Fiche résumée du cours d'Analyse fonctionnelle

1 Espaces vectoriels topologiques localement convexes

1.1 Definitions premières

Définition 1.1 (espace vectoriel topologique) *On appelle **espace vectoriel topologique** un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'une topologie rendant continues*

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \quad et \quad \begin{array}{ccc} E\times \mathbb{R} & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda.x \end{array} .$$

Définition 1.2 (Semi-norme) *Soit E un $\mathbb{R}$-ev, on appelle **semi-norme** sur E toute application $p : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant*

i) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$, $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{R}\times E$.

ii) $p(x + y) \le p(x) + p(y)$.

*Soit P une famille de semi-normes, elle est dite **séparante** si $p(x) = 0 \forall p \in P \;\Rightarrow\; x = 0$.*

Définition 1.3 (espace vectoriel topologique localement convexe) *On appelle espace vectoriel topologique localement convexe tout espace vectoriel topologique dans lequel tout point possède un système fondamental de voisinages formé d'ensembles convexes.*

Définition 1.4 (Topologie d'espace vectoriel topologique localement convexe) *La topologie d'espace vectoriel topologique localement convexe associée à la famille de semi-normes $P = (p_i)_{i\in I}$ sur E $\mathbb{R}$-espace vectoriel est celle dont les ouverts sont les $U \subset E$ tels que, $\forall x \in E$, $\exists J$ fini inclus dans I, $\exists r > 0$ tel que $B_J(x, r) \subset U$, où l'on a défini*

$$B_J(x, r) = \{y \in E,\ p_i(x - y) < r\ \forall i \in J\} .$$

Lemme 1.1 *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe de topologie τ definie par une famille P de semi normes, et soit q une semi norme sur E, alors q est continue si et seulement si il existe $C \ge 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, et $p_1, ..., p_k \in P$ telles que*

$$q \le C \sup_{i=1,\dots,k} p_i .$$

Théorème 1.1 *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe , il existe une famille de semi-normes P sur E qui définit la topologie d'espace vectoriel topologique localement convexe de E ; E est en outre séparé si la famille est séparante.*

Théorème 1.2 *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé dont la topologie est associée à la famille dénombrable séparante de semi-normes $P = \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, la distance*

$$d(x, y) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \inf(p_n(y - x), 1)$$

est invariante par translation et métrise la topologie de E.

Définition 1.5 (Fréchet) *On appelle **espace de Fréchet** tout espace vectoriel topologique localement convexe séparé métrisable par une distance invariante par translation et qui le rend complet. Cette édfinition équivaut à dire que sa topologie peut être définie par une famille dénombrable séparante de semi-normes.*

1.2 Notions séquentielles / Notions topologiques

Définition 1.6 (Convergence) *E espace vectoriel topologique , $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, $x \in E$, on dit que (x_n) **converge** vers x, noté $x_n \rightharpoonup x$, si pour tout voisinage U de 0, $\exists n_0$, $\forall n \ge n_0$, $x_n - x \in U$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est de cauchy** si pour tout voisinage U de 0, il existe n_0, $\forall n, m \ge n_0$, on ait $x_n - x_m \in U$. E est dit complet si toute suite de cauchy converge.*

Définition 1.7 (Bornitude) *E espace vectoriel topologique , $B \subset E$ est dite bornée si $\forall U$ voisinage de 0, $\exists \lambda > 0$, $B \subset \lambda U$.*

1.3 Applications linéaires continues

Lemme 1.2 *Soient E, F deux espace vectoriel topologique localement convexe de topologies respectivement associées aux familles de semi-normes P et Q, $T : E \to F$ linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) T est continue.

ii) T est continue en 0.

iii) $\forall q \in Q$, $\exists C$, $\exists k, p_1, ..., p_k \in P^k$ tels que

$$q \circ T \leq C \max_{i=1...k} p_i \text{ sur } E \, .$$

Définition 1.8 (Opérateur linéaire borné) *Soient E, F deux espace vectoriel topologique , $T : E \to F$ linéaire T est un **opérateur borné** si $T(B)$ est borné dans dans F pour tout B borné de E.*

