# Coloriage de graphes aléatoires

Clément Erignoux
sous la direction de Omid Amini

3 janvier 2011

## *Table des matières*



Le but de cet exposé est d'énoncer les résultats existants sur le coloriages d'un graphe aléatoire, avec comme contrainte que la couleur de chaque sommet est différente de celle de ses voisins. En particulier, on énoncera une conjecture sur un lien entre le nombre d'arêtes de voisins moyen de chaque sommet et la topologie des différents coloriages possibles. Le but principal de ce travail est d'exposer un résultat, dû à Achlioptas et Naor, sur les deux valeurs possibles du nombre chromatique d'un graphe aléatoire.

# 1 Coloriage, position du problème

## 1.1 Coloriage d'un graphe aléatoire

On considère un graphe aléatoire $G = G(n, \alpha/n)$ choisi uniformément dans l'ensemble de Erdös-Renyi $\mathbb{G}(n, \alpha)$, c'est à dire que le graphe $G$ comprend $n$ sommets, chaque sommet étant relié à un de ces voisins avec la probabilité $p = \alpha/n$. Dans toute la suite, on notera en l'absence d'ambiguités $E$ l'ensemble des arêtes, et $V$ l'ensemble de ses sommets. Donnons à présent une définitions formelle d'un coloriage :

**Définition 1** (Coloriage)**.** *Soit $G$ un graphe à $n$ sommets, notons $\chi_k = \{1, ..., k\}$. Un $k$-coloriage de $G$ est une application*

$$\phi : \ V \longrightarrow \chi_k \ ,$$

*vérifiant, pour tout $(i, j) \in E$, $\phi(i) \neq \phi(j)$. Les entiers $1, ..., k$ sont alors interprétés comme les différentes couleurs.*

On introduit sur $\chi_k^n$ (l'hypercube des applictions de $V$ dans $\chi_k$) la mesure de probabilités uniforme sur les coloriages, à savoir , pour $\phi = (\phi(i))_{i \in V}$,

$$\mu_G(\phi) = \frac{1}{Z_G} \prod_{(i,j) \in E} \mathbb{1}_{\phi(i) \neq \phi(j)} \ ,$$

où $Z_{G,k}$ est le nombre de $k$-coloriages de $G$.

**Définition 2.** *Un graphe $G$ est dit $k$-coloriable si $|Z_{G,k}| \geq 1$.*

**Proposition 1.** *La $k$-coloriablité est une notion croissante, dans le sens où, si $G'$ est un sous graphe de $G$, on a*

$$G \ k\text{-coloriable} \ \Rightarrow \ G' \ k\text{-coloriable} \ .$$

**Preuve :** Ce résultat est trivial, puisque, comme $E' \subset E$, tout $k$-coloriage de $G$ est un $k$-coloriage de $G'$. ■

Pour un graphe $G$ fixé, nous allons à présent définir une distance sur l'ensemble des $k$-coloriages de $G$.

**Définition 3.** *Soient $\phi$, $\psi$ deux coloriages de $G$, on définit*

$$d(\phi, \psi) = \sum_{i,j=1}^{k} \left( \lambda(\phi, \psi)_{i,j} - \frac{1}{k^2} \right)^2 \ ,$$

*où $\lambda(\phi, \psi)_{i,j}$ désigne la proportion de sommets de $G$ où $\phi$ vaut $i$ et $\psi$ vaut $j$. Cette quantité mesure l'indépendance de $\phi$ et $\psi$ : si $d$ est faible, la corrélation entre $\psi$ et $\phi$ est faible. On dit que $\mu_G$ est $(\varepsilon, \delta)$-sphérique, s'il existe un sous ensemble de coloriages $A$, $\mu_G(A) \geq 1 - \delta$, tel que pour tout $\phi$, $\psi \in A$, on ait*

$$d(\phi, \psi) \leq \varepsilon \ .$$

# 2 Transitions de phase

## 2.1 Transitions de phase à $k$ fixé.

Des résultats de mécanique statistique suggèrent plusieurs transitions de phase sur les $k$-coloriages lorsque l'on fait varier le paramètre $\alpha$. Les différentes phases sont ainsi définies comme suit :

**Conjecture 1.** *Il existe $0 < \alpha_d(k) < \alpha_c(k) < \alpha_s(k)$, tels que, la probabilité des évènements suivants tende vers 1 quand $n$ tend vers l'infini :*

*i) Pour $\alpha < \alpha_d(k)$, pour tout $\varepsilon$, $\delta > 0$, $\mu_G$ est $(\varepsilon, \delta)$-sphérique.*

