Percolation et forme asymptotique du temps de premier passage

Clément Erignoux et Stéphane Ivanoff
sous la direction de Marie Théret

25 juin 2010

Table des matières

La percolation de premier passage est un modèle défini de la manière suivante : étant donné un graphe (en l'occurrence $\mathbb{Z}^d$), on attribue à chaque arête un temps de parcours aléatoire. Le temps nécessaire pour aller d'un point à un autre est alors celui du plus petit chemin reliant ces points. L'objet de ce mémoire est de montrer le résultat suivant : l'ensemble des points accessibles depuis l'origine en un temps t grandit soit linéairement, soit à une échelle plus rapide.
Nous allons d'abord définir le cadre mathématique du problème afin de donner un sens précis à ce résultat. Puis, dans une deuxième partie, nous nous intéresserons à l'outil principal de la démonstration, le théorème ergodique sous-additif. Nous démontrerons ensuite deux lemmes intermédiaires, avant de démontrer le théorème principal.

1 Préliminaires : cadre du problème

Nous considérons dans ce mémoire l'ensemble $\mathbb{Z}^d$ $(d \geq 2)$ muni, pour $u = (u_1, ..., u_d)$, $v = (v_1, ..., v_d)$ de la norme

$$|u| \ = \ \sum_{i=1}^{d} |u_i| \quad .$$

Définition 1. *Deux éléments u, v de $\mathbb{Z}^d$ sont dits* ***adjacents*** *si $d(u, v) = 1$.*

On munit $\mathbb{Z}^d$ de l'ensemble E des arêtes entre éléments adjacents. À chaque arête e du graphe ainsi constitué, on associe une variable aléatoire $t(e)$, interprétée comme le temps de parcours de e.

Définition 2. *Pour $u, v \in \mathbb{Z}^d$, un* ***chemin de** u **à** v* *est une suite*

$$r = (u = u_0, e_1, u_1, ..., u_{n-1}, e_n, u_n = v)$$

de sommets et d'arêtes telle que, pour tout i dans $\{0, ..., n-1\}$, u_i et u_{i+1} sont adjacents et reliés par l'arête e_{i+1}. L'entier n est alors appelé ***longueur de*** *r, notée $l(r)$, et on définit le* ***temps de parcours*** *de r par*

$$T(r) \ = \ \sum_{i=1}^{n} t(e_i) \quad .$$

Deux chemins sont dits ***disjoints*** *s'ils n'ont aucune arête en commun.*

Définition 3. *Pour $u, v \in \mathbb{Z}^d$, on appelle* ***temps de trajet entre u et v*** *la quantité*

$$T(u, v) \ = \ \inf\{\, T(r),\, r \text{ chemin de } u \text{ à } v \,\} \quad .$$

On note également $\underline{0} = (0, ..., 0)$ et $\widetilde{B}(t) = \{v \in \mathbb{Z}^d,\, T(\underline{0}, v) \leq t\,.\}$ On interprète $T(r)$ comme le temps nécessaire pour parcourir le chemin r, et $T(u, v)$ comme le temps minimal pour aller de u à v. Dans ces conditions, $\widetilde{B}(t)$ représente l'ensemble des points pouvant être atteints depuis l'origine en un temps t. On s'intéresse au comportement asymptotique de $\widetilde{B}(t)$ lorsque t tend vers l'infini . Pour simplifier cette étude, il est intéressant d'introduire l'ensemble non discret

$$B(t) = \{v + U,\, v \in \widetilde{B}(t)\},$$

où U est le cube fermé de centre $\underline{0}$ et de coté 1 : $U = \{(x_1, ..., x_d) \ \mid \ \forall i \in \{1...d\},\ |x_i| \ \leq 1/2\}$. (voir la figure 1)

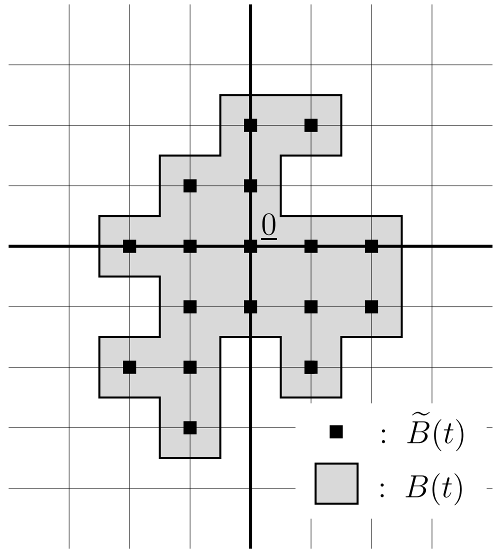

FIGURE 1 – Représentation de $B(t)$ et de $\widetilde{B}(t)$

L'objet de ce mémoire est le théorème suivant, dû à Cox et Durett :

Théorème 1. *Supposons vérifiées les trois conditions suivantes :*

i) La famille $(t(e))_{e\in E}$ est i.i.d.

ii) Les $t(e)$ sont positives ou nulles p.s.

iii) $\mathbb{E}(t(e)^2) < \infty$.

Alors, il existe un ensemble convexe non aléatoire $B_0 \subset \mathbb{R}^d$, invariant par permutation des coordonnées et par réflexion par rapport aux hyperplans de coordonnées, d'intérieur non vide, qui est soit compact, soit égal à $\mathbb{R}^d$ tout entier, et vérifiant :

– *Si B_0 est compact, alors pour tout $\eta > 0$, p.s, il existe t_η tel que, $\forall t > t_\eta$ on ait*

$$(1-\eta)B_0 \subset \frac{B(t)}{t} \subset (1+\eta)B_0 \ . \tag{1}$$

– *Si $B_0 = \mathbb{R}^d$, alors pour tout $\eta > 0$,p.s, il existe t_η tel que, $\forall t > t_\eta$ on ait*

$$\left\{x, |x| \leq \frac{1}{\eta}\right\} \subset \frac{B(t)}{t} \ . \tag{2}$$

Par ailleurs, si iii) n'est pas vérifiée, on a p.s.

$$\limsup_{v\to\infty} \frac{1}{|v|} T(\underline{0}, v) = \infty \ . \tag{3}$$

La démonstration de ce théorème repose sur la construction d'une application μ sur $\mathbb{R}^d$, initialement définie grâce au théorème ergodique sous-additif sur $\mathbb{Q}^d$, et prolongée par continuité sur $\mathbb{R}^d$. Cette application, si non identiquement nulle, est une norme, et on définira alors B_0 comme sa boule unité.

Remarque : La distinction entre les cas $B_0 = \mathbb{R}^d$ et B_0 compact se fait selon l'atome de la loi des $t(e)$ en 0. En effet, Kesten démontre, dans [3], que le cas $B_0 = \mathbb{R}^d$ correspond à $\mathbb{P}(t(e) = 0) \geq p_c(d)$, où $p_c(d)$ est le paramètre critique de percolation. Intuitivement, si l'atome en 0 est assez grand, il est possible de rejoindre des points arbitrairement éloignés en un temps nul, ce qui nous place bien dans le cas $B_0 = \mathbb{R}^d$.

2 Théorème ergodique sous-additif

Définition 4. *On dira qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires est* ***stationnaire*** *si les $(X_n)_{n\geq k}$ sont identiquement distribuées en k.*

Afin de démontrer le théorème 1, nous aurons besoin du théorème ergodique sous-additif suivant ; sa démonstration est proposée par Durrett dans [2] .

Théorème 2 (théorème ergodique sous-additif)**.** *Soit $(X_{m,n})_{0\leq m<n}$ une famille de variables aléatoires satisfaisant les conditions suivantes :*

i) (sous-additivité) $\forall\, 0<m<n$, *on a* $X_{0,n}\leq X_{0,m}+X_{m,n}$.

ii) Les suites $(X_{m,m+k})_{k\geq 1}$ sont identiquement distribuées en m.

iii) $\forall k\geq 1$, la suite $(X_{nk,(n+1)k})_{n\geq 0}$ est stationnaire.

iv) $\mathbb{E}(X_{0,1}^+)<\infty$ et, $\forall n$, $\mathbb{E}(X_{0,n})\geq \gamma_0 n$, pour $\gamma_0>-\infty$.

Alors

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_{0,n})/n \;=\; \inf\limits_m \mathbb{E}(X_{0,m})/m\equiv\gamma$.

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}X_{0,n}=X$ *existe p.s. et dans L^1, donc $\mathbb{E}(X)=\gamma$.*

2.1 Théorème ergodique de Birkhoff

La démonstration du théorème 2 utilise un théorème que nous allons maintenant énoncer et démontrer, dû à Birkhoff. On considère φ une transformation de $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ préservant la mesure, c'est à dire telle que pour tout A dans $\mathscr{F}$, on ait $\mathbb{P}(\varphi^{-1}(A))=\mathbb{P}(A)$. On notera $\mathscr{I}$ la tribu des invariants de φ, c'est à dire l'ensemble des éléments A de $\mathscr{F}$ tels que $A=\varphi^{-1}(A)$, à ensemble négligeable près.

Théorème 3 (théorème ergodique, 1ère version)**.** *Considérons un espace mesuré $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$, et φ une application préservant la mesure. Alors pour toute variable aléatoire $X\in L^1$, on a :*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X(\varphi^k\omega)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mathbb{E}(X\mid\mathscr{I})\ \textit{p.s. et dans } L^1 .$$

Lemme 1 (Lemme ergodique maximal)**.** *Soit $X_j(\omega)=X(\varphi^j\omega)$, $S_k(\omega)=X_0(\omega)+...+X_{k-1}(\omega)$, et $M_k(\omega)=\max(0,S_1(\omega),...,S_k(\omega))$. Alors*

$$\mathbb{E}(X\,\mathbb{1}_{\{M_k>0\}})\geq 0 \quad .$$

Démonstration du lemme 1. Si $j\leq k$, alors $S_j(\varphi(\omega))\leq M_k(\varphi(\omega))$, et donc, en ajoutant $X(\omega)$ de part et d'autre, on obtient

$$S_{j+1}(\omega)=X(\omega)+S_j(\varphi(\omega))\ \leq\ X(\omega)+M_k(\varphi(\omega)) \quad ,$$

ou encore

$$S_{j+1}(\omega)-M_k(\varphi(\omega))\ \leq\ X(\omega)$$

et ce pour tout $j\in\{1,...,k\}$. Or cette inégalité est encore vraie pour $j=0$, car $S_1=X$ et $M_k\geq 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{M_k>0\}}) &\geq \int_{\omega\in\{M_k>0\}}[\max(S_1(\omega),...,S_k(\omega))-M_k(\varphi\omega)]\,d\mathbb{P}(\omega)\\ &= \int_{\omega\in\{M_k>0\}}[M_k(\omega)-M_k(\varphi\omega)]\,d\mathbb{P}(\omega)\ .\end{aligned}$$

Par ailleurs, sur le domaine $\{M_k > 0\}^c$, on a $M_k(\omega) = 0$ et $M_k(\varphi\omega) \geq 0$, on a donc finalement :

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{M_k>0\}}) \geq \int [M_k(\omega) - M_k(\varphi\omega)] \, d\mathbb{P}(\omega) = 0 \quad ,$$

car φ préserve la mesure. Le lemme est donc démontré.