Lemme 1.3 *Soient E, F deux espace vectoriel topologique , $T : E \to F$ linéaire. On a alors*

$$T \text{ continue} \implies T \text{ sequentiellement continue} \implies T \text{ borné.}$$

Cf : Lemme de Schur

Théorème 1.3 (Banach Steinhauss, principle of uniform boundedness) *E un Fréchet de topologie définie par P, F espace vectoriel topologique localement convexe , $(T_i)_{i \in I} \in L_c(E, F)^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall q \in Q$, $\forall x \in E$, on ait $\sup_i q(T_i(x)) < \infty$. Alors, $\forall q \in Q$, $\exists C \geq 0$, $\exists k, p_1, ..., p_k \in P^k$ tel que $\forall x \in E, \forall i \in I$,*

$$q \circ T_i(x) \leq C \max_{j=1...k} p_j(x) \, .$$

Lemme 1.4 *Soit E un espace vectoriel topologique , $f \in E^*$. On a alors f continue $\implies \ker f$ est fermé.*

Définition 1.9 (Topologie forte, faible-$*$) *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé , E' son dual topologique. La topologie forte sur E' est celle associée à la famille de semi-normes $(q_B)_{B \text{ borné de } E}$, où $q_B(f) = \sup_B f$. La topologie faible-$*$sur E' est la topologie associée à la famille $q_x : f \to |f(x)|$, où x parcourt E. Ce sont deux topologies d'espace vectoriel topologique localement convexe séparé sur E'. on en déduit les modes de convergences associés. $f_n \to f$ fortement dans E' si et seulement si $q_B(f_n - f) \to 0$, $\forall B$ borné. $f_n \rightharpoonup f$ signifie que $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in E$. On note $*\sigma(E', E)$ la topologie faible-$*$sur E'. un système fondamental de voisinages de f est donné par $\{g \in E',\ |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \forall i\}$, $\varepsilon > 0, x_1, ..., x_k \in E^*$.*

Théorème 1.4 *$*\sigma(E', E)$ est la topologie la moins fine sur E' rendant les projections continues.*

Théorème 1.5 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé , U un voisinage de 0, et $K = \{f \in E', |f| \leq 1 \text{ sur } U\}$. Alors, K est compact pour $*\sigma(E', E)$.*

Proposition 1.1 *E espace vectoriel topologique localement convexe séparé sequentiellement séparable, i.e. possédant une partie dénombrable séquentiellement dense. Soit p une semi norme continue sur E, et*

$$K = \{f \in E', |f| \leq p\} \, .$$

Alors, la topologie faible-$*$est métrisable sur K.

Corollaire 1.1 *E espace vectoriel topologique localement convexe séparé séquentiellement séparable, $(f_n) \in E'^{\mathbb{N}}$ tq $\exists p$ semi-norme continue sur E, $|f_n| \leq p \forall n$. Alors, (f_n) posséde une sous suite faible-$*$ convergente.*

1.4 Limites inductives d'espace vectoriel topologique localement convexe

Définition 1.10 (Limite inductive) *Soit $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$ une famille d'evtlc tels que $E = \cup E_i$ est un espace vectoriel. Par définition, la* ***topologie limite inductive*** *sur E des espace vectoriel topologique localement convexe $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$ est la topologie associée à la famille de semi normes*

$$P = \{semi - normes\ sur\ E, p_{|E_i}\ est\ continue\ sur\ (E_i, \tau_i)\}\ .$$

Théorème 1.6 *Soit (E, τ) limite inductive des espace vectoriel topologique localement convexe (E_i, τ_i). Alors, τ est la topologie d'espace vectoriel topologique localement convexe la plus fine sur E rendant continues les injections canoniques $E_i \to E$, et ce $\forall i \in I$.*

Lemme 1.5 *(E, τ) la limite inductive de (E_i, τ_i), F espace vectoriel topologique localement convexe , $T \in L(E, F)$, on a équivalence entre :*

i) $T \in L_c(E, F)$.

ii) $T_{|E_i} \in L_c(E_i, F)$.