*ii) Pour $\alpha_d(k) \leq \alpha \leq \alpha_c(k)$, il existe $C, C' > 0$ et $\varepsilon > 0$, tels que pour tout $n$, il existe une partition de $\chi_k^n = \bigsqcup_{l=1}^{N} \Omega_l^{(n)}$ en $N$ ensembles telle que pour tout $l \in \{1, ..., N\}$,*

$$\frac{\mu_G(\partial_\varepsilon \Omega_l^{(n)})}{\mu_G(\Omega_l^{(n)})} \;\leq\; e^{-Cn} \;,$$

*(où $\partial_\varepsilon \Omega_l^{(n)}$ désigne l'ensemble des points dont la distance à $\Omega_l^{(n)}$ est comprise entre 0 et $\varepsilon n$), une constante $\Sigma(\alpha) > 0$ (la complexité, où entropie, de la configuration), et une sous-famille $I_n \subset \{1, ..., N\}$ tels que*

$$\sum_{i \in I_n} \mu_G(\Omega)_i^{(n)} \;\geq\; 1 - e^{-C'n},$$

*et, $\forall i \in I_n$,*

$$e^{-n\Sigma - o(n)} \;\geq\; \mu_G(\Omega_i^{(n)}) \;\leq\; e^{-n\Sigma + o(n)} \;.$$

*iii) Pour $\alpha_c(k) < \alpha < \alpha_s(k)$, la situation est similaire à celle du ii), à part que le cardinal de la partition, $N$, est désormais sous exponentiel en $n$. Plus précisément, pour tout $\delta > 0$, il existe une variable aléatoire $N(\delta) = \lim_{n\to\infty} N_n(\delta)$ finie p.s, telle que*

$$\sum_{l \in I'_n} \mu_G(\Omega_{l,n}) \;\geq\; 1 - \delta \;,$$

*où $I'_n \subset \{1, ..., N\}$, et $card(I'_n) = N_n(\delta)$.*

*iv) Pour $\alpha_s(k) < \alpha$, le graphe $G$ est non $k$-coloriable.*

## 2.2 Transition de phase coloriable/non coloriable

**Théorème 1** (Friedgut, existence de $\alpha_s(k)$)**.** *Supposons $G$ uniformément choisi dans $\mathbb{G}(n, \alpha)$. Alors, pour tout $k \geq 3$, il existe $\alpha_s(k)$ tel que, pour tout $\delta > 0$, on ait*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G(n, (1-\delta)\alpha_s/n) \text{ est } k\text{-coloriable}) \;=\; 1$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G(n, (1+\delta)\alpha_s/n) \text{ est } k\text{-coloriable}) \;=\; 0 \;.$$

Ce théorème est en fait une application d'un autre théorème de Friedgut, donnant des conditions générales de transition de phase pour des évènements croissants, dont nous allons énoncer un corollaire intéressant maintenant :

**Théorème 2.** *Soit $d^* > d > 0$. Si*

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(G(n, d^*/n) \textit{ est } k \textit{ coloriable }) > 0 \ ,$$

*alors*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G(n, d/n) \textit{ est } k \textit{ coloriable }) = 1 \ .$$

**Preuve du théorème 2 :** Il suffit pour cela de choisir $\delta_n = (d' - d)/n$ dans le théorème 1. ■

# 3 Nombre chromatique d'un graphe aléatoire

## 3.1 Definition du nombre chromatique

**Définition 4.** *Soit $G = G(n, \alpha/n)$ un graphe d'Erdös-Renyi, on définit le nombre chromatique de $G$, noté $\chi(G)$, comme le plus petit entier $k$, tel que $G$ soit $k$-coloriable :*

$$\chi(G) = \inf\{k \in \mathbb{N},\ Z_{G,k} \neq \emptyset\} \ .$$

On ne peut pas, de manière générale, déterminer le nombre chromatique d'un graphe aléatoire. Cependant, le résultat que nous allons étudier maintenant réduit asymptotiquement l'ensemble des valeurs possibles de $\chi_G$ à un couple d'entiers successifs.

