mathbb{P}(X_1 = 0 | X_0 = 0) > 0$ par exemple.

La chaîne est donc apériodique. Toute chaîne de Markov homogène, irréductible et apériodique sur l'espace d'états fini $E = \{0,1,2,3\}$ converge en loi vers son unique probabilité invariante μ. Pour calculer cette probabilité limite μ, on cherche d'abord si la chaîne a une probabilité réversible (c'est plus facile) car on sait qu'une réversible est toujours invariante.

$$\pi = (a,b,c,d) \text{ réversible} \iff \begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{b}{3} \\ \frac{a}{6} = 0 \\ \frac{b}{6} = \frac{c}{3} \\ \frac{c}{6} = \frac{d}{3} \end{cases} \iff a = b = c = d = 0 \quad \text{impossible!}$$

Pas de probabilité réversible. On cherche alors la probabilité invariante :

$$(a,b,c,d)\begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = (a,b,c,d)$$

$$\iff \left(\frac{a}{3}+\frac{b}{3}, \frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}, \frac{a}{6}+\frac{b}{6}+\frac{c}{2}+\frac{d}{3}, \frac{c}{6}+\frac{2d}{3}\right) = (a,b,c,d)$$

$$\iff \begin{cases} b = 2a \\ 3a+3b+2c = 6b \\ a+b+3c+2d = 6c \\ c+4d = 6d \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2a \\ 3a+2c = 3b = 6a \\ 3a+2d = 3c \\ c = 2d \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2a \\ 2c = 3a \\ c = 2d \end{cases}$$

Comme $a+b+c+d = 1$ i.e. $a + 2a + \frac{3a}{2} + \frac{3a}{4} = 1$ i.e. $12a + 6a + 3a = 4$, ceci impose $a = \frac{4}{21}$ et donc $\pi = \left(\frac{4}{21}, \frac{8}{21}, \frac{4}{14}, \frac{2}{14}\right)$.

On a donc

$$\forall e_0 \in E \quad \forall e \in E \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = e | X_0 = e_0) = \pi(e).$$

La formule de conditionnement par tous les cas possibles donne

$$\forall (x,y,z,t) \in (\mathbb{R}^+)^4 \qquad \lim_{n\to+\infty} (x,y,z,t)P^n = (x+y+z+t)\left(\frac{4}{21}, \frac{8}{21}, \frac{4}{14}, \frac{2}{14}\right)$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{21} & \frac{8}{21} & \frac{4}{14} & \frac{2}{14} \\ \frac{4}{21} & \frac{8}{21} & \frac{4}{14} & \frac{2}{14} \\ \frac{4}{21} & \frac{8}{21} & \frac{4}{14} & \frac{2}{14} \\ \frac{4}{21} & \frac{8}{21} & \frac{4}{14} & \frac{2}{14} \end{pmatrix}.$$

6) La chaîne étant irréductible de probabilité stationnaire $\pi = \left(\frac{4}{21}, \frac{8}{21}, \frac{4}{14}, \frac{2}{14}\right)$, le théorème ergodique indique que

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{\{X_n=3\}} = \frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{\{X_n=3\}} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \sum_{x=1}^{4} \mathbf{1}_{\{x=3\}}\pi(x) = \frac{2}{14}$$

En moyenne sur une longue période, il y a deux animaux en attente pendant un septième du temps seulement. Il est inutile d'acheter un deuxième abreuvoir. □

Exercice 19 : Existence d'une probabilité invariante

Soit P une matrice de transition sur un espace d'état E fini. On peut supposer sans perte de généralité que $E = \{1, 2, \cdots, N\}$. On note P' la transposée de P.

1) Montrer que P' admet 1 pour valeur propre.

2) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de P, son module est inférieur ou égal à 1. On écrira $Pv = \lambda v$ et on considérera la composante de module maximal du vecteur propre v.

3) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de module 1 de P' et si v est un vecteur propre associé, montrer que $w = (|v_1|, \cdots, |v_N|)$ est un vecteur propre de P' associé à la valeur propre 1. On provera d'abord que les $a_i = \sum_{j=1}^{N} P'(i,j)w_j - w_i$ sont positifs, puis que leur somme est nulle.

4) On a prouvé que toute chaîne de Markov sur un espace d'états fini admet une probabilité invariante. Pourquoi ?

Solution :

1) P est une matrice de transition donc la somme des coefficients sur chaque ligne est égale à 1. Par conséquent, en notant $\vec{1} = (1, \cdots, 1)'$ le vecteur colonne dont toutes les coordonnées sont égales à 1 on a $P\vec{1} = \vec{1}$. Le polynôme caractéristique de P, et donc celui de P' puisque c'est le même, ont donc 1 pour racine : P' admet 1 pour valeur propre.

2) Si $Pv = \lambda v$, en notant $|v_i| = \max(|v_1|, \cdots, |v_N|)$ on aura

$$|\lambda||v_i| = \left|\sum_{j=1}^{N} P(i,j)v_j\right| \leq \sum_{j=1}^{N} |P(i,j)||v_j| = \sum_{j=1}^{N} P(i,j)|v_j| \leq \sum_{j=1}^{N} P(i,j)|v_i| = |v_i|$$

car les $P(j,i)$ sont dans $[0; 1]$ et leur somme sur chaque ligne est égale à 1.

3) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de module 1 de P', v vecteur propre associé et $w = (|v_1|, \cdots, |v_N|)$:

$$a_i = \sum_{j=1}^{N} P'(i,j)w_j - w_i = \sum_{j=1}^{N} P'(i,j)|v_j| - |v_i| \geq \left|\sum_{j=1}^{N} P'(i,j)v_j\right| - |v_i| = |\lambda v_i| - |v_i| = 0$$

De plus

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P'(i,j)w_j - \sum_{i=1}^{N} w_i = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} P(j,i)w_j - \sum_{i=1}^{N} w_i = \sum_{j=1}^{N} w_j - \sum_{i=1}^{N} w_i = 0$$

Par conséquent, les a_i sont positifs, donc tous nuls et $w = (|v_1|, \cdots, |v_N|)$ est un vecteur propre de P' associé à la valeur propre 1.

4) On a prouvé que P' admet 1 pour valeur propre et que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de module 1 de P' de vecteur propre associé v, $w = (|v_1|, \cdots, |v_N|)$ est un vecteur propre de P' associé à la valeur propre 1. Par conséquent, il existe w à coordonnées toutes positives tel que $P'w = w$ i.e. $w'P = w'$. Quitte à remplacer w par $\frac{1}{w_1 + \cdots + w_N} w$, w' représente une probabilté invariante pour la chaîne de matrice de transition P. □