Proposition 1.2 *Soit (E, τ) limite inductive de la suite d'espace vectoriel topologique localement convexe (E_k, τ_k), vérifiant i) et ii). Alors,*

i) Soit U un convexe symétrique, contenant 0, tel que $U \cap E_k \in \tau_k\ \forall k$. Alors, U est un voisinage de 0 dans (E, τ).

ii) $\tau_{|E_k} = \tau_k$, $\forall k$.

iii) (E_k, τ_k) est séparé $\forall k$, alors (E, τ) est séparé.

iv) E_k est fermé dans (E, τ) $\forall k$.

Corollaire 1.2 *Si (E_k, τ_k) complet pour tout k, alors (E, τ) complet.*

Corollaire 1.3 *Munis de leur topologies usuelles, $D(\Omega)$, $C_c(\Omega)$, $C_c^m(\Omega)$ sont complets.*

Corollaire 1.4 *Si (E_k, τ_k) est séquentiellement séparable pour tout k, alors τ l'est aussi.*

Proposition 1.3 *(E, τ) limite inductive stricte de la suite d'espaces de Fréchet (E_k, τ_k), alors τ n'est pas métrisable.*

Lemme 1.6 *(E, τ) limite inductive de la suite d'evtlc (E_k, τ_k) comme précédemment. Si (E_k, τ_k) est métrisable $\forall k$ et si T est une forme linéaire sur E, dire que T est continu éaquivaut à dire que T est sséquentiellement continu. On en déduit que $T \in D^*(\Omega)$est une distribution. si et seulement si $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ des que $\varphi_n \to \varphi$ dans $D(\Omega)$*

1.5 Théorème de Hahn-Banach

Lemme 1.7 *Tout ensemble ordonné non vide inductif possède au moins un élément maximal.*

Théorème 1.7 (Hahn-Banach, forme analytique) *E $\mathbb{R}$-ev, $p : E \to \mathbb{R}^+$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\forall \lambda > 0, \forall x \in E$, $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$. Soit G un ssev de E, $g \in G^*$ tq $g(x) \leq p(x)\ \forall x \in G$, alors, il existe $f \in E^*$, $f_{|G} = g et f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in E$.*

Corollaire 1.5 *E espace vectoriel normé , G ssev de E, $g \in G'$, alors il existe $f \in E'$, tq $f_{|G} = g, \|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$.*

Corollaire 1.6 *Soit E un espace vectoriel normé , $x_0 \in E$, $f \in E'$,*

$$\|f\|_{E'} = 1, et\ |f(x_0)| = \|x_0\|\ .$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, $\|x\| = \max\{|f(x)|, \|f\|_{E'} \leq 1\}$.

Corollaire 1.7 *Soit E un espace vectoriel normé , $\sigma(E, E')$ est séparée.*

Définition 1.11 (Séparation) *Soit E un espace vectoriel topologique , A et B deux parties non vides de E, $A \cap B = \emptyset$, $f \in E' - \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, on dit que l'hyperplan fermé $\{f = \alpha\}$ **sépare** A et B si $\{f \leq \alpha\} \supset A$, et $\{f \geq \alpha\} \supset B$. La séparation est dite stricte si les inégalités précédentes le sont.*

Lemme 1.8 *E un espace vectoriel topologique , C un ouvert convexe, $x_0 \in E - C$, $\exists f \in E'$ telle que $f(x) < f(x_0), \forall x \in C$.*

Théorème 1.8 (Hahn Banach, première forme géométrique) *E espace vectoriel topologique , A, B deux convexes non vides., d'intersection vide. A ouvert, alors $\exists f \in E'$ telle que $f(a) < f(b)$, $\forall (a, b) \in A \times B$.*

Théorème 1.9 (Hahn Banach, seconde forme géométrique) *E espace vectoriel topologique , A, B deux convexes non vides., d'intersection vide. A compact, B fermé alors $\exists f \in E' - \{0\}$ $\exists \varepsilon > 0$, tels que $f(a) \leq f(b) - \varepsilon$, $\forall (a, b) \in A \times B$.*