## 3.2 Les deux valeurs possibles du nombre chromatique

### 3.2.1 Théorème, les deux valeurs possibles du nombre chromatique

Un tel résultat est donné par le théorème suivant

**Théorème 3.** *Soit $d \in \mathbb{R}_+^*$, et $k_d$ le plus petit entier tel que $d < 2k \log k$. Alors*

$$\mathbb{P}\left\{\chi\left(G\left(n, d/n\right)\right) \in \{k_d, k_d + 1\}\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \ .$$

Lorsque $d$ appartient à un certain type d'intervalles, ce résultat peut être affiné pour obtenir exactement le nombre chromatique du graphe. En effet :

**Théorème 4.** *Supposons que $d \in [(2k-1)\log(k), 2k\log(k)[$. Alors,*

$$\mathbb{P}\left\{\chi\left(G\left(n, d/n\right)\right) = k + 1\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \ .$$

Nous allons démontrer les théorèmes 3 et 4 simultanément.

### 3.2.2 Reflexion initiale

A cette fin, nous allons modifier légèrement le modèle de graphes utilisés. Au lieu de considérer des Erdös-Renyi, on considère des graphes aléatoires où le nombre d'arêtes est $m = cn$. Enonçons tout de suite les deux résultats équivalents dans le cas des graphes à nombre d'arêtes fixé.

**Proposition 2.** *Posons*

$$u_k = \frac{\log(k)}{\log(k) - \log(k-1)} < \left(k - \frac{1}{2}\right) \log(k)\ .$$

*Soit alors $c > u_k$, on a*

$$\mathbb{P}(G(n, m = cn) \textit{ n'est pas } k\textit{-coloriable }) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1\ .$$

**Preuve de la proposition 2 :** Soit $Y$ le nombre de $k$-coloriages du graphe $G(n,m)$. Pour toute $k$-partition fixée, une arête quelconque est monochromatique avec une probabilité au moins $1/k$. On en déduit que le nombre de $k$-coloriages est majoré en moyenne par $k^n(1-1/k)^m$. On en déduit alors l'encadrement suivant par l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(Y > 0) \leq \mathbb{E}(Y) \leq k^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)^m\ .$$

Pour $c > u_k$, on a $k(1-1/k)^c < 1$, et donc $\mathbb{E}(Y) \to 0$. ∎

**Proposition 3.** *Posons $c_k = k\log(k)$. Pour tout $c < c_{k-1}$,*

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(G(kn, m = ckn) \textit{ est } k\textit{-coloriable }) > 0\ .$$

### 3.3 Reduction à l'étude des moments de $Z$

Nous allons faire l'étude suivante sur les coloriage $k$-réguliers, c'est à dire tels que chaque couleur apparait exactement $n/k$ fois dans le graphe. A cette fin, nous n'allons considérer que les graphes dont le nombre d'arêtes est multiple de $k$, ce qui n'est pas restrictif, pas croissance de la coloriabilité. Notons $Z$ le nombre de coloriages $k$-réguliers de $G(n, d/n)$. On a alors, en posant $\mathcal{P} = \{P = (P_i)_{i=1..k},\ \sqcup P_i = V,\ card P_i = n/k\}$

$$Z = \sum_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{1}_{\phi_P \text{ est un } k\text{-coloriage}}\ ,$$

où $\varphi_P$ vaut $i$ sur $P_i$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z > 0) > 0 &\Rightarrow \mathbb{P}(G(n, cnk) \text{ est k-coloriable régulièrement}) > 0 \\ &\Rightarrow \mathbb{P}(G(n, cnk) \text{ est k-coloriable}) > 0\ .\end{aligned}$$

**Proposition 4** (Inégalité de Paley-Zigmund)**.** *Pour toute variable aléatoire $Z \geq 0$ p.s, on a*

$$\mathbb{P}(Z > 0)\ \geq\ \frac{\mathbb{E}(Z)^2}{\mathbb{E}(Z^2)}\ .$$

## 4 Preuve de la proposition 3

### 4.1 Etude des moments, réduction à un problème d'optimisation

Finalement, afin d'obtenir le résultat souhaité, on est ramené à contrôler les moments de $Z$. Commençons par estimer l'esperance. Étant donnée une partition $k$-régulière des sommets de $G$, cette partition est un coloriage avec probabilité $(1-1/k)^m$, puisque les arêtes sont indépendantes, et que chaque arête est monochromatique avec probabilité $1/k$. Par ailleurs, le nombre de $k$-partitions régulières de $V$ est $N = n!/((n/k)!)^k$, ce dont on déduit que

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{n!}{((n/k)!)^k} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^m .$$