Démonstration du théorème 3. Commençons par remarquer le résultat suivant : pour toute variable aléatoire X, $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{I}) \circ \varphi = \mathbb{E}(X \mid \mathscr{I})$. Compte tenu de ce résultat, quitte à substituer $X' = X - \mathbb{E}(X \mid \mathscr{I})$ à X, on peut supposer $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{I}) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Notons alors $\overline{X} = \limsup S_n/n$, et $D = \{\omega : \overline{X}(\omega) > \varepsilon\}$. On souhaite montrer que $\mathbb{P}(D) = 0$. Comme $\overline{X}(\varphi\omega) = \overline{X}(\omega)$, on a $D \in \mathscr{I}$. Posons

$$\begin{aligned}
X^*(\omega) &= (X(\omega) - \varepsilon)\mathbb{1}_D(\omega) \\
S_n^*(\omega) &= X^*(\omega) + \ldots + X(\varphi^{n-1}\omega) \\
M_n^*(\omega) &= \max(0, S_1^*(\omega) \ldots S_n^*(\omega)) \\
F_n &= \{M_n^* > 0\} \\
F &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{\sup \frac{S_k^*}{k} > 0\} \, .
\end{aligned}$$

On a alors

$$F = \{\omega / \sup \frac{S_k^*}{k} > 0\} = \{\omega / (\sup \frac{S_k}{k}) \, . \, \mathbb{1}_D > \varepsilon \, . \, \mathbb{1}_D\} = \{\omega / \sup \frac{S_k}{k} > \varepsilon\} \cap D \, ,$$

car bien sûr, l'inégalité $(\sup S_k/k) \, . \, \mathbb{1}_D > \varepsilon \, . \, \mathbb{1}_D$ ne saurait être vérifiée en dehors de D, et équivaut sur D à $\sup S_k/k > \varepsilon$. Or on a évidemment $D \subset \{\sup S_k/k > \varepsilon\}$, ce qui se traduit par

$$F = D \, ,$$

et donc en particulier $F \in \mathscr{I}$. Le lemme 1 appliqué à X^* nous permet d'affirmer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X^* \mathbb{1}_{F_n}) \geq 0$. Or

$$E(|X^*|) \leq \mathbb{E}(|X| \, \mathbb{1}_D) + \mathbb{E}(\varepsilon \mathbb{1}_D) \leq \mathbb{E}(|X|) + \varepsilon < \infty \, .$$

Par théorème de convergence dominée, on a alors

$$E(X^* \mathbb{1}_{F_n}) \to E(X^* \mathbb{1}_F) \, ,$$

ce dont on déduit que $\mathbb{E}(X^* \mathbb{1}_F) \geq 0$. Comme $F = D \in \mathscr{I}$, on obtient

$$0 \leq \mathbb{E}(X^* \mathbb{1}_D) = \mathbb{E}([X - \varepsilon] \mathbb{1}_D) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathscr{I}) \mathbb{1}_D) - \varepsilon \mathbb{P}(D) = -\varepsilon \mathbb{P}(D) \, ,$$

puisque l'on a supposé $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{I}) = 0$. On a donc nécessairement

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(\{\limsup S_n/n > \varepsilon\}) = 0 \, .$$

Comme ε est arbitraire, on en déduit que, p.s, $\limsup S_n/n \leq 0$. On peut alors appliquer le même résultat à $-X$ pour obtenir que, p.s, $\liminf S_n/n \geq 0$. Finalement, on a

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = \liminf_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = 0 \quad p.s.$$

Finalement, on a prouvé que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(\varphi^k \omega) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X \mid \mathscr{I})(\omega) \quad p.s. \tag{4}$$

Il reste désormais à montrer la convergence dans L^1. Posons

$$X' = X\mathbb{1}_{|X|\leq M} \ \text{ et } \ X'' = X - X' = X\mathbb{1}_{|X|>M} \ .$$

Grâce à (4), qui est également vérifiée par X', on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X'(\varphi^k\omega) \to \mathbb{E}(X' \mid \mathscr{I})(\omega) \quad p.s.$$

Or X' est borné, donc par théorème de convergence dominée, on obtient que

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X'\circ\varphi^k - \mathbb{E}(X' \mid \mathscr{I})\right|\right) \to 0 \quad .$$

Pour ce qui est de X'', on remarque que $\mathbb{E}(Y\circ\varphi^k) = \mathbb{E}(Y)$ pour toute variable aléatoire Y, car φ préserve la mesure, d'où

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X''\circ\varphi^k\right|\right) \ \leq \ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}(\left|X''\circ\varphi^k\right|) \ = \ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}(|X''|) \ = \ \mathbb{E}(|X''|) \ ,$$

et $\mathbb{E}(|\mathbb{E}(X'' \mid \mathscr{I})|) \ \leq \ \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X''| \mid \mathscr{I})) = \mathbb{E}(|X''|)$. Alors, par inégalité triangulaire :

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X''(\varphi^k\omega) - \mathbb{E}(X'' \mid \mathscr{I})\right|\right) \ \leq \ 2\mathbb{E}(|X''|) \quad ,$$

et donc

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X(\varphi^k\omega) - \mathbb{E}(X \mid \mathscr{I})\right|\right) \ \leq \ 2\mathbb{E}(|X''|) \quad .$$

En faisant tendre M vers l'infini, on obtient, par théorème de convergence dominée, que $\mathbb{E}(|X''|)$ tend vers 0, et on a alors la convergence dans L^1. Cela achève la preuve du théorème 3.

Théorème 4 (théorème ergodique, 2nde version)**.** *Soit* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilités et soit* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite stationnaire de variables aléatoires sur cet espace, à valeurs dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*. On a alors*

$$\frac{Y_0 + ... + Y_{n-1}}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X \ \ p.s. \text{ et dans } L^1 \ ,$$

pour une certaine variable aléatoire X *vérifiant* $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y_0)$.

Il s'agit en réalité d'une interprétation du théorème ergodique dans sa première version. On va pour constater cela changer l'espace de probabilités et voir $Y_k(\omega)$ comme $Z(\varphi^k\omega)$, pour une certaine transfomation φ préservant la mesure. Posons $Y = (Y_0, Y_1, ...)$, variable aléatoire sur Ω à valeurs dans $(\mathbb{R}^\mathbb{N}, \mathscr{G})$, où $\mathscr{G}$ est la plus petite tribu rendant les applications coordonnées $p_n : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x_n$ mesurables. On a alors

$$\mathscr{G} = \sigma\left(\{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}, \ x_i \in G_i \ \forall i \in \{1...p\}\}, p \in \mathbb{N}, G_1...G_p \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right) \ .$$

Vérifions tout d'abord que Y est bien mesurable. Pour tout n, $Y \circ p_n = Y_n$ est mesurable. Posons $\mathscr{C} = \{G \in \mathscr{G}, \ Y^{-1}(G) \in \mathscr{F}\}$. Montrons que $\mathscr{C}$ est une tribu :

- $Y^{-1}(\mathbb{R}^\mathbb{N}) = \Omega \in \mathscr{F}$, donc $\mathbb{R}^\mathbb{N} \in \mathscr{C}$.
- Soit $G \in \mathscr{C}$, $Y^{-1}(G^c) = (Y^{-1}(G))^c \in \mathscr{F}$ donc $G^c \in \mathscr{C}$.
- Si $\forall n, G_n \in \mathscr{C}$, on a $Y^{-1}(\underset{n}{\cup} G_n) = \underset{n}{\cup} Y^{-1}(G_n) \in \mathscr{F}$, donc $\underset{n}{\cup} G_n \in \mathscr{C}$.

Finalement, $\mathscr{C}$ est une tribu, et comme tous les Y_i sont mesurables, elle contient les ensembles de la forme $p_n^{-1}(F),\ F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \backslash \in \mathbb{N}$, qui engendrent $\mathscr{F}$. On en déduit que $\mathscr{G} \subset \mathscr{C}$. L'autre inclusion étant triviale, on a finalement

$$\mathscr{C} = \mathscr{G}\ ,$$

et Y est donc bien mesurable. On considère alors $\mathbb{P}'$, la mesure image de $\mathbb{P}$ par Y, i.e. la mesure sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{G})$ définie par

$$\mathbb{P}'(G) = \mathbb{P}(Y^{-1}(G))\ .$$

On considère alors l'espace de probabilités $(\Omega', \mathscr{G}, \mathbb{P}')$, avec $\Omega' = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et la variable aléatoire sur cet espace

$$\begin{array}{cccc} Z & : & (\Omega', \mathscr{G}, \mathbb{P}') & \rightarrow & (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{G}) \\ & & \omega' = (\omega'_0, \omega'_1, ...) & \mapsto & (\omega'_0, \omega'_1, ...) \end{array}\ .$$

On pose Z_n les applications coordonnées de Z, qui sont bien mesurables par définition de $\mathscr{G}$. Vérifions maintenant que Z et Y ont même loi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}'(\{Z_1 \in G_1\} \cap ... \cap \{Z_p \in G_p\}) &= \mathbb{P}'(\{\omega' \in \Omega',\ \omega'_1 \in G_1, ..., \omega'_p \in G_p\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega,\ Y_1(\omega) \in G_1, ..., Y_p(\omega) \in G_p\}) \\ &= \mathbb{P}(\{Y_1 \in G_1\} \cap ... \cap \{Y_p \in G_p\})\ . \end{aligned}$$

Alors, si l'on pose $\widetilde{\mathscr{C}} = \{G \in \mathscr{G}, \mathbb{P}[Y \in G] = \mathbb{P}[Z \in G]\}$, $\widetilde{\mathscr{C}}$ est alors une classe monotone engendrant $\mathscr{G}$ et stable par intersection finie, et donc $\widetilde{\mathscr{C}} = \mathscr{G}$. Y et Z ont donc même loi.