Corollaire 1.8 *E espace vectoriel topologique localement convexe séparé , $\sigma(E, E')$ est séparée .*

Corollaire 1.9 *E espace vectoriel topologique localement convexe séparé , C convexe fermé, alors C est l'intersection des demi espaces fermés les contenant. En particulier, C est fermé pour la topologie faible.*

Définition 1.12 (Point extrémal) *E $\mathbb{R}$-espace vectoriel C convexe non vide, $x \in C$, on dit que x est un point extrémal de C ($x \in ext(C)$), si $x = ty + (1-t)z$, $t \in]0, 1[\implies y = x = z$, pour $y, z \in C$, ie si $C - \{x\}$ est convexe.*

Proposition 1.4 *E espace vectoriel topologique localement convexe séparé , C convexe compact non vide, alors $ext(C) \neq \emptyset$.*

Théorème 1.10 (Krein-Milman) *E espace vectoriel topologique localement convexe séparé , C convexe compact, alors $C = con(ext(C))$*

2 Introduction à la théorie des distributions

2.1 Quelques résultats préléminaires

Lemme 2.1 *$C_c(\Omega)$ est dense dans $L^1(\Omega)$. pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on définit la convolution de f et g par*

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy, \ \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

On peut verifier la commutativité, et $f \star g \in L^1$,

$$\|f \star g\|_{L^1} leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$$

Lemme 2.2 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est L^1, $f \star g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec*

$$\|f \star g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p} .$$

Proposition 2.1 *$D(\Omega)$ est dense dans $L^1(\Omega)$.*

Lemme 2.3 (Partition de l'unité) *Soit Γ un compact de $\mathbb{R}^d$ et $U_1, ..., U_k$ un recouvrement ouvert de Γ, il existe des fonctions C^∞ à support compact $\theta_1, ..., \theta_k$ vérifiant $supp(\theta_i) \subset U_i$, et $\sum \theta_i = 1$ sur un voisinage de Γ. On appellera partition de l'unité une telle famille $\theta_1, ..., \theta_k$.*

Lemme 2.4 (Mesure de surface) *Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\int_{\partial\Omega} f(x)d\sigma(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \Omega_\delta \left|\nabla\Phi(x)\right| f(x)dx, \text{ où } \Omega_\delta := \{\Phi(x) > -\delta\} .$$

Théorème 2.1 (Formule de Stokes) *Soit Ω un ouvert de classe C^1 de $\mathbb{R}^d$ et $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, on a*

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(x).n(x)d\sigma(x) .$$

2.2 Définitions et propriétés premières des distributions

Définition 2.1 (Distribution) *On appelle distribution sur Ω toute forme linéaire continue sur l'espace des fonctions-test $D(\Omega)$, et l'on note $D'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω.*

Lemme 2.5 *Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(\Omega)^{\mathbb{N}}$*

Lemme 2.6 *Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, alors $\{f\} = 0$ dans $D'(\Omega)$ si et seulement si $f = 0$ presque partout.*

Définition 2.2 (Egalité de distributions) *Soit U un ouvert inclus dans Ω, $x_0 \in \Omega$. On dit que $T_1 = T_2$ sur U si $\langle T_1, \varphi\rangle = \langle T_2, \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in D(\Omega)$ telle que $supp(\varphi) \subset U$. On dit que T_1 et T_2 sont égales au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage ouvert de x_0 dans Ω sur lequel $T_1 = T_2$.*

Lemme 2.7 *Soient T_1 et T_2 deux distributions sur Ω. Si T_1 et T_2 sont égales sur U au voisinage de tout point de Ω, alors $T_1 = T_2$.*

Définition 2.3 (Support d'une distribution) *Soit $T \in D'(\Omega)$, on appelle support de T et l'on note $supp(T)$ le complémentaire dans Ω du plus grand ouvert sur lequel T est nulle. On dit que T est à support compact si son support est compact.*

Proposition 2.2 *Soit $T \in \mathscr{E}'(\Omega)$ alors la restriction à $D(\Omega)$ est une distribution à support compact. Réciproquement, si T est une distribution à support compact, alors T se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue sur $\mathscr{E}(\Omega)$.*