On peut montrer que la probabilité qu'une $k$-partition de $V$ soit un $k$-coloriage est maximale lorsque la partition est régulière, et on peut en déduire que le nombre de $k$-coloriages diffère de $Z$ d'au plus un facteur polynomial. On peut donc bien se borner à l'étude des $k$-coloriages réguliers.
Pour l'étude du moment d'ordre 2 de $Z$, on est amené à étudier la probabilité que, étant donnée une paire de partitions $k$-régulières de $V$, chaque partition soit un $k$-coloriage.

$$\mathbb{P}(\phi, \psi \text{ coloriages}) = \left(1 - \frac{2}{k} + \sum_i \sum_j \lambda_{i,j}^2\right)^m .$$

Notons $\Lambda$ l'ensemble des matrices $k \times k$, dont les coefficients sont de la forme $\lambda_{i,j} = 1/q$, avec $q \mid n$ et telles que la somme de chaque ligne et de chaque colonne vale $1/k$. Dans ces conditions, les paires $(\phi, \psi)$ de coloriages de corrélation $\lambda$ ont une proportion $\lambda_{i,j}$ de sommets de couleur $i$ par $\phi$ et $j$ par $\psi$. Pour toute matrice $\lambda \in \Lambda$, il y a $n!/\prod_{i,j}(n\lambda_{i,j})!$ paires correspondantes de partitions équilibrées. On en déduit

$$\mathbb{E}(Z^2) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{n!}{\prod_{i,j}(n\lambda_{i,j})!} \left(1 - \frac{2}{k} + \sum_{i,j} \lambda_{i,j}^2\right)^{cn} .$$

Une majoration de cette quantité est donnée par la proposition suivante, qui sera admise :

**Théorème 5.** *Pour $A \in B_k$, notons*

$$H(A) = -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_{i,j} \log a_{i,j} .$$

*Soit $\varphi : B_k \to \mathbb{R}$ une fonction sur l'ensemble des matrices doublement stochastiques, et $\beta > 0$, telle que pour tout $A \in B_k$,*

$$H(A) + \varphi(A) \leq H(J_k) + \varphi(J_k) - \beta(\|A\|_2^2 - 1) .$$

*Alors, il existe une constante $C(\beta, k) > 0$, telle que*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{n!}{\prod_{i,j}(n\lambda_{i,j})!} e^{n\varphi(k\lambda)} \leq \frac{C}{n^{k-1}} \left(k^2 e^{\varphi(J_k)}\right)^n ,$$

*où l'on a noté $J_k$ la matrice de $B_k$ dont tous les coefficients sont égaux à $1/k$.*

Ce théorème est admis dans ce travail. Posons $S_k$ l'ensemble des matrices simplement stochastiques $k \times k$. On remarque qu'il suffit de vérifier que

$$\varphi_0(A) = c \log \left(1 - \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2} \sum_{i,j} a_{i,j}^2\right)$$

vérifie bien la condition voulue, en l'occurence avec $\beta = c$. C'est une conséquence de la proposition suivante, que nous allons demontrer dans la suite de cette étude.

**Proposition 5.** *Pour tout $A \in S_k$ on a*

$$H(A) + \varphi_0(A) \leq H(J_k) + \varphi_0(J_k) .$$

## 4.2 Demonstration de la proposition 5

On va désormais démontrer que l'on a bien l'inégalité voulue. La première étape, la plus importante, consiste à majorer $H(A)$.

### *4.2.1 Majoration de H*

Posons $h(\alpha) = -\alpha/k \log(\alpha)$. On a alors

$$H(A) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} h(a_{i,j}) \; .$$

Nous allons chercher la forme des matrices $A \in B_k^r$ qui maximisent $H$, où $B_k^r$ est l'ensemble des matrices de $B_k$ de norme $\sqrt{r}$. La première étape consiste à trouver ce maximum parmi les matrices dont une seule ligne est non nulle. On s'est donc ramené à résoudre le système

$$(S) : \begin{cases} \sum_i a_i = 1 \\ \sum_i a_i^2 = r \\ \sum_i h(a_i) \text{ maximal} \end{cases}$$