Finalement, à $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite stationnaire de variables aléatoires, on associe la variable aléatoire Z sur $(\Omega', \mathscr{G}, \mathbb{P}')$ comme précédemment. On pose alors

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \Omega' & \rightarrow & \Omega' \\ & & (\omega'_0, \omega'_1, ...) & \mapsto & (\omega'_1, \omega'_2, ...) \end{array}\ .$$

On a alors, pour tout n, $Z_n(\omega) = Z_0(\varphi^n \omega)$. Montrons que φ préserve la mesure $\mathbb{P}'$. Soit $p \in \mathbb{N}$, $G_0, ..., G_p \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, et A l'élément de $\mathscr{G}$ défini par

$$A = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ x_0 \in G_0, ..., x_p \in G_p\}\ .$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}'(\varphi^{-1}(A)) &= \mathbb{P}[Y^{-1}(\varphi^{-1}(A))] \\ &= \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega,\ Y(\omega) \in \varphi^{-1}(A)\}]\ , \end{aligned}$$

avec

$$\varphi^{-1}(A) = \{x = (x_0, x_1, ...) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ x_1 \in G_0, ..., x_{p+1} \in G_p\}\ ,$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}'(\varphi^{-1}(A)) &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega,\ Y_1(\omega) \in G_0, ..., Y_{p+1}(\omega) \in G_p\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega,\ Y_0(\omega) \in G_0, ..., Y_p(\omega) \in G_p\}) \qquad \text{car } Y \text{ est stationnaire,} \\ &= \mathbb{P}(Y^{-1}(A)) \\ &= \mathbb{P}'(A)\ . \end{aligned}$$

Alors, en posant $\widehat{\mathscr{C}} = \{A \in \mathscr{G}, \mathbb{P}'[\varphi^{-1}(A)] = \mathbb{P}'(A)\}$, $\widehat{\mathscr{C}}$ est alors une classe monotone engendrant $\mathscr{G}$ et stable par intersection finie, et donc

$$\widehat{\mathscr{C}} = \mathscr{F}\ ,$$

donc φ préserve $\mathbb{P}'$. On peut alors appliquer le théorème de Birkhoff à φ et à Z_0, pour en déduire que

$$\frac{Z_0 + ... + Z_{n-1}}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(Z_0 \mid \mathscr{I}) \text{ p.s. et dans } L^1\ .$$

Posons alors $X' = \mathbb{E}(Z_0 \mid \mathscr{I})$, où, on le rappelle, $\mathscr{I} = \{A \in \mathscr{G} \mid \varphi^{-1}(A) = A$ aux négligeables près $\}$ et

$$\begin{array}{rcccl} X & : & (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) & \to & (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ & & \omega & \mapsto & X'(Y(\omega)) \end{array} ,$$

qui est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. On souhaite montrer que

$$\frac{Y_0 + \ldots + Y_{n-1}}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X \text{ p.s. et dans } L^1 .$$

Considérons $A' \in \mathscr{G}$, tel que $\mathbb{P}'(A') = 1$, et vérifiant

$$\forall \omega' \in A' \qquad \frac{Z_0(\omega') + \ldots + Z_{n-1}(\omega')}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X'(\omega') .$$

Alors, posons $A = Y^{-1}(A')$. On a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(Y^{-1}(A')) = \mathbb{P}'(A') = 1$. Soit $\omega \in A$, alors $Y(\omega) \in A'$, et donc

$$\frac{Z_0(Y(\omega)) + \ldots + Z_{n-1}(Y(\omega))}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X'(Y(\omega)) ,$$

c'est à dire que

$$\frac{Y_0(\omega) + \ldots + Y_{n-1}(\omega)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X(\omega) ,$$

et ce pour tout $\omega \in A$. La convergence p.s. est donc assurée. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left|\frac{Y_0(\omega) + \ldots + Y_{k-1}(\omega)}{k} - X(\omega)\right|\right) &= \int_\Omega \left|\frac{Y_0(\omega) + \ldots + Y_{k-1}(\omega)}{k} - X(\omega)\right| d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_\Omega \left|\frac{Z_0(Y(\omega)) + \ldots + Z_{k-1}(Y(\omega))}{k} - X'(Y(\omega))\right| d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_{\Omega'} \left|\frac{Z_0(\omega') + \ldots + Z_{k-1}(\omega')}{k} - X'(\omega')\right| d\mathbb{P}'(\omega') \\ &= \mathbb{E}'\left(\left|\frac{Z_0 + \ldots + Z_{k-1}}{k} - X'\right|\right) \underset{k\to\infty}{\to} 0 . \end{aligned}$$

On a donc également la convergence L^1. L'égalité des espérances est claire, ce qui achève la démonstration de la seconde version du théorème ergodique.

2.2 Démonstration du théorème ergodique sous-additif

Cette démonstration se fait en quatre étapes : La première consiste à démontrer la convergence de l'espérance. La seconde et la troisième servent respctivement à obtenir une majoration de la limsup (grâce au théorème de Birkhoff) et une minoration de la liminf (étape plus difficile). La quatrième et dernière étape sert à obtenir la convergence dans L^1.

1ère étape. Posons $a_n = \mathbb{E}(X_{0,n})$. D'après les hypothèses $i)$ et $ii)$ du théorème 2, on a

$$a_m + a_{n-m} \geq a_n . \tag{5}$$

On souhaite montrer le résultat suivant :

$$\frac{a_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf_{m\geq 1} \frac{a_m}{m} . \tag{6}$$

Notons $\gamma = \inf\limits_{m\geq 1} a_m/m$. Il est clair que $\liminf\ a_n/n \geq \gamma$. il suffit donc de montrer que

$$\limsup_{n\to\infty}\ a_n/n \leq \gamma ,$$

c'est-à-dire que pour tout $m \geq 1$, on a $\limsup a_n/n \leq a_m/m$. Soit $m \geq 1$, on écrit $n = km + l$ la division euclidienne de n par m. En utilisant (5), on obtient que

$$a_n \ \leq \ ka_m + a_l \ .$$

En divisant par $n = km + l$, on obtient alors

$$\frac{a_n}{n} \ \leq \ \left(\frac{km}{km+l}\right)\frac{a_m}{m} + \frac{a_l}{n} \ .$$

Comme m est fixé et que a_l ne prend qu'un nombre fini de valeurs ($l < m$), en faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \ &\leq \ \limsup_{n\to\infty} \left[\left(\frac{km}{km+l}\right)\frac{a_m}{m} + \frac{\max(a_0, a_1, ..., a_{m-1})}{n}\right] \\ &= \ \lim \left[\left(\frac{km}{km+l}\right)\frac{a_m}{m} + \frac{\max(a_0, a_1, ..., a_{m-1})}{n}\right] = \frac{a_m}{m} \ . \end{aligned}$$

On a donc bien prouvé (6), ce qui donne le résultat $a)$ du théorème 2.

2ème étape. On considère toujours $n = km + l$. L'hypothèse $i)$ du théorème 2 donne directement

$$X_{0,n} \leq X_{0,km} + X_{km,n} \ ,$$

d'où

$$X_{0,n} \leq X_{0,(k-1)m} + X_{(k-1)m,km} + X_{km,n} \ .$$

Finalement, par une récurrence triviale, on obtient que

$$X_{0,n} \ \leq \ \sum_{i=0}^{k-1} X_{im,(i+1)m} + X_{km,n} \ ,$$

soit, après division par $n = km + l$,

$$\frac{X_{0,n}}{n} \ \leq \ \left(\frac{k}{km+l}\right)\frac{\sum_{i=0}^{k-1} X_{im,(i+1)m}}{k} + \frac{X_{km,n}}{n} \ . \tag{7}$$

La seconde version du théorème ergodique appliquée à $(X_{km,(k+1)m})_{k\geq 0}$, qui est bien stationnaire par l'hypothèse $iii)$, garantit alors que

$$\frac{X_{0,m} + ... + X_{(k-1)m,km}}{k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} A_m \quad \text{p.s. et dans } L^1 \ ,$$

où A_m est une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(A_m) = \mathbb{E}(X_{0,m}) = a_m$. Fixons un certain l, et un $\varepsilon > 0$.

On a alors, en posant toujours $n = km + l$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_{km,km+l} > n\varepsilon) &\leq \sum_{n=m+l}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n-l,n} > n\varepsilon) \\
&= \sum_{n=m+l}^{\infty} \mathbb{P}(X_{0,l} > n\varepsilon) \text{ , grâce à la propriété } ii) \text{ du théorème 2,} \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{0,l} > n\varepsilon) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(X_{0,l} \in]k\varepsilon, (k+1)\varepsilon]) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} \mathbb{P}(X_{0,l} \in]k\varepsilon, (k+1)\varepsilon]) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \mathbb{P}(X_{0,l} \in]k\varepsilon, (k+1)\varepsilon]) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}(X_{0,l}^{+}) + 1}{\varepsilon} \; .
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}(X_{0,l}^{+}) < \infty$, on a finalement

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_{km,km+l} > n\varepsilon) \; < \; \infty \; .$$

On en déduit, par le lemme de Borel-Cantelli, que

$$\frac{X_{km,n}}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \; .$$

Mais alors, en faisant tendre n vers l'infini dans l'équation (7), on obtient que

$$\overline{X} \equiv \limsup_{n \to \infty} \frac{X_{0,n}}{n} \; \leq \; \frac{A_m}{m} \; . \tag{8}$$

En passant à l'espérance, on a alors $\mathbb{E}(\overline{X}) \; \leq \; \mathbb{E}(X_{0,m}/m)$, et donc, en passant à l'infimum en m, on obtient $\mathbb{E}(\overline{X}) \; \leq \; \gamma$.

3ème étape. Cette étape a pour but de montrer que si l'on pose $\underline{X} = \liminf_{n \to \infty} X_{0,n}/n$, on a $\mathbb{E}(\underline{X}) \; \geq \; \gamma$. Commençons par poser $\underline{X}_m = \liminf_{n \to \infty} X_{m,m+n}/n$. D'après l'hypothèse i), on a

$$X_{0,m+n} \; \leq \; X_{0,m} + X_{m,m+n} \; .$$

En divisant de part et d'autre par n, et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient que $\underline{X} \; \leq \; \underline{X}_m$ p.s. De l'hypothèse ii), on déduit que $\underline{X}$ et $\underline{X}_m$ ont même distribution, et donc finalement, on a $\underline{X} \; = \; \underline{X}_m$ p.s. Soit $\varepsilon > 0$, soit $M > 0$, posons $Z = \varepsilon + \max(\underline{X}, -M)$. On a alors

$$|Z| \leq \varepsilon + \left| \underline{X} \mathbb{1}_{\underline{X} > -M} - M \mathbb{1}_{\underline{X} \leq -M} \right| \; .$$

or, comme $\underline{X} \leq \overline{X}$, on obtient

$$-M \; \leq \; \underline{X} \mathbb{1}_{\underline{X} > -M} \; \leq \; \overline{X} \mathbb{1}_{\underline{X} > -M} \; \leq \; \overline{X} \mathbb{1}_{\overline{X} > -M} \; ,$$

