Eléments de géométrie algébrique

Clément Erignoux
sous la direction de Michel Brion

30 mars 2011

Table des matières

1 Eléments de géométrie algébrique

On considère E un $\mathbb{C}$-espace vectorielde dimension n, et on note $\mathbb{C}[E] \simeq \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ l'espace des fonctions polynomiales sur E.

Définition 1 (Variété algébrique). *On appelle variété algébrique de E tout ensemble de la forme*

$$V = \{z = (z_1, ..., z_n) \in E,\ P_i(z) = 0\ \forall i \in I\}\ ,$$

où $(P_i)_i$ est une famille a priori quelconque de polynômes de $\mathbb{C}[E]$. Pour $\mathscr{F} \subset \mathbb{C}[E]$, on notera désormais $\mathscr{V}(\mathscr{F})$ la variété algébrique engendrée par $\mathscr{F}$.

Remarque : Soit $(P_i)_i$ une famille de polynômes, et $I \subset \mathbb{C}[E]$ l'idéal qu'elle engendre. Alors, la variété algébrique $\mathscr{V}((P_i)_i)$ coïncide avec $\mathscr{V}(I)$

Définition 2 (Idéal radical). *Soit $I \subset \mathbb{C}[E]$ un idéal, on définit le **radical** de I, et on note*

$$\sqrt{I} = \{P \in C[E],\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ P^n \in I\}\ .$$

*Un idéal sera dit **radical** s'il coïncide avec son radical.*

Théorème 1 (Théorème des zéros de Hilbert). *Soit I un idéal de $\mathbb{C}[E]$, et $P \in \mathbb{C}[E]$ tel que $P_{|\mathscr{V}(I)} \equiv 0$. Alors, on a $P \in \sqrt{I}$.*

Définition 3 (Topologie de Zariski). *La **topologie de zariski** est la topologie dont les fermés sont les ensembles de la forme $\mathscr{V}(I)$.*

Définition 4 (variété irréductible). *Une variété V est dite **irréductible** si elle ne peut s'exprimer comme union de deux sous ensembles stricts fermés pour la topologie de zariski.*

2 Correspondance entre variétés et sous algèbres de $\mathbb{C}[E]$

Nous allons désormais nous intéresser à la correspondance entre variété algébrique et idéal radical, donnée par le résultat suivant :

Proposition 1. *Il existe une bijection décroissante pour l'inclusion entre les variétés algébriques affines de E et les idéaux radicaux de $\mathbb{C}[E]$, donnée par*

$$\begin{array}{ccc} radicaux(\mathbb{C}[E]) & \to & var(E) \\ I & \mapsto & \mathscr{V}(I) \end{array} .$$

Pour V une variété algébrique quelconque, la bijection reciproque est donné par

$$V \mapsto \mathscr{I}(V) ,$$

où l'on définit $\mathscr{I}(V) = \{P \in \mathbb{C}[E],\ P_{|V} \equiv 0\}$. On a la même correspondance entre variétés irréductibles et idéaux premiers.

Preuve de la proposition : Commençons par montrer le cas des idéaux radicaux. Le fait que $\mathscr{I}(\mathscr{V}(I)) = sqrt(I)$ est une conséquence directe du théorème des zeros de Hilbert. Le sens inverse est clair aussi, dans le cas des variétés algébriques, et est en fait vrai pour tout sous ensemble $Y \subset E$ fermé pour la topologie de zariski (c'est la topologie dont les fermés sont les variétés algébriques affines).

Passons désormais à la seconde partie. Si V est une variété irréductible, montrons que $\mathscr{I}(V)$ est premier. En effet, soit $PQ \in \mathscr{I}(V)$, alors $V \subset \mathscr{V}(PQ) = \mathscr{V}(P) \cup \mathscr{V}(Q)$. Dans ces conditions, on a

$$V = (V \cap \mathscr{V}(P)) \cup (V \cap \mathscr{V}(Q)) ,$$

qui est une union totale de sous ensembles fermés dans V. Comme V est irréductible, on peut supposer $V = V \cap \mathscr{V}(P)$, auquel cas $V \subset \mathscr{V}(P)$, donc $P \in \mathscr{I}(V)$.

Réciproquement, soit I un idéal premier, on suppose que $\mathscr{V}(I) = V_1 \cup V_2$. Alors, $I = \mathscr{I}(V_1) \cap \mathscr{I}(V_2)$, donc soit $I = \mathscr{I}(V_1)$, ou $I = \mathscr{I}(V_2)$. Alors, $\mathscr{V}(I) = V_1$ ou V_2, et est donc irréductible.$\blacksquare$

On peut observer la correspondance précédement établie en termes de sous algèbres de $\mathbb{C}[E]$:

Proposition 2. *Il existe une bijection décroissante pour l'inclusion entre les variétés algébriques affines de E et les sous algèbres sans éléments nilpotents de $\mathbb{C}[E]$, donnée par*

$$\begin{array}{ccc} nil(\mathbb{C}[E]) & \to & var(E) \\ \mathbb{C}[E]/I & \mapsto & \mathscr{V}(I) \end{array} .$$

On a également une correspondance entre variétés irréductibles et sous algèbre intègre.

Remarque : cette seconde version repose simplement sur l'équivalence entre idéal radical et quotient dans $\mathbb{C}[E]$ sans élément nilpotent. (resp. entre idéal permier et algèbre intègre)