**Proposition 6.** *Soit $(a_i)_{i=1..k}$ une solution de $(S)$. Alors, il existe $a > b$, deux réels tels que*

$$a = a_1 = ... = a_m > a_{m+1} = ... = a_k = b \; .$$

**Proposition 7.** *Avec les notations précédentes, on a $m = 1$.*

**Preuve de la proposition 6 :** Soit $a = (a_i)_{i=1..k}$ une solution de $(S)$, Notons $E$ l'hypersurface

$$E = \begin{cases} \sum_i a_i = 1 \\ \sum_i a_i^2 = r \end{cases}$$

L'espace tangent à $E$ en $a$ est constitué des vecteurs $(u_i)_{i=1..k}$ vérifiant

$$T = \begin{cases} \sum_i u_i = 0 \\ \sum_i a_i u_i = 0 \end{cases}$$

On admettra que pour tout vecteur tangent $u \in T$, il existe une courbe $a(t)$ dans $E$, telle que $a(0) = a$, et qui admette $u$ comme vecteur tangent en $a$. Posons $F(t) = \sum_i h(a_i(t))$ qui est localement maximale en 0. On a alors

$$\frac{dF}{dt}(0) = \sum_i h'(a_i(0)) \frac{\partial a}{\partial x_i}(0) = \sum_i h'(a_i) u_i = 0$$

Supposons désormais que le vecteur $a$ aie trois ou plus coordonnées distinctes. Alors, quitte à se restreindre à un sous espace de $\mathbb{R}^k$, on peut supposer que $a$ a exactement trois coordonnées distinctes $0 < \alpha < \beta < \gamma$, qui vérifient par ailleurs

$$\begin{cases} u_{i_1} + u_{i_2} + u_{i_3} = 0 \\ \alpha u_{i_1} + \beta u_{i_2} + \gamma u_{i_3} = 0 \\ h'(\alpha) u_{i_1} + h'(\beta) u_{i_2} + h'(\gamma) u_{i_3} = 0 \end{cases} ,$$

avec $u_{i_1}$, $u_{i_2}$, ou $u_{i_3}$, non nul. On en déduit que le déterminant du système est nul, à savoir

$$(\beta - \alpha) h'(\gamma) + (\alpha - \gamma) h'(\beta) + (\gamma - \beta) h'(\alpha) = 0 \; .$$

On en déduit

$$h'(\beta) = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha} h'(\alpha) + \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} h'(\gamma) \ .$$

C'est une égalité barycentrique, d'où la contradiction, puisque $h'$ est strictement convexe. On a donc montré que $a$ n'a que deux coordonnées non nulles. Les $a_i$ jouant des roles symétriques, on a prouvé la proposition 6. ■

**Preuve de la proposition 7 :** Soit $m$ fixé, il existe $(a_m, b_m)$ un couple solution de

$$(*) : \begin{cases} ma_m + (k-m)b_m = 1 \\ ma_m^2 + (k-m)b_m^2 = r \end{cases} ,$$

soit encore

$$\begin{cases} b_m = (1 - ma_m)/(k-m) \\ ma_m^2 + (1 - ma_m)^2/(k-m) = r \end{cases} ,$$

$a_m$ est donc racine de

$$mkX^2 - 2mX + 1 - r(k-m) \ .$$

On en déduit

$$a_m = \frac{1 + \sqrt{(k-m)(rk-1)}}{\sqrt{m}k} \quad \text{et} \quad b_m = \frac{k - \sqrt{m}\left(1 + \sqrt{(k-m)(rk-1)}\right)}{k(k-m)} \ .$$

On souhaite désormais montrer que la fonction $\phi : x \mapsto xh(a_x) + (k-x)h(b_x)$ étendue à $\mathbb{R}^+$, est décroissante. Commencons par écrire,

$$\phi'(x) = h(a_x) + xa'_x h'(a_x) - h(b_x) + (k-x)b'_x h(b_x) \ ,$$

et à remarquer que, par dérivation du système $(*)$,

$$\begin{cases} a_x - b_x + xa'_x + (k-x)b'_x = 0 \\ a_x^2 - b_x^2 + 2xa'_x a_x + 2(k-x)b'_x b_x = 0 \end{cases} ,$$

soit

$$a'_x = \frac{b_x - a_x}{2x} \quad \text{et} \quad b'_x \frac{b_x - a_x}{2(k-x)}$$

On en déduit

$$\phi'(x) = h(a_x) - h(b_x) - \frac{a_x - b_x}{2}(h'(a_x) + h'(b_x)) \ .$$

Soit $b$ fixé, on s'intéresse alors au signe de la quantité

$$\zeta(a) = h(a) - h(b) - \frac{a-b}{2}(h'(a) + h'(b)) \ .$$

On a alors

$$\zeta'(a) = \frac{a-b}{2}\left(\frac{h'(a) - h'(b)}{a-b} - h''(a)\right) \ .$$

Or, par théorème des accroissements finis, il existe $c \in [a,b]$, tel que

$$\frac{h'(a) - h'(b)}{a-b} = h''(c)$$

et comme $h''$ est croissante, $\zeta'$ est donc strictement négative. Comme $\zeta(b) = 0$, on en déduit que pour tout $a > b$, $\zeta(a) < 0$, ce qui entraine que $\phi'$ est strictement décroissante. Le maximum est donc atteint en $m = 1$ pour les entiers, le cas $m = 0$ étant simplement le cas où $a = b$. On a donc bien prouvé la proposition 7. ■