d'où
$$\left|\underline{X}\mathbb{1}_{\underline{X}>-M}\right| \;\leq\; \max(M,\left|\overline{X}\right|\mathbb{1}_{\overline{X}>-M}) \;\leq\; \max(M,\overline{X})\;.$$
Or, par l'étape 2, on sait que $\mathbb{E}(\overline{X}) \leq \gamma < \infty$. Par conséquent, on a $\mathbb{E}(|Z|) < \infty$. Soit alors $Y_{m,n} = X_{m,n} - (n-m)Z$. Comme la famille de variables $Z_{m,n} = -(n-m)Z$ vérifie les hypothèses $i) - iv)$ du théorème 2, on en déduit que $Y_{m,n}$ aussi. Par ailleurs, comme
$$\underline{Y} = \liminf_{n \;\to\infty} Y_{0,n}/n = -\varepsilon + \min(0,\underline{X}+M)\;,$$
on a également
$$\underline{Y} \;\leq\; -\varepsilon\;. \tag{9}$$
Soit $T_m = \min\{n \geq 1, Y_{m,m+n} \leq 0\}$. Alors, par $ii)$, T_m a même distribution que T_0 et ce pour tout m, et donc, pour tout entier N,
$$\mathbb{E}(Y_{m,m+1}\mathbb{1}_{\{T_m>N\}}) = \mathbb{E}(Y_{0,1}\mathbb{1}_{\{T_0>N\}})\;. \tag{10}$$
De (9), on déduit que T_0 est fini p.s. Or
$$\mathbb{E}(|X_{0,1}|) \;=\; \mathbb{E}(X_{0,1}^+) + \mathbb{E}(X_{0,1}^- \;\leq\; \mathbb{E}(X_{0,1}^+) + \mathbb{E}(X_{0,1}^+) - \gamma_0 < \infty\;,$$
grâce à l'hypothèse $iv)$. Comme $|Y_{0,1}| \;\leq\; |X_{0,1}| + |Z|$, $Y_{0,1}$ est donc intégrable. Par convergence dominée, on a alors
$$\mathbb{E}(Y_{0,1}\mathbb{1}_{\{T_0>N\}}) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ p.s.}$$
On choisit alors N assez grand tel que
$$\mathbb{E}(Y_{0,1}\mathbb{1}_{\{T_0>N\}}) \;\leq\; \varepsilon\;.$$
Posons
$$S_m = T_m\mathbb{1}_{\{T_m\leq N\}} + \mathbb{1}_{\{T_m>N\}}\;,$$
et
$$\xi_m = Y_{m,m+1}\mathbb{1}_{\{T_m>N\}}\;,$$
Comme, par définition, $Y_{m,m+T_m} \leq 0$, et que, sur le domaine $\{T_m > N\}$, on a $S_m = 1$ et $Y_{m,m+1} > 0$, on en déduit que $Y_{m,m+S_m} \;\leq\; \xi_m$, et $\xi_m \;\geq\; 0$. Soit $R_0 = 0$, et pour $k \geq 1$,
$$R_k = R_{k-1} + S_{R_{k-1}}\;.$$
Soit n un entier, posons $K = \max\{k, R_k \leq n\}$. De $i)$, on déduit que
$$Y_{0,n} \;\leq\; Y_{R_0,R_1} + ... + Y_{R_{K-1},R_K} + Y_{R_K,n}\;.$$
Remarquons que $R_{K+1} \geq n$, et $S_{R_K} \leq N$, donc $n - R_K \leq N$. Alors, on a, par usage répété de $i)$,
$$Y_{R_K,n} \;\leq\; \sum_{j=1}^{N} |Y_{n-j,n-j+1}|\;.$$
Par ailleurs, pour tout i, on remarque que
$$Y_{R_i,R_{i+1}} \;\leq\; \xi_{R_i}\;.$$
En effet, si $T_{R_i} \leq N$, on a $Y_{R_i,R_{i+1}} \leq 0$ et $\xi_{R_i} = 0$, et sinon, $Y_{R_i,R_{i+1}} = \xi_{R_i} = Y_{R_i,R_i+1}$. Par conséquent, les ξ_i étant positifs, et les R_i étant inférieurs à $n-1$, on a la majoration suivante
$$Y_{R_0,R_1} + ... + Y_{R_{K-1},R_K} \;\leq\; \sum_{i=0}^{K-1} \xi_{R_i} \;\leq\; \sum_{m=0}^{n-1} \xi_m\;,$$

et on a donc finalement

$$Y_{0,n} \ \leq \ Y_{R_0,R_1} + ... + Y_{R_{K-1},R_K} + Y_{R_K,n} \ \leq \ \sum_{m=0}^{n-1} \xi_m + \sum_{j=1}^{N} |Y_{n-j,n-j+1}| \ .$$

Divisons des deux côtés par n, et passons aux espérances. On obtient :

$$\mathbb{E}(Y_{0,n}/n) \ \leq \ \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \mathbb{E}(\xi_m) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} \mathbb{E}(|Y_{n-j,n-j+1}|) \ .$$

Or l'égalité (10) garantit que, pour tout m, on a $\mathbb{E}(\xi_m) = \mathbb{E}(\xi_0)$. Par ailleurs, la propriété $ii)$ nous donne que $\sum_{j=1}^{N} \mathbb{E}(|Y_{n-j,n-j+1}|)$ est indépendant de n, et donc finalement, en passant à la limite, on obtient :

$$\limsup_{n\to\infty} \ \mathbb{E}(Y_{0,n}/n) \ \leq \ \mathbb{E}(\xi_0) \ = \ \mathbb{E}(Y_{0,1} \mathbb{1}_{\{T_0 > N\}}) \leq \varepsilon \ .$$

On a donc

$$\gamma = \limsup_{n\to\infty} \ \mathbb{E}(X_{0,n}/n) \ \leq \ \limsup_{n\to\infty} \ \left(\mathbb{E}(Y_{0,n}/n) + \frac{n-m}{n} \mathbb{E}(Z) \right) \ = \ \limsup_{n\to\infty} \ \mathbb{E}(Y_{0,n}/n) + \mathbb{E}(Z) \ ,$$

soit

$$\gamma \ \leq \ 2\varepsilon + \mathbb{E}(\max(\underline{X}, -M)) \ .$$

Comme ε et M sont arbitraires, on a bien

$$\gamma \ \leq \ \mathbb{E}(\underline{X}) \ . \tag{11}$$

Finalement, $\mathbb{E}(\overline{X} - \underline{X}) \ \leq \ 0$, avec $\overline{X} - \underline{X} \ \geq \ 0$, et donc

$$\overline{X} = \underline{X} \qquad p.s.$$

On en déduit que $\lim X_{0,n}/n$ existe p.s.

4ème étape. Il ne reste plus désormais qu'à montrer la convergence dans L^1. Posons $\Gamma_m = A_m/m$ la limite obtenue dans l'équation (8), on a alors $\mathbb{E}(\Gamma_m) = \mathbb{E}(X_{0,m}/m)$. Posons $\Gamma = \inf \Gamma_m$. Une fois remarqué que $|z| = 2z^+ - z$, on peut écrire

$$\mathbb{E}(|X_{0,n}/n - \Gamma|) \ = \ 2\mathbb{E}((X_{0,n}/n - \Gamma)^+) - \mathbb{E}(X_{0,n}/n - \Gamma) \ \leq \ 2\mathbb{E}((X_{0,n}/n - \Gamma)^+) \ ,$$

puisque $\mathbb{E}(X_{0,n}/n) \geq \gamma = \inf \mathbb{E}(\Gamma_m) \geq \mathbb{E}(\Gamma)$. Par ailleurs, puisque $(x+y)^+ \leq x^+ + y^+$, on obtient

$$\mathbb{E}((X_{0,n}/n - \Gamma)^+) \ \leq \ \mathbb{E}((X_{0,n}/n - \Gamma_m)^+) + \mathbb{E}((\Gamma_m - \Gamma)^+) \ .$$

Or $\mathbb{E}(\Gamma_m) \to \gamma$ pour m tendant vers l'infini, et $\mathbb{E}(\Gamma) = \gamma$. En effet,

$$\gamma \ = \ \inf_m \mathbb{E}(\Gamma_m) \ \geq \ \mathbb{E}(\inf_m \Gamma_m) = \mathbb{E}(\gamma) \ ,$$

et, grâce à (7), on obtient $\Gamma \geq \overline{X}$ et donc, en utilisant (11), on a finalement aussi

$$\mathbb{E}(\gamma) \ \geq \ \mathbb{E}(\overline{X}) \ \geq \ \mathbb{E}(\underline{X}) \ \geq \ \gamma \ .$$

On en déduit bien que $\mathbb{E}(\Gamma) = \gamma$, soit

$$\mathbb{E}((\Gamma_m - \Gamma)^+) = \mathbb{E}(\Gamma_m - \Gamma) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

Pour ce qui est de l'autre terme, remarquons que, en utilisant i), et en réordonnant les termes, on a

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{X_{0,n}}{n}-\Gamma_m\right)^+\right) \;\leq\; \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_{0,m}+\ldots+X_{(k-1)m,km}}{km+l}-\Gamma_m\right)^+\right]+\mathbb{E}\left(\left(\frac{X_{km,n}}{n}\right)^+\right) \;.$$

Or, grâce à la convergence L^1 du théorème de Birkhoff, le premier terme tend vers 0, grâce au théorème ergodique (théorème 4) qui nous donne

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{km}{km+l}\,\frac{X_{0,m}+\ldots+X_{(k-1)m,km}}{km}-\Gamma_m\right|\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \;.$$

Le second n'est autre que $\mathbb{E}(X^+_{0,l}/n)$, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On a donc

$$\mathbb{E}(|X_{0,n}/n-\Gamma|) \;\leq\; 2\mathbb{E}((X_{0,n}-\Gamma)^+)\to 0 \;,$$

dont on déduit la convergence dans L^1 voulue. La démonstration du théorème ergodique sous-additif est donc complète.

3 Deux lemmes intermédiaires

Rapellons que $\mathbb{Z}^d$ et $\mathbb{R}^d$ sont munis de la norme L^1. Avant de pouvoir démontrer le théorème 1 proprement dit, nous allons démontrer deux résultats intermédiaires.

Lemme 2. *On suppose que $\mathbb{E}(t(e)^2)<\infty$. Alors il existe une constante K telle que, pour tous u, v $\in \mathbb{Z}^d$ et $\lambda \geq 3d$,*

$$\mathbb{P}[T(u,v)\geq 2\,\mathbb{E}(t(e))\,(|u-v|+\lambda)] \quad\leq\quad K\,(|u-v|+\lambda)^{-2d} \quad .$$

Démonstration. Sans perte de généralité on peut supposer $u=\underline{0}$. On peut construire $2d$ chemins $(r_i)_{1\leq i\leq 2d}$ de $\underline{0}$ à v, disjoints et de longueur inférieure ou égale à $3d+|v|$ de la même manière que dans la figure 2, ci dessous : si $v=(v_1,\ldots,v_d)$, pour tout $i\in\{1,\ldots,d\}$, les chemins r_{2i-1} et r_{2i} en commençant par un pas le long de la i-ème coordonnée, respectivement dans le sens positif et négatif.