Définition 2.4 (Distribution d'ordre fini) *Soit $T \in D'(\Omega)$, et $m \in \mathbb{N}$, on dit que T est une distribution d'ordre inférieur ou égal à m si et seulement si pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante C telle que*

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sup_{x\in K} \sup_{|\alpha \leq m|} |\partial^\alpha \varphi(x)|\,, \forall \varphi \in D(\Omega),\ supp(\varphi) \subset K\ .$$

Proposition 2.3 *Toute distribution à support compact est à support fini.*

Définition 2.5 (Produit) *Soit $\psi \in \mathscr{E}(\Omega)$ et $T \in D'(\Omega)$, on appelle* ***produit de T et ψ****, et l'on note ψT, la distribution définie par*

$$\langle \psi T, \varphi\rangle = \langle T, \psi\varphi\rangle,\ \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Définition 2.6 (Espaces de Sobolev) *Soit $p \in [1, +\infty]$, on définit l'espace de Sobolev d'ordre 1,*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : \partial_i\{f\} \in L^p,\ \forall i \in \{1, ..., d\}\}\ .$$

2.3 Convolution et régularisation

On note désormais $\check{\varphi}$ la fonction $x \mapsto \varphi(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. On définit alors

$$\langle \check{T}, \varphi\rangle = \langle T, \check{\varphi}\rangle, \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^d)\ .$$

On définit également de translaté de T par

$$\langle \tau_h T, \varphi\rangle = \langle T, \tau_h \varphi\rangle \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^d)\ .$$

Lemme 2.8 *Soit $\varphi \in \mathscr{E}\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^N$ telle que pour tout $r > 0$, il existe $M(r) > 0$ tel que $supp(\varphi(., y)) \subset \overline{B}_d(M(r))$ pour tout $y \in \overline{B}_N(r)$ et soit $T \in D'(\mathbb{R}^d)$. L'application $y \in \mathbb{R}^N \mapsto \langle T, \varphi(., y)\rangle$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^N$ et l'on a*

$$\partial^\alpha(\langle T, \varphi(., y)\rangle) = \langle T, \partial^\alpha_y \varphi(., y)\rangle, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \forall y \in \mathbb{R}^N$$

Lemme 2.9 (Lemme fondamental du calcul intégral) *Soit $T \in D'(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in D(R^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on a :*

$$\langle T, \tau_x \varphi\rangle - \langle T, \varphi\rangle = \int_0^1 \langle T, \tau_{tx} \nabla\varphi . x\rangle dt\ .$$

Définition 2.7 (Convolution) *Soit* $T \in D'(\mathbb{R}^d)$, *et* $g \in D(\mathbb{R}^d)$. *On définit la convolée de* T *et de* g *comme la fonction* C^∞*(i.e.*$(T \star_1 g) \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^d)$*),*

$$(T \star_1 g)(x) = \langle T, \tau_{-x}\check{g}\rangle \ ,\forall x \in \mathbb{R}^d \ .$$

On définit également la convolée de T *et* g *comme distribution (i.e* $(T \star_2 g) \in D'(\mathbb{R}^d)$*) par*

$$\langle T \star_2 g, \varphi\rangle = \langle T, \check{g} \star \varphi\rangle \ ,\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^d).$$

Lemme 2.10 *Soit* $F \in C_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, *et soit*

$$f(y) = \int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)dx, f_\varepsilon(y) = \varepsilon^d \sum_{x\in G} F(\varepsilon x, y), \forall \varepsilon > 0, \forall y \in \mathbb{R}^d \ .$$

Lemme 2.11 *Soit* $T \in D'(\mathbb{R}^d)$, *et* $g \in D(\mathbb{R}^d)$, *on a* $\{T \star_1 g\} = T \star_2 g$.