Nous allons maintenant étendre les résultats obtenus avec les matrices avec un vecteur non nul aux matrices stochatiques quelconques de $B_k$. Grâce aux résultats précédents, nous avons trouvé que, dans le cas 1-dimensionnel, que le maximum de $H$ sur les vecteurs de norme $\sqrt{r}$ est atteint en $(a_r, b_r, ..., b_r)$, avec

$$a_r = \frac{1+\sqrt{(k-1)(rk-1)}}{k} \text{ et } b_r = \frac{k-1-\sqrt{(k-1)(rk-1)}}{k(k-1)} .$$

Posons

$$\widetilde{h}(r) = \max_{\|a\|=\sqrt{r}} \left( \sum_{i=1}^{k} h(a_i) \right) = h(a_r) + (k-1)h(b_r) .$$

Le maximum de $H$ sur les matrices de norme $\sqrt{r}$ vaut donc

$$\widetilde{H}(r) = \max_{\sum r_i = r} \sum_{i=1}^{k} \widetilde{h}(r_i) .$$

On s'est donc ramenés à un problème d'optimisation, non plus sur $h$, mais sur $\widetilde{h}$. Plus précisément, on souhaite montrer le résultat suivant :

**Lemme 1.** *Pour tout k-uplet $(r_1, ..., r_k)$, on a*

$$\sum_{i=1}^{k} \widetilde{h}(r_i) \leq \max \left\{ \theta \widetilde{h}\left(\frac{1}{k}\right) + (k-\theta)\widetilde{h}(r_\theta),\ 0 \leq \theta \leq \frac{k(k-\sqrt{r})}{k-1} \right\} ,$$

*où $r_\theta$ est caractérisé par $\theta/k + (k-\theta)r_\theta = r$.*

**preuve lemme 1 :** Soit $(r_1, ..., r_k)$ qui maximise $\widetilde{H}$, avec $\sum_i r_i = r$. Si $r_i = 1$ pour tout $i$, ce n'est possible que si $r = k$. $(\theta = k)$ Dans ce cas, c'est fini. Sinon, comme $\widetilde{h}$ n'est définie que sur $[1/k, 1]$, on peut supposer qu'il existe $i$ tel que $r_i < 1$. Montrons que dans ce cas, $r_i < 1$ pour tout $i$. En effet, dans le cas contraire, on peut supposer sans perte de généralité que $r_1 = 1$ et $r_2 < 1$. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit, posons $u_\varepsilon = (1-\varepsilon, r_2+\varepsilon, r_3, ..., r_k)$. Cependant, $\frac{d}{d\varepsilon}\widetilde{H}(u_\varepsilon)\mid_{\varepsilon=0} = \infty$, ce qui contredit la maximalité de $\widetilde{H}$. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que $r_1, ..., r_m > 1/k$ pour un certain $m \leq k$, et $r_i = 1/k$ pour $i > m$. Considérons

$$\widetilde{H}_q(s_1, ..., s_q) = \sum_{i=1}^{q} \widetilde{h}(s_i) .$$

A l'évidence, $H_q$ est maximale en $r_1, ..., r_q$ sur les vecteurs de norme $\sqrt{r'} = \sqrt{r-(k-m)/k}$. Notons $E$ l'espace des vecteurs de norme $\sqrt{r'}$, l'espace tangent en $(r_1, ..., r_q)$ est caractérisé par

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} u_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{m} \widetilde{h}'(r_i)u_i = 0 \end{cases}$$

La seconde équation est vérifiée par tout vecteur vérfiant la première, on a donc une forme linéaire de noyau inclus dans le noyau d'une autre forme linéaire. L'une est donc multiple de l'autre, ce dont on déduit l'existence d'un $\lambda$ tel que, pour tout $i \in \{1, .., , m\}$, on ait $\widetilde{h}'(r_i) = \lambda$. Or, $h'$ étant strictement concave, cette équation admet au plus deux solutions. A permutation des coordonnées près, il existe un entier $0 \leq l \leq m$, et deux entiers $1/k \leq a < b \leq 1$ tels que $r_i = a$ pour $i \in \{1, ..., l\}$ et $r_i = b$ pour $i \in \{l+1, ..., m\}$. Par une méthode strictement similaire, on peut alors montrer que, pour tout $l$,

$$l\widetilde{h}(a) + (m-l)\widetilde{h}(b) \leq \max \left\{ \theta \widetilde{h}\left(\frac{1}{k}\right) + (m-\theta)\widetilde{h}\left(\frac{k\sqrt{r}-\theta}{k(k-\theta)}\right) \right\} .$$