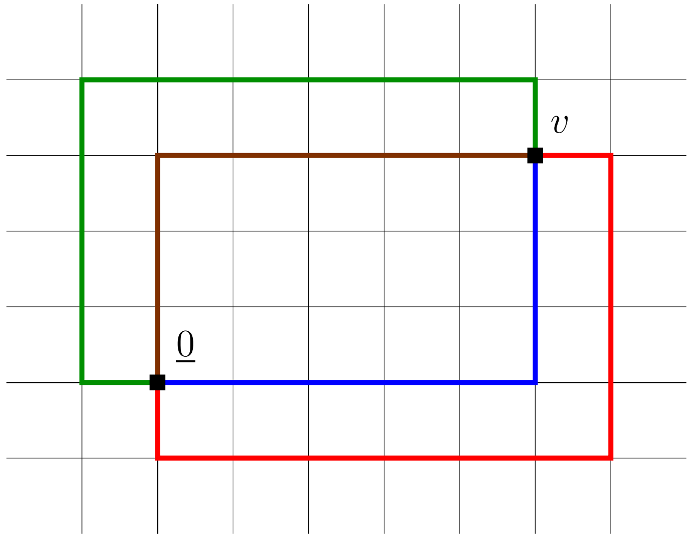

FIGURE 2 – Représentation des $2d$ chemins dans le cas $d = 2$.

Ainsi, si $T(\underline{0}, v) \geq 2\,\mathbb{E}(t(e))\,(|v| + \lambda)$, pour chaque chemin r_i, on a $T(r_i) \geq 2\,\mathbb{E}(t(e))\,(|v| + \lambda)$. Les r_i étant disjoints, leurs temps de parcours sont indépendants, et on a donc

$$\mathbb{P}[T(\underline{0}, v) \geq 2\,\mathbb{E}(t(e))\,(|v| + \lambda] \quad \leq \quad \prod_{i=1}^{2d} \mathbb{P}[T(r_i) \geq 2\,\mathbb{E}(t(e))\,(|v| + \lambda)] \quad . \tag{12}$$

Or on a

$$\mathbb{P}[T(r_i) \geq 2\,\mathbb{E}(t(e))\,(|v| + \lambda)] \ \leq \ \frac{\mathbb{E}(T(r_i)^2)}{4\mathbb{E}(t(e))^2(|v| + \lambda)^2} \quad .$$

Or $\mathbb{E}(T(r_i)^2) = l(r_i)\mathbb{E}(t(e)^2)$. Comme $l(r_i) \leq |v| + 3d \leq |v| + \lambda$, on a donc

$$\mathbb{P}[T(r_i) \geq 2\,\mathbb{E}(t(e))\,(|v| + \lambda)] \ \leq \ \frac{\mathbb{E}(t(e)^2)}{\mathbb{E}(t(e))^2(|v| + \lambda)} \quad .$$

Il ne reste qu'à revenir à (12) pour obtenir le lemme avec

$$K = \left(\frac{\mathbb{E}(t(e)^2)}{\mathbb{E}(t(e))^2}\right)^{2d} \quad .$$

Lemme 3. *On suppose que $\mathbb{E}(t(e)^2) < \infty$. Alors il existe une constante K_2 telle que, pour tout $0 < \varepsilon \leq 1/2$, on a presque sûrement, pour tout $u \in \mathbb{Z}^d$ tel que $|u|$ est suffisamment grand, pour tout $v \in \mathbb{Z}^d$ tel que $|u - v| \leq \varepsilon\,|u|$,*

$$T(u, v) \leq K_2 \varepsilon\,|u| \quad . \tag{13}$$

Démonstration. On fixe $0 < \varepsilon \leq 1/2$. Posons C_k l'ensemble des $v = (v_1, ..., v_d) \in \mathbb{Z}^d$ tels que

i) $|v| = \lfloor (1 + \varepsilon)^k \rfloor$.

ii) Pour tout $i \in \{1, ..., d - 1\}$, v_i est divisible par $\lfloor \varepsilon(1 + \varepsilon)^{k-1} \rfloor$.

On cherche tout d'abord une majoration du cardinal $|C_k|$ de C_k. Si $\lfloor \varepsilon(1+\varepsilon)^{k-1} \rfloor = 0$ alors

$$v_1 = \ldots = v_{d-1} = 0 ,$$

et comme la valeur de $|v_d|$ est imposée par les autres coordonnées, on a $|C_k| = 2$. Sinon, pour tout $i \in \{1, ..., d-1\}$, v_i peut prendre un nombre de valeurs strictement positives inférieur à

$$\frac{\lfloor (1+\varepsilon)^k \rfloor}{\lfloor \varepsilon(1+\varepsilon)^{k-1} \rfloor} \quad ,$$

donc, a fortiori, à

$$\begin{aligned} \frac{(1+\varepsilon)^k}{\lfloor \varepsilon(1+\varepsilon)^{k-1} \rfloor} &= \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)^{k-1}}{\lfloor \varepsilon(1+\varepsilon)^{k-1} \rfloor} \\ &\leq 2\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \leq \frac{3}{\varepsilon} \quad . \end{aligned}$$

Le nombre de valeurs que peut prendre chaque v_i, $i = 1, ..., d-1$, est donc inférieur à $2(3/\varepsilon) + 1 \leq 13/(2\varepsilon)$. Comme v_d peut prendre deux valeurs, puisque, à $v_1, ..., v_{d-1}$ fixés, la valeur de $|v_d|$ est fixée, et que $2 \leq 13/(2\varepsilon)$, on a donc dans tous les cas :

$$|C_k| \leq \left(\frac{13}{2\varepsilon} \right)^d \quad .$$

On pose maintenant $A_u = \{v,\ |u-v| \leq 4\, d\varepsilon(1+\varepsilon)^k\}$ et on considère l'événement

$$E_k = \{\ T(u,v) \leq K_3 \varepsilon(1+\varepsilon)^k, \text{ pour tous } u \in C_k \text{ et } v \in A_u\ \} \quad ,$$

avec $K_3 = 10\, d\mathbb{E}(t(e))$. On note E_k^C le complémentaire de E_k. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[E_k^C] &\leq \sum_{u \in C_k} \sum_{v \in A_u} \mathbb{P}[T(u,v) > K_3 \varepsilon (1+\varepsilon)^k] \\ &\leq \sum_{u \in C_k} \sum_{v \in A_u} \mathbb{P}[T(u,v) \geq 2\mathbb{E}(t(e))(|u-v| + d\varepsilon(1+\varepsilon)^k)] \quad . \end{aligned}$$

On peut donc appliquer le lemme 2, pour k suffisamment grand pour que $d\varepsilon(1+\varepsilon)^k \geq 3d$. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[E_k^C] &\leq \sum_{u \in C_k} \sum_{v \in A_u} K(|u-v| + d\varepsilon(1+\varepsilon)^k)^{-2d} \\ &\leq \left(\frac{13}{2\varepsilon} \right)^d (8d\varepsilon(1+\varepsilon)^k + 1)^d K (5d\varepsilon(1+\varepsilon)^k)^{-2d} \\ &\leq K_4 \varepsilon^{-2d} (1+\varepsilon)^{-dk} \end{aligned}$$

qui est le terme général d'une série convergente en k. On en déduit donc, par le lemme de Borel-Cantelli, qu'il existe presque sûrement un $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'événement E_k est réalisé pour tout $k \geq k_0$.

On peut supposer, quitte à prendre k_0 plus grand, que $\varepsilon(1+\varepsilon)^{k_0} \geq 1$. Montrons qu'alors, pour tout u tel que $|u| \geq (1+\varepsilon)^{k_0}$ et v tel que $|u-v| \leq \varepsilon\, |u|$,

$$T(u,v) \ \leq \ 6K_3 \varepsilon\, |u| \quad . \tag{14}$$

Pour ce faire, fixons un tel u et notons l l'entier tel que

$$\lfloor (1+\varepsilon)^l \rfloor \ \leq \ |u| \ < \ \lfloor (1+\varepsilon)^{l+1} \rfloor \quad . \tag{15}$$

Comme $|u| \ \geq\ (1+\varepsilon)^{k_0}$, on a $l \geq k_0$. Alors on peut construire un $z \in C_{l+1}$ tel que

$$\forall i \in \{1,...,d-1\}, \quad |z_i| \ \leq\ |u_i|\,, \quad |z_i - u_i| \ \leq\ \lfloor \varepsilon(1+\varepsilon)^l \rfloor \quad . \tag{16}$$

Il suffit de choisir le signe de z_i identique à celui de u_i et de faire la division euclidienne

$$|u_i| \ =\ q\lfloor \varepsilon(1+\varepsilon)^l \rfloor + r\ ,$$

en choisissant $|z_i| \ =\ q\lfloor \varepsilon(1+\varepsilon)^l \rfloor$. La valeur absolue de la dernière coordonnée $|z_d|$ est imposée par le fait que $z \in C_{l+1}$; on choisit pour signe de z_d celui de u_d. Par ailleurs, $|z_d| \geq |u_d|$, puisque $|z| > |u|$ ($z \in C_{l+1}$), et, pour $i = 1, ..., d-1$, on a $|z_i| \leq |u_i|$. On a alors, en utilisant (15) et (16) :

$$\begin{aligned}
|z_d - u_d| \ &=\ |z_d| - |u_d| \\
&\leq\ \lfloor (1+\varepsilon)^{l+1} \rfloor - \sum_{i=1}^{d-1} |z_i| - \left(\lfloor (1+\varepsilon)^l \rfloor - \sum_{i=1}^{d-1} |u_i| \right) \\
&\leq\ \sum_{i=1}^{d_1} (|u_i| - |z_i|) + \lfloor (1+\varepsilon)^{l+1} \rfloor - \lfloor (1+\varepsilon)^l \rfloor \\
&\leq\ (d-1)\lfloor \varepsilon(1+\varepsilon)^l \rfloor + \lfloor (1+\varepsilon)^l \rfloor + \lfloor \varepsilon(1+\varepsilon)^l \rfloor - \lfloor (1+\varepsilon)^l \rfloor \\
&\leq\ d\varepsilon(1+\varepsilon)^l \quad .
\end{aligned}$$

Alors, en utilisant (16) et le fait que $1 \ \leq\ \varepsilon(1+\varepsilon)^{k_0} \ \leq\ \varepsilon(1+\varepsilon)^l$, on obtient

$$|z-u| \ \leq\ (2d-1)\varepsilon(1+\varepsilon)^l \ \leq\ 2d\varepsilon(1+\varepsilon)^l \quad .$$

Comme l'événement E_{l+1} est réalisé, on a donc $T(u,z) \ \leq\ K_3\varepsilon(1+\varepsilon)^{l+1}$. De plus, si v est tel que $|u-v| \ \leq\ \varepsilon\,|u| \ \leq\ \varepsilon(1+\varepsilon)^{l+1}$ alors on a aussi

$$|v-z| \ \leq\ |v-u| + |u-z| \ \leq\ (2d+1)\varepsilon(1+\varepsilon)^{l+1}\ ,$$

d'où, de la même manière, $T(v,z) \ \leq\ K_3\varepsilon(1+\varepsilon)^{l+1}$. Enfin, on a

$$T(u,v) \ \leq\ T(u,z) + T(v,z) \ \leq\ 2K_3\varepsilon(1+\varepsilon)^{l+1} \quad .$$

Or $(1+\varepsilon)^{l+1} \ =\ (1+\varepsilon)(1+\varepsilon)^l \ \leq\ \frac{3}{2}(2\lfloor (1+\varepsilon)^l \rfloor) \ \leq\ 3\,|u|$. Ceci prouve (14) et donc le lemme, avec $K_2 = 6K_3$.