Lemme 2.12 *Soit* $T \in D'(R^d)$, $g \in D(\mathbb{R}^d)$ *, et* $\alpha \in \mathbb{N}^d$, *on a alors*

$$\partial^\alpha(T \star g) = \partial^\alpha T \star g = T \star \partial^\alpha g \ .$$

Lemme 2.13 *Soit* $T \in D'(\mathbb{R}^d)$, $g \in D(\mathbb{R}^d)$, *et* $\alpha \in \mathbb{N}^d$, *on a alors*

$$supp(T \star g) \subset supp(T) + supp(g) \ .$$

Lemme 2.14 *Soit* $T \in D'(\mathbb{R}^d)$, *et* $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ *une famille régularisante, alors* $T \star \rho_\varepsilon$ *converge vers* T *dans* $D'(\mathbb{R}^d)$ *quand* $\varepsilon \to 0^+$.

Théorème 2.2 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^d$, *alors* $D(\Omega$ *est séquentiellement dense dans* $D'(\Omega)$.

Lemme 2.15 (De Dubois-Reymond) *Soit* $T \in D'(\Omega)$ *telle que* ∇T *soit une fonction continue alors* T *est une fonction de classe* C^1 *et ses dérivées premières au sens des distributions et au sens classique coïncident.*

Lemme 2.16 *Soit* Ω *un ouvert connexe de* $\mathbb{R}^d$ *et* $T \in D'(\Omega)$ *telle que* $\nabla T = 0$, *alors il existe une constante* C *telle que* $T = \{C\}$.

2.4 Transformée de Fourier

Définition 2.8 (Transformée de fourier) *Soit* $f \in L^1 = L^1(\mathbb{R}^n)$, *la transformée de Fourier de* f *est la fonction notée* $\hat{f}$, *où*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix.\xi} f(x)dx.$$

Lemme 2.17 *Pour tout* $f \in L^1$, *on a* $\hat{f} \in C^0$ *(i.e.* $\hat{f}$ *est continue et tend vers* 0 *à l'infini), et*

$$\|\hat{f}\|)\infty \leq \|f\|_{L^1} \ .$$

Lemme 2.18 (Derivation et transformée de Fourier) *Soit* $f \in L^1$ *telle que* $x_j f \in L^1$, *alors* $\mathcal{F}(f)$ *admet une dérivée partielle par rapport à* ξ_j *et*

$$\mathcal{F}(x_j f) = i\partial_j \mathcal{F}(f) \ .$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *telle que* $\partial_j f \in L^1$, *alors*

$$\mathcal{F}(\partial_j f) = i\xi_j \mathcal{F}(f) \ .$$

Lemme 2.19 (Transformée de Fourier de la gaussienne) *Soit* $\theta > 0$, *et* $f_\theta(x) = e^{-\frac{|x^2|}{2\theta}}$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, *alors on a*

$$\hat{f}_\theta(\xi) = (2\pi\theta)^{d/2} e^{-\frac{\theta|\xi|^2}{2}} \ ,\forall \xi \in \mathbb{R}^d \ .$$

Lemme 2.20 *Soit* f *et* g *dans* L^1, *on a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} f(\xi \hat{g}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)g(x+\xi)d\xi, \ \forall x \in \mathbb{R}^d \ ,$$

et donc en particulier

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\xi \hat{g}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi, \ \forall x \in \mathbb{R}^d \ .$$

Théorème 2.3 (Inversion de la transformée de Fourier) *Soit $f \in L^1$ telle que $\hat{f} \in L^1$, on a alors*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi \ ,$$

si bien qu'en particulier $f \in C^0(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 2.4 (Formule de Parseval) *Soit $f \in S$, et $g \in L^1$, alors on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\overline{g} = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}\overline{\hat{g}} \ .$$

En particulier, on a la formule de Plancherel, pour tout $f \in S$:

$$\|f\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-d} \|\hat{f}\|_{L^2}^2 \ .$$

Proposition 2.5 *L'application $\mathcal{F}$ est un automorphisme bicontinu de L^2, et on a la formule d'inversion :*

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f) = 2\pi^{-d} \check{f} \ , \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

Pour tous f et g dans L^2, on a

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = (2\pi)^{-d} \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \rangle_{L^2}$$

et donc en particulier

$$\|f\|_{L^2} = (2\pi)^{-d/2} \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2} \ .$$