On en déduit que

$$\widetilde{H}(r) \leq \max\left\{\theta\widetilde{h}\left(\frac{1}{k}\right) + (k-\theta)\widetilde{h}\left(\frac{k\sqrt{r}-\theta}{k(k-\theta)}\right)\right\} .$$

On a bien obtenu la majoration voulue. ■

#### *4.2.2 Preuve de la proposition 5*

Afin de montrer la proposition 5, il suffit de montrer, grâce à la majoration de $H$ précédente pour les matrices de norme $\sqrt{r}$, (puisque $\widetilde{h}(1/k) = \log(k)/k$) que

$$\frac{\theta\log(k)}{k} + (k-\theta)\widetilde{h}\left(\frac{k\sqrt{r}-\theta}{k(k-\theta)}\right) + c\log\left(1-\frac{2}{k}+\frac{\sqrt{r}}{k^2}\right) \leq \log k + 2c\log\left(1-\frac{1}{k}\right) ,$$

pour tout $0 \leq r \leq k^2$, et tout $0 \leq \theta \leq \frac{k(k-\sqrt{r})}{k-1}$, inégalité que l'on simplifie en

$$c\log\left(1+\frac{\sqrt{r}-1}{(k-1)^2}\right) \leq \left(1-\frac{\theta}{k}\right)\left(\log(k) - k\widetilde{h}\left(\frac{k\sqrt{r}-\theta}{k(k-\theta)}\right)\right) .$$

Comme $\log(1+a) \leq a$, comme $\widetilde{h}(1/k) = \log(k)/k$, il suffit de montrer que

$$\frac{c(\sqrt{r}-1)}{(k-1)^2} \leq k\left(1-\frac{\theta}{k}\right)\left(\widetilde{h}\left(\frac{1}{k}\right) - \widetilde{h}\left(\frac{1}{k}+\frac{\sqrt{r}-1}{k(1-\theta/k)}\right)\right) .$$

Définissons sur $[0, 1-1/k]$ la fonction

$$\eta(y) = k\frac{\widetilde{h}\left(\frac{1}{k}\right) - \widetilde{h}\left(\frac{1}{k}+y\right)}{y} , \text{ et } \eta(0) = k\widetilde{h}'(1/k) = k/2 .$$

La fonction ainsi définie est alors continue sur $[0, 1-1/k]$. On veut aboutir à

$$c \leq \frac{(k-1)^2}{k}\eta\left(\frac{\sqrt{r}-1}{k(1-\theta/k)}\right) . \tag{1}$$

On peut alors montrer que la dérivée de $\eta$ s'annule au plus une fois, et un calcul direct montre qu'elle s'annule effectivement en $(k-2)^2/k(k-1)$. Par conséquent, $\eta$ atteint son minimum global soit en 0, soit en $1-1/k$, soit en $(k-2)^2/k(k-1)$. Or

$$\eta\left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{k}{k-1}\log(k) , \quad \eta\left(\frac{(k-2)^2}{k(k-1)}\right) = \frac{k-1}{k-2}\log(k-1), \text{ et par définition }, \eta(0) = \frac{k}{2} .$$

La fonction $\eta$ est donc minorée par la plus petite de ces trois valeurs, à savoir

$$\frac{k-1}{k-2}\log(k-1) .$$

On en déduit que

$$\frac{(k-1)^2}{k}\eta\left(\frac{\sqrt{r}-1}{k(1-\theta/k)}\right) \geq \frac{(k-1)^3}{k(k-2)}\log(k-1) > c_{k-1} \geq c .$$

On a donc prouvé l'inégalité (1), dont découle la proposition 5. ■

### 4.3 Preuve de la proposition 3

Montrons désormais comment on déduit de la proposition 5 la condition suivante, utilisée dans le théorème 5

$$H(A) + \varphi_0(A) \leq H(J_k) + \varphi_0(J_k) - \beta(\|A\|_2^2 - 1)\ .$$

Soit $A \in B_k$, posons $g - c(A) = H(A) + \varphi_0(A)$. On a

$$g_c(J_k) - g - c(A) = g_{c_{k-1}}(J_k) - g_{c_{k-1}}(A) + (c_{k-1} - c)\log\left(1 + \frac{\|A\|_2^2 - 1}{(k-1)^2}\right) \geq (c_{k-1} - c)\frac{\|A\|_2^2 - 1}{2(k-1)^2}\ .$$