4 Démonstration du théorème 1

On construit une application $\mu : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$, qui est une norme si elle n'est pas identiquement nulle, et telle que $B_0 = \{x, \mu(x) \leq 1\}$. Pour $M \in \mathbb{Z}$, notons Ω_M l'ensemble des vecteurs $x = (x_1, ..., x_d)$ dont toutes les coordonnées sont un multiple entier de M^{-1}, soit $\Omega_M = \{x,\ Mx \in \mathbb{Z}^d\}$.

4.1 Définition de μ sur $\mathbb{Q}^d$

Soit $x \in \Omega_M$, la suite $(X_{m,n} = T(mMx, nMx))_{m<n}$ vérifie toutes les hypothèses $i)$ à $iv)$ du théorème 2. Par conséquent,

$$\frac{1}{n}X_{0,n} = \frac{1}{n}T(\underline{0}, nMx) \text{ converge p.s. et dans } L^1 \text{ vers une variable aléatoire } \nu(x) < \infty \; p.s.$$

Montrons que $\nu(x)$ est constante p.s. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur à coordonnées entières, notons $tr_{\overrightarrow{v}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$, soit A un événement sur le graphe $\mathbb{Z}^d$ invariant par translation selon $\overrightarrow{v}$, dans le sens où, en posant $A = \{\omega,\ t_\omega(e) \text{ garantissent } A\}$, et

$$tr_{\overrightarrow{v}} A = \{\omega,\ t_\omega(tr_{\overrightarrow{v}}(e)) \text{ garantissent } A\} \,,$$

on a $A = tr_{\overrightarrow{v}} A$. Montrons que dans ces conditions, on a $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des arêtes de $\mathbb{Z}^d$, on pose $\mathscr{F}_n = \sigma(t(e_0), ..., t(e_n))$ l'ensemble des événements ne dépendant que des $n+1$ premières arêtes. Considérons $\Sigma = \cup\, \mathscr{F}_n$ l'ensemble des événements ne dépendant que d'un nombre fini d'arêtes, et $\mathscr{F} = \sigma(\Sigma)$ la tribus sur le graphe. Posons

$$\mathscr{G} = \{G \in \mathscr{F},\ \exists (G_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}},\ \mathbb{P}(G\Delta G_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\} \,,$$

avec $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. On souhaite montrer que $\mathscr{G} = \mathscr{F}$.

Soit $G \in \mathscr{F}$, posons $G_n = \{\mathbb{E}(\mathbb{1}_G \mid \mathscr{F}_n) > \frac{1}{2}\}$. Par définition, $G_n \in \Sigma$. Montrons que $\mathbb{P}(G\Delta G_n) \to 0$.

$$G\Delta G_n = \left\{\mathbb{1}_G = 1 \text{ et } \mathbb{E}(\mathbb{1}_G \mid \mathscr{F}_n) \ \le\ \frac{1}{2})\right\} \cup \left\{\mathbb{1}_G = 0 \text{ et } \mathbb{E}(\mathbb{1}_G \mid \mathscr{F}_n) \ >\ \frac{1}{2})\right\} \,,$$

donc $G\Delta G_n \subset \{|\mathbb{1}_G - \mathbb{E}(\mathbb{1}_G \mid \mathscr{F}_n)| \ge \frac{1}{2}\}$. Par l'inégalité de Markov, on a donc

$$\mathbb{P}(G\Delta G_n) \ \le\ 2\mathbb{E}(|\mathbb{1}_G - \mathbb{E}(\mathbb{1}_G \mid \mathscr{F}_n)|) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \,,$$

car $(\mathbb{E}(\mathbb{1}_G \mid \mathscr{F}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale uniformément intégrable et converge donc dans L^1 vers $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_G \mid \sigma\left(\underset{n}{\cup}\mathscr{F}_n\right)\right) = \mathbb{1}_G$, car G est $\mathscr{F}-$mesurable, et $\mathscr{F} = \sigma(\underset{n}{\cup}\mathscr{F}_n)$. On a donc montré que $\mathscr{G} = \mathscr{F}$.

Considérons alors $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{\mathbb{N}} \mathscr{F}_n$ telle que $\mathbb{P}(A\Delta A_n)$ tende vers 0. Il existe $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers telle que, pour tout n, en posant $C_d = [-m_n, m_n]^d$, $\forall k \in \{0, ..., n\}$, on ait $e_k \in C_d$. Alors, en remarquant que $A\Delta(B\cap C) \subset (A\Delta B) \cup (A\Delta C)$, et que $A = tr_{3m_n\overrightarrow{v}} A$ pour tout entier m_n, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A\Delta(A_n \cap tr_{3m_n\overrightarrow{v}}(A_n))) \ &\le\ \mathbb{P}(A\Delta A_n) + \mathbb{P}(A\Delta tr_{3m_n\overrightarrow{v}}(A_n)) \\
&=\ \mathbb{P}(A\Delta A_n) + \mathbb{P}(tr_{3m_n\overrightarrow{v}}(A)\Delta tr_{3m_n\overrightarrow{v}}(A_n)) \\
&=\ \mathbb{P}(A\Delta A_n) + \mathbb{P}(tr_{3m_n\overrightarrow{v}}(A\Delta A_n)) \\
&=\ 2\mathbb{P}(A\Delta A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \,,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $\mathbb{P}(tr_{\overrightarrow{v}B}) = \mathbb{P}(B)$ pour tout évènement $B \in \mathscr{F}$, et pour tout vecteur entier $\overrightarrow{v}$, puisque le modèle est invariant par $tr_{\overrightarrow{v}}$.

Or A_n ne dépend que des arêtes de C_d, et $tr_{3m_n\overrightarrow{v}}(A_n)$ ne dépend que des arêtes de $tr_{3m_n\overrightarrow{v}}(C_d)$, avec $C_d \cap tr_{3m_n\overrightarrow{v}}(C_d) = \emptyset$. Par conséquent, ces deux événements sont indépendants, et on a donc

$$\mathbb{P}(A_n \cap tr_{3m_n\overrightarrow{v}}(A_n)) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(tr_{3m_n\overrightarrow{v}}(A_n)) = \mathbb{P}(A_n)^2 \,.$$

Or

$$\mathbb{P}(A\Delta(A_n \cap tr_{3m_n\overrightarrow{v}}(A_n))) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \,,$$

donc en particulier $\mathbb{P}(A_n \cap tr_{3m_n\overrightarrow{v}}(A_n)) = \mathbb{P}(A_n)^2$ qui tend vers $\mathbb{P}(A)^2$, et $\mathbb{P}(A_n)$ tend vers $\mathbb{P}(A)$, ce dont on déduit que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2 \ .$$

Finalement, tout événement invariant par une translation non nulle est de probabilité 0 ou 1, et plus particulièrement, toute variable aléatoire invariante par translation est constante p.s. Pour $y \in \mathbb{Z}^d$ une direction rationelle, et $\overrightarrow{v}$ le plus petit vecteur à coordonnées entières colinéaire à y (on a alors, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, $y = \underline{0} + k\overrightarrow{v}$), montrons que l'on a

$$\lim_{|y|\to\infty} \frac{T(\underline{0}, y)}{|y|} = \lim_{|y|\to\infty} \frac{T(\underline{0} + \overrightarrow{v}, y + \overrightarrow{v})}{|y|} \ .$$

Si l'on montre l'égalité des limites, on pourra bien en déduire que $\nu(x)$ est constante p.s. D'abord, par inégalité triangulaire, on a

$$\frac{T(\underline{0}, y)}{|y|} \ \leq \ \frac{T(\underline{0}, \underline{0} + \overrightarrow{v})}{|y|} + \frac{T(\underline{0} + \overrightarrow{v}, y + \overrightarrow{v})}{|y|} + \frac{T(y + \overrightarrow{v}, y)}{|y|} \ \leq \ 2\frac{T(\underline{0}, \underline{0} + \overrightarrow{v})}{|y|} + \frac{T(\underline{0}, y)}{|y|} + 2\frac{T(y + \overrightarrow{v}, y)}{|y|}$$

Or, p.s,

$$\frac{T(\underline{0}, \underline{0} + \overrightarrow{v})}{|y|} \underset{|y|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ ,$$

il ne reste donc qu'à montrer que $T(y, y + \overrightarrow{v})/\,|y|$ tend également vers 0 pour avoir l'invariance souhaitée. On a

$$\lim_{|y|\to\infty} \frac{T(y + \overrightarrow{v}, y)}{|y|} = \lim_{n\to\infty} \frac{T(\underline{0} + n\overrightarrow{v}, \underline{0} + (n+1)\overrightarrow{v})}{n\,|\overrightarrow{v}|} \ .$$

Or, (cf. figure 3) en posant r_n le chemin entre $\underline{0} + n\overrightarrow{v}$ et $\underline{0} + (n+1)\overrightarrow{v}$, de longueur $|\overrightarrow{v}|$ défini en parcourant chaque coordonnée successivement, on a alors

$$0 \ \leq \ \frac{T(\underline{0} + n\overrightarrow{v}, \underline{0} + (n+1)\overrightarrow{v})}{n\,|\overrightarrow{v}|} \ \leq \ \frac{T(r_n)}{n\,|\overrightarrow{v}|} \ .$$

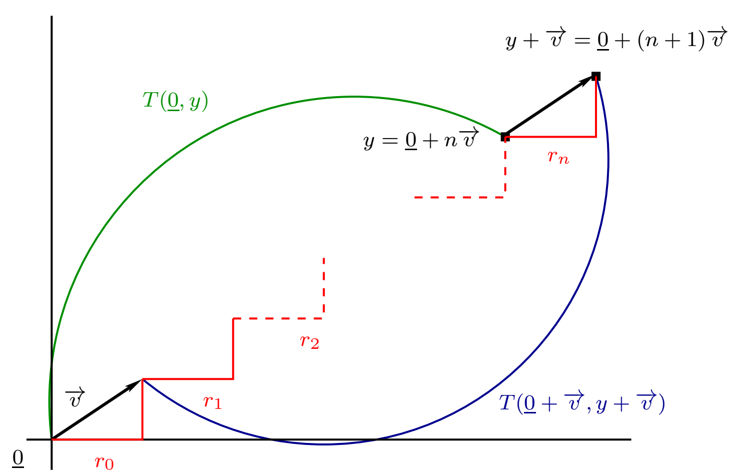

FIGURE 3 – Représentation des $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Par ailleurs, on remarque que

$$\begin{aligned}
\frac{T(r_n)}{n\,|\overrightarrow{v}|} &= \frac{T(r_0 \cup r_1 \cup ... \cup r_{n-1} \cup r_n) - T(r_0 \cup r_1 \cup ... \cup r_{n-1})}{(n+1)\,|\overrightarrow{v}|} \\
&= \frac{T(r_0 \cup r_1 \cup ... \cup r_{n-1} \cup r_n)}{(n+1)\,|\overrightarrow{v}|} - \left(\frac{n\,|\overrightarrow{v}|}{(n+1)\,|\overrightarrow{v}|}\right) \frac{T(r_0 \cup r_1 \cup ... \cup r_{n-1})}{n\,|\overrightarrow{v}|}
\end{aligned}$$

Or, par loi des grands nombres, et indépendance des $(t(e))_{e\in E}$ les deux quantités dans la partie droite tendent vers $\mathbb{E}(t(e))$ quand n tend vers l'infini, puisque $T(r_0 \cup r_1 \cup ... \cup r_{n-1} \cup r_n)$ est une somme de $(n+1)\,|\overrightarrow{v}|$ variables aléatoires $t(e_j)$. Par conséquent, on obtient finalement bien la convergence voulue, à savoir

$$\frac{T(\underline{0}+n\overrightarrow{v},\underline{0}+(n+1)\overrightarrow{v})}{n\,|\overrightarrow{v}|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

On en déduit immédiatement que $\nu(x)$ est constante p.s pour tout x. On pose alors :

$$\mu(x) = \frac{1}{M}\nu(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nM} T(\underline{0}, nMx) < \infty \quad p.s. \tag{17}$$

Cette formule définit bien μ de manière unique, car si $x \in \Omega_M \cap \Omega_N$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nM} T(\underline{0}, nMx) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nNM} T(\underline{0}, nNMx) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nN} T(\underline{0}, nNx)\,.$$

On peut alors voir que l'application μ ainsi définie est $\mathbb{Q}_+$-homogène sur $\Omega = \underset{M\geq 1}{\cup} \Omega_M$. En effet, si $x \in \Omega_M$, $r = a/b \in \mathbb{Q}_+$, avec $a, b > 0$ on a $rx \in \Omega_{Mb}$ et

$$\begin{aligned}
\mu(rx) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nMb} T(\underline{0}, nMbrx) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nMb} T(\underline{0}, nMax) \\
&= \frac{1}{b} \lim_{n\to\infty} \frac{a}{nMa} T(\underline{0}, nMax) \\
&= \frac{a}{b} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nM} T(\underline{0}, nMx) \\
&= r\mu(x)\,.
\end{aligned}$$

Remarquons enfin que $\Omega = \mathbb{Q}^d$; $\Omega \subset \mathbb{Q}^d$ est clair. Réciproquement, soit $x = (a_1/b_1, ..., a_d/b_d) \in \mathbb{Q}^d$. En posant $M = PPCM(b_1, ..., b_d)$, on a bien $Mx \in \mathbb{Z}^d$, i.e. $x \in \Omega_M$ ce qui donne l'inclusion inverse.

4.2 Prolongement de μ à $\mathbb{R}^d$, définition de B_0

On souhaite désormais montrer que μ est continue sur $\mathbb{Q}^d$, et que l'on peut la prolonger par continuité à $\mathbb{R}^d$. Montrons que μ vérifie l'inégalité triangulaire : remarquons d'abord que si $x \in \Omega_M$ et $y \in \Omega_N$, alors $x - y \in \Omega_{MN}$, et

$$\begin{aligned}
\mu(y) - \mu(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nN} T(\underline{0}, nNy) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nM} T(\underline{0}, nMx) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nMN} (T(\underline{0}, nMNy) - T(\underline{0}, nMNx))\,.
\end{aligned}$$

Or $T(\underline{0}, nNMy) \leq T(\underline{0}, nNMx) + T(nNMx, nNMy)$, et $T(nNMx, nNMy)$ a même distribution que $T(\underline{0}, nNM(y-x))$, ce dont on déduit que

$$\mu(y) - \mu(x) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nMN} T(nNMx, nNMy) = \mu(y-x)\,.$$

L'application μ vérifie donc bien l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{Q}^d$. Par ailleurs, le problème entier étant invariant par permutation des coordonnées et par réflexion par rapport aux hyperplans de coordonnées, pour toute permutation $\sigma \in S_d$, on a :

$$\mu((\pm x_{\sigma(1)}, ..., \pm x_{\sigma(d)})) = \mu((x_1, ..., x_d))\,. \tag{18}$$

Comme

$$\mu((x_1,...,x_d)) \le \sum_{i=1}^{d} \mu((0,...,0,x_i,0,...,0))\,, \tag{19}$$

on obtient, en posant $\widetilde{\mu} = \mu(1,0,...,0)$

$$\mu((x_1,...,x_d)) \le \widetilde{\mu} \sum_{i=1}^{d} |x_i|\,. \tag{20}$$

L'application μ est donc bien continue sur $\mathbb{Q}^d$, car

$$|\mu(y) - \mu(x)| \le \mu(y-x) \le \widetilde{\mu}\,|y-x|\ . \tag{21}$$

On peut donc, par un argument de continuité, prolonger μ sur $\mathbb{R}^d$ tout entier en posant, pour $z \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$

$$\mu(z) = \lim_{n\to\infty} \mu(x_n)\,,$$

où $(x_n)_{n\ge 0}$ est une suite de $\mathbb{Q}^d$ convergeant vers z. La fonction μ ainsi définie vérifie encore (18)-(21), et est $\mathbb{R}_+$-homogène (par continuité, puisque $\mathbb{Q}_+$-homogène) .

On souhaite enfin démontrer que s'il existe $x \ne \underline{0}$ tel que $\mu(x) = 0$, alors μ est identiquement nulle. Soit un tel x non nul. On peut alors supposer, sans perdre de généralité, que $x_1 \ne 0$. Alors, en vertu de (18) et (21), on a

$$2\,|x_1|\,\widetilde{\mu} = \mu((2x_1,0,...,0)) \le \mu((x_1,...,x_d)) + \mu((x_1,-x_2,...,-x_d)) = 2\mu(x) = 0\,.$$

Donc $\widetilde{\mu} = 0$, ce qui, par (20), garantit $\mu \equiv 0$. Finalement, soit $\widetilde{\mu} = 0$, auquel cas μ est identiquement nulle, soit $\widetilde{\mu} > 0$, ce qui, grâce aux propriétés précédentes, fait de μ une norme.

Comme annoncé, on définit alors $B_0 = \{x \in \mathbb{R}^d,\ \mu(x) \le 1\}$. Cet ensemble est bien compact d'intérieur non vide si $\widetilde{\mu} > 0$, en tant que boule unité d'une norme en dimension finie. Par ailleurs, l'homogénéité et la propriété (21) garantissent que B_0 est convexe :

$$\forall t \in [0,1], \quad \mu(tx + (1-t)y) \le \mu(tx) + \mu((1-t)y) = t\mu(x) + (1-t)\mu(y) \le 1 \text{ si tant est que } x, y \in B_0\,.$$

Par ailleurs, si $\widetilde{\mu} = 0$, on a trivialement $B_0 = \mathbb{R}^d$.

Grâce aux propriétés de μ, B_0 est bien invariant par permutation des coordonnées et réflexion par rapport aux hyperplans de coordonnées. Il ne reste donc plus qu'à montrer les propriétés (1)-(3).

4.3 Propriétés de la forme asymptotique B_0

Montrons tout d'abord que, $\forall \varepsilon > 0$, on a p.s, pour $y \in \mathbb{Z}^d$ assez grand :

$$\mu(y) - \varepsilon\,|y| \le T(\underline{0}, y) \le \mu(y) + \varepsilon\,|y|\ . \tag{22}$$

Commençons par remarquer que, presque sûrement, la relation limite (17) et l'événement décrit dans le lemme 3 sont réalisés respectivement pour tout $x \in \mathbb{Q}^d$ et tout ε de la forme m^{-1}, m entier ≥ 2. Montrons que ces deux réalisations garantissent (22) . Sinon, on pourrait trouver ε dans $]0,1/2[$ et une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$ telle que $|y_n| \to \infty$ et, pour tout n, $(y_n,\, \varepsilon)$ ne vérifie pas (22). On aurait alors, pour tout n assez grand,

$$|T(\underline{0}, y_n) - \mu(y_n)| > \varepsilon\,|y_n|\ . \tag{23}$$

Comme, pour tout n, $y_n/|y_n|$ est dans le cercle unité qui est compact, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer $y_n/|y_n| \to z$, pour un certain z de module 1. Par ailleurs, on serait capable, pour $m > (K_2+2)\varepsilon^{-1}$, de trouver un M assez grand tel qu'il existe $z' \in \Omega_M$, une approximation de z dans Ω_M vérifiant, pour tout n assez grand :

$$\left| y_n - \left\lfloor \frac{|y_n|}{M} \right\rfloor Mz' \right| \leq \frac{1}{m} |y_n| \quad \text{ et } \quad \left| \mu\left(\frac{y_n}{|y_n|}\right) - \mu(z') \right| \leq \frac{1}{m} .$$

Or, pour n assez grand, on a :

$$\left| T(\underline{0}, y_n) - T\left(\underline{0}, \left\lfloor \frac{|y_n|}{M} \right\rfloor Mz'\right) \right| \leq T\left(y_n, \left\lfloor \frac{|y_n|}{M} \right\rfloor Mz'\right) \leq K_2 \frac{|y_n|}{m} ,$$

grâce au lemme 3. Par ailleurs, par définition de $\mu(z')$, on a également pour n assez grand l'inégalité

$$\left| \frac{1}{|y_n|} T\left(\underline{0}, \left\lfloor \frac{|y_n|}{M} \right\rfloor Mz'\right) - \mu(z') \right| \leq \frac{1}{m} .$$

On en déduit, par inégalité triangulaire, grâce aux trois inégalités précédentes, que

$$\left| \frac{1}{|y_n|} T(\underline{0}, y_n) - \mu\left(\frac{y_n}{|y_n|}\right) \right| \leq \frac{K_2}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \leq \frac{K_2+2}{m} < \varepsilon ,$$

d'où la contradiction avec (23). Par conséquent, on en déduit bien que (22) est réalisée p.s. Posons

$$A = \left\{ \omega,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \text{(22) est réalisée pour } \varepsilon = \frac{1}{p} \right\} .$$

On a alors $A = \underset{p\in\mathbb{N}}{\cup} A_p$, avec

$$A_p = \left\{ \omega,\ \text{(22) est réalisée pour } \varepsilon = \frac{1}{p} \right\} .$$

Or, par ce qui précède, on a, pour tout p, $\mathbb{P}(A_p) = 1$, et donc $\mathbb{P}(A) = 1$.