On en déduit que pour tout $c \leq c_{k-1}$,

$$g_c(A) \leq g_c(J_k) - \frac{c_{k-1} - c}{2(k-1)^2}(\|A\|_2^2 - 1)\ .$$

Il suffit alors de poser $\beta = \frac{c_{k-1} - c}{2(k-1)^2}$ pour pouvoir utiliser le théorème 5. On a donc

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z > 0) > 0,$$

c'est à dire

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(G(kn, m = ckn) \text{ est } k\text{-coloriable régulièrement}) > 0\ ,$$

ce dont on déduit

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(G(kn, m = ckn) \text{ est } k\text{-coloriable }) > 0\ .$$

La proposition 3 est donc démontrée. ■

### 4.4 Retour aux graphes de Erdös-Renyi, preuve des théorèmes 3 et 4

Nous avons désormais prouvé l'équivalent des théorèmes 3 et 4 dans le cas des graphes à nombre d'arêtes fixé, avec la correspondance $d = 2c$ (ce qui est assez intuitif, puisque un graphe de Erdös-Renyi de paramètre $d/n$ a en moyenne $dn/2$ arêtes). Nous allons maintenant étendre ces résultats aux graphes de Erdös-Renyi.

Un graphe aléatoire $G(n, m)$ peut compter des boucles (i.e. des arêtes dont les deux sommets sont identiques) ou des arêtes multiples. Si l'on note $q = q(G(n, m))$ le nombre de ces perturbations, on remarque que leur supression forme un graphe à $n$ sommets et dont l'ensemble des arêtes est choisi uniformément parmi tous les ensembles d'arêtes de taille $m - q$. Par ailleurs, notons que si $m \leq cn$ pour une certaine constante, alors avec forte probabilité, $q = o(n)$. Remarquons enfin que la répartition des ensemble des arêtes d'un graphe $G(n, p = 2c/n)$ est uniforme conditionellement à leur taille, et qu'avec forte probabilité, cette taille est dans l'intervalle $\{cn - n^{2/3}, ..., cn + n^{2/3}\}$. On remarque alors que si $A$ est une propriété croissante vérifiée avec probabilité $\theta > 0$ sur $G(n, m = cn)$, alors $A$ est vraie avec probabilité au moins $\theta - o(1)$ sur $G(n, d/n)$, et ce pour tout $d > 2c$. De même pour une propriété décroissante, et $d < 2c$. Ainsi, on déduit que $G(n, d/n)$ est avec grande probabilité non $k$-coloriable pour $d \geq (2k-1)\log(k) > 2u_k$. Il suffit donc de prouver que $G(n, d/n)$ est avec une grande probabilité $k - coloriable$ si $d < 2c_{k-1}$.Soit $n'$ le plus petit multiple de $k$ plus grand que $n$. Si $G'n', d/n')$ est $k$-coloriable avec probabilité $\theta$, alors pour tout $t \leq n'$, $G(t, d/n')$ est également $k$-coloriable avec probabilité au moins $\theta$ De plus, pour $n \leq t \leq n'$, $d/n' = (1 - o(1)d/t$. Par conséquent, si $G(kn', m = ckn'$ est k-coloriable avec probabilité asymptotiquement positive , alors $G(n, d/n)$ est $k$-coloriable avec porpbabilité asymptotiquement positive, pour tout $d < 2c$. On peut alors en déduire, grâce à la proposition 3 et au théorème 2, que G(n, d/n) est $k$-coloriable avec grande probabilité pour tout $d < 2c_{k-1}$, ce qui conclut la preuve des théorèmes 3 et 4. ■

Pour conclure ce travail, je remercie chaleureusement Omid Amini pour son investissement et ses explications, et pour son aide dans l'élaboration de cet exposé.

## *Références*


[1] Dimitris Achlioptas and Assaf Naor. The two possible values of the chromatic number of a random graph. *Ann. of Math. (2)*, 162(3) :1335–1351, 2005.

[2] Amir Dembo. Gibbs measures and phase transitions on sparse random graphs. *Braz. J. Probab. Stat.*, 24(2) :137–211.