Traitons tout d'abord le cas $\widetilde{\mu} > 0$. On va montrer que, pour tout $\eta > 0$, il existe t_η, tel que pour tout $t \geq t_\eta$, on ait

$$(1-\eta)B_0 \subset \frac{B_t}{t} \subset (1+\eta)B_0 .$$

Soit η fixé, $\omega \in A$, on souhaite montrer l'existence de t_η. Supposons qu'il n'en existe pas. Il existe alors une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tendant vers l'infini, telle que, pour tout n, on ait soit

$$\exists x_n \in (1-\eta)B_0,\ x_n \notin \frac{B(t_n)}{t_n} \tag{24}$$

soit

$$\exists x_n \in \frac{B(t_n)}{t_n},\ x_n \notin (1+\eta)B_0 . \tag{25}$$

Par conséquent, quitte à extraire une sous-suite, soit il existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (24) pour tout n, soit il existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (25) pour tout n.

Supposons (24) : il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in ((1-\eta)B_0)^{\mathbb{N}}$, telle que, pour tout n, $t_n x_n \notin B_{t_n}$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain x, puisque $(1-\eta)B_0$ est compact. Choisissons $y_n \in \mathbb{Z}^d$ tel que $t_n x_n \in y_n + U$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste bornée :

sinon, quitte à extraire une sous-suite, on aurait $t_n |x_n| \to \infty$. En particulier, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifierait (22) pour tout $\varepsilon = 1/m$ à partir d'un certain rang (dépendant de ε), et donc

$$\frac{\mu(y_n) - \varepsilon |y_n|}{t_n} \leq \frac{T(\underline{0}, y_n)}{t_n} \leq \frac{\mu(y_n) + \varepsilon |y_n|}{t_n} .$$

Or $|y_n - t_n x_n| \leq 1/\sqrt{2}$, et donc

$$\frac{y_n}{t_n} - x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{, soit} \qquad \frac{y_n}{t_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x .$$

Par homogénéité et continuité de μ, et par théorème des gendarmes, on obtiendrait alors, ε étant arbitrairement petit,

$$\frac{T(\underline{0}, y_n)}{t_n} \to \mu(x) < 1 - \eta$$

En particulier, à partir d'un certain rang, $y_n \in \widetilde{B}_{t_n}$, ou encore, par définition de y_n, on aurait $t_n x_n \in B_{t_n}$, à partir de ce rang, ce qui contredirait l'hypothèse $t_n x_n \notin B_{t_n}$ pour tout n. Par conséquent, $(t_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste bornée. Mais alors, à extraction près, $(t_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire à partir d'un certain rang n_0 et égale à $y \in \mathbb{Z}^d$. Mais alors, pour tout $n \geq n_0$, on a $y \notin \widetilde{B}_{t_n}$, car sinon, on aurait $x_n t_n \in B_{t_n}$. Par conséquent, comme t_n tend vers l'infini, on en déduit que $T(\underline{0}, y) = \infty$, ce qui est impossible. On ne peut donc pas avoir (24) pour une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers l'infini.

Supposons maintenant (25) : il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{\mathbb{N}} B_{t_n}/t_n$, telle que, pour tout n, $x_n \notin (1+\eta)B_0$, i.e. pour tout n, $\mu(x_n) > 1 + \eta$. Remarquons d'abord que, nécessairement $t_n |x_n|$ tend vers l'infini : en effet, on aurait sinon, à extraction près, $(t_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Or t_n tend vers l'infini, et donc x_n tendrait vers 0, et donc $\mu(x_n)$ tendrait également vers 0, ce qui contredirait l'hypothèse. On a donc bien $t_n |x_n|$ qui tend vers l'infini. Comme précedemment, considérons $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de $(t_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{Z}^d$ (i.e. $t_n x_n \in y_n + U$). Soit $\varepsilon = 1/p > 0$. On a alors $|y_n|$ qui tend vers l'infini, et on a donc (22) pour ε à partir d'un certain rang. Cela se traduit par :

$$\frac{\mu(y_n)}{t_n} \leq \frac{T(\underline{0}, y_n)}{t_n} + \varepsilon \frac{|y_n|}{t_n} ,$$

avec, par définition de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $T(\underline{0}, y_n)/t_n \leq 1$. Supposons alors que $(y_n/t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, c'est à dire, à extraction près, que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain x. La dernière équation donnerait alors

$$\mu(x) \ \leq \ 1 + \varepsilon |x| \ .$$

Comme on peut choisir ε arbitrairement petit, on aurait alors

$$\mu(x) \ \leq \ 1 ,$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $x_n \notin (1+\eta)B_0$ pour tout n, par continuité de μ. Finalement, quitte à extraire une sous-suite, $|x_n| \to \infty$, ie

$$\frac{|y_n|}{t_n} \to \infty .$$

Alors, soit z la limite (une nouvelle fois, à extraction près) de $(y_n/|y_n|)_{n\in\infty}$. Comme μ est une norme, et z non nul, on a $\mu(z) > 0$. Soit alors $0 < \varepsilon = 1/p < \mu(z)$. Utilisons une nouvelle fois l'équation (22) :

$$\frac{\mu(y_n) - \varepsilon |y_n|}{t_n} \leq \frac{T(\underline{0}, y_n)}{t_n} \leq \frac{\mu(y_n) + \varepsilon |y_n|}{t_n} ,$$

soit, en particulier,

$$\mu\left(\frac{y_n}{|y_n|}\right) \frac{|y_n|}{t_n} - \varepsilon \frac{|y_n|}{t_n} \leq \frac{T(\underline{0}, y_n)}{t_n} ,$$

ou encore

$$\left(\mu\left(\frac{y_n}{|y_n|}\right)-\varepsilon\right)\frac{|y_n|}{t_n}\leq\frac{T(\underline{0},y_n)}{t_n}\ .$$

Or

$$\left(\mu\left(\frac{y_n}{|y_n|}\right)-\varepsilon\right)\to\mu(z)-\varepsilon>0\ ,$$

et donc le membre de gauche tend vers l'infini. On en déduit que

$$\frac{T(\underline{0},y_n)}{t_n}\to\infty\ .$$

En particulier, $T(\underline{0},y_n)>t_n$ à partir d'un certain rang. On a donc $y_n\notin\widetilde{B}_{t_n}$ et donc $x_n\notin B_{t_n}/t_n$, ce qui contredit l'hypothèse initiale. On ne peut donc pas avoir (25) pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers l'infini. Finalement, dans le cas $\widetilde{\mu}>0$, pour tout $\eta>0$ on peut presque sûrement trouver un t_η tel que , $\forall t\geq t_\eta$,

$$(1-\eta)B_0\subset\frac{B_t}{t}\subset(1+\eta)B_0\ .$$

Traitons à présent le cas $\widetilde{\mu}=0$. Soit $\eta>0$, supposons à nouveau qu'il existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers l'infini telle qu'il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout n, $|x_n|\leq 1/\eta$ et $t_nx_n\notin B_{t_n}$. Quitte à extraire une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut supposer qu'elle converge vers un certain x. Considérons comme précédemment, pour tout n, y_n tel que $t_nx_n\in y_n+U$. Supposons que $(t_nx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste bornée. Alors, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(t_nx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Mais alors, on peut également supposer $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, et donc stationnaire à partir d'un rang n_0. Comme $t_nx_n\notin B_{t_n}$ implique $y_n\notin\widetilde{B}_{t_n}$, on a, pour tout $n\geq n_0$, $y\notin\widetilde{B}_{t_n}$, et donc $T(\underline{0},y)=\infty$, ce qui est impossible. Par conséquent, $(t_nx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée. A extraction d'une sous-suite près, on a alors $t_n|x_n|\to\infty$, et donc $|y_n|\to\infty$. Soit $\varepsilon=1/p>0$, on peut alors, à partir d'un certain rang, appliquer l'inégalité (22) pour ce ε à y_n. On a donc

$$\mu\left(\frac{y_n}{t_n}\right)-\varepsilon\frac{|y_n|}{t_n}\leq\frac{T(\underline{0},y_n)}{t_n}\leq\mu\left(\frac{y_n}{t_n}\right)+\varepsilon\frac{|y_n|}{t_n}\ .$$

Or y_n/t_n tend vers x, et $\mu\equiv 0$ puisque $\widetilde{\mu}=0$, on obtient donc, ε étant arbitrairement petit, en passant à la limite :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T(\underline{0},y_n)}{t_n}=0\ .$$

En particulier, à partir d'un certain rang, on a

$$\frac{T(\underline{0},y_n)}{t_n}<1\ ,$$

et donc $y_n\in\widetilde{B}_{t_n}$ à partir d'un certain rang, soit $t_nx_n\in B_{t_n}$ à partir d'un certain rang, ce qui contredit l'hypothèse initiale. Finalement, on peut toujours trouver t_η vérifiant les conditions voulues. La démonstration du théorème 1 est donc complète.

Remarque : Ce théorème reste vrai si l'on remplace l'hypothèse (iii) par celle, plus faible :

$$\mathbb{E}(\min\{t_1^d,...,t_{2d}^d\})<\infty$$

avec $t_1...t_{2d}$ des variables aléatoires de même fonction de répartition que les $t(e)$.

Le théorème 1, et en particulier l'équation (22), donnent un encadrement asymptotique assez fin du temps de premier passage. Notamment, en plus de la convergence p.s, on peut également en déduire la convergence de $\mathbb{E}(T(\underline{0}, ty)/t)$ vers $\mu(y)$, t tendant vers l'infini. Dans le cas où μ est une norme, L'espérance a donc radialement un comportement asymptotique linéaire. Cependant, nombre de résultats de ce domaine restent non résolus. En particulier, le comportement asymptotique des variances n'est pas déterminé précisément. Benjamini, Kalai, et Schramm, ont réussi à démontrer dans [1] que cette variance est sous-linéaire, c'est-à-dire que $Var(T(\underline{0}, y)) = o(|y|)$. En réalité, on conjecture que $Var(T(\underline{0}, y))$ est équivalent à $|y|^{2/3}$ quand $|y|$ tend vers l'infini, mais ce résultat n'a pas encore été démontré à ce jour.

Pour conclure, nous remercions chaleureusement Marie Théret pour son investissement tant dans la composition que dans la rédaction de ce mémoire, et pour le temps qu'elle a passé à en corriger ses versions sucessives.

Références

[1] Itai Benjamini, Gil Kalai, and Oded Schramm. First passage percolation has sublinear distance variance. *Ann. Probab.*, 31(4) :1970–1978, 2003.

[2] Richard Durrett. *Probability : theory and examples.* Duxbury Press, Belmont, CA, second edition, 1996.

[3] Harry Kesten. Aspects of first passage percolation. In *École d'été de probabilités de Saint-Flour, XIV—1984*, volume 1180 of *Lecture Notes in Math.*, pages 125–264. Springer, Berlin, 1986.