Définition 2.9 (Transformée de Fourier d'une distribution) *Soit $T \in S'$, on appelle transformée de Fourier et l'on note $\mathcal{F}(T)$ la distribution définie par*

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle, \ \forall \varphi \in S \ .$$

Proposition 2.6 *$\mathcal{F}$ est un automorphisme (faiblement) bicontinu de S' et l'on a la formule d'inversion :*

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(T) = (2\pi)^d \check{T}, \ \forall T \in S'$$

et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\mathcal{F}(x^\alpha T) = i^{|\alpha|} \partial^\alpha \mathcal{F}(T), \mathcal{F}(\partial^\alpha T) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathcal{F}(T) \ .$$

2.5 Solutions fondamentales du laplacien

Théorème 2.4 *Soit d un entier ≥ 3, et $f : x \mapsto |x|^{-d/2}$. Alors, on a*

$$-\Delta f = (d-2) s_d \delta_0 \ \text{dans} \ D'(\mathbb{R}^d).$$

Pour $d = 2$, on a $g(x) = \ln(|x|)$, et

$$-\Delta g = 2\pi \delta_0 \ \text{dans} \ D'(\mathbb{R}^2)$$

3 Espaces de Banach et topologies faibles

3.1 Topologie faible

Définition 3.1 (Topologie faible) *La topologie faible sur E, notée $\sigma(E, E')$ est la topologie la moins fine rendant continus les éléments de E'.*

Lemme 3.1 *Soit X un espace topologique et φ une application de X vers E, alors φ est continue pour la topologie $\sigma(E, E')$ si et seulement si pour tout $f \in E'$, $f \circ \varphi$ est continue sur X.*

Proposition 3.1 *Soit $X \in E$,un système fondamental de voisinages de x pour $\sigma(E, E')$ est donné par les ensembles de la forme*

$$V_{\varepsilon, f_1, \ldots, f_k} = \{y, |f_i(x-y)| < \varepsilon, \forall i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

Proposition 3.2 *La topologie $\sigma(E, E')$ est séparée.*

Proposition 3.3 *Soit C un convexe fermé de E, alors C est faiblement fermé.*

Lemme 3.2 (Mazur) *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant faiblement vers x dans E, alors il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec chaque y_n combinaison convexe des x_k, $k \leq n$, convergeant fortement vers x dans E.*

Proposition 3.4 *Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe s.c.i. pour la toologie forte de E alors f est s.c.i pour $\sigma(E, E')$. En particulier, si $x_n \rightharpoonup x$, alors*

$$f(x) \leq \liminf f(x_n) .$$

3.2 Topologie faible-$\star$

Définition 3.2 (Topologie faible-$\star$) *La **Topologie faible-$*$** sur E', notée $\star - \sigma(E'', E')$ est la topologie la moins fine rendant contiues les forames linéaires $x \mapsto f(x)$ pour tout $x \in E$. un système fondamental de voisinages de f est donné par*

$$V_{\varepsilon,x_1,\dots,x_k} = \{g \in E',\ |(g-f)(x_i)| \leq \varepsilon, \forall i\} .$$

Théorème 3.1 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) *La boule unité fermée de E', $B_{E'}$ est compacte pour la topologie faible étoile.*

Théorème 3.2 (Krein Smulian) *Soit E un espace de Banach, et C un convexe de E' tel que $C \cap rB_{E'}$ soit fermé pour la topologie faible étoile pour tout $r > 0$, alors C est fermé pour la topologie faible étoile.*

3.3 Espaces réflexifs

Définition 3.3 (espace reflexif) *Un espace de banach E est dit **réflexif** si l'injection canonique continue*

$$J(x)(f) := f(x)$$

est surjective.

Lemme 3.3 (Helly) *Soit E un espace de Banach, $f_1, \dots, f_n$ dans E' et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels, on a l'équivalence entre les assertions suivantes :*

1. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in B_E$ tel que*

$$|f_i(x_\varepsilon) - \alpha_i| < \varepsilon,\ \forall i = 1, \dots, n .$$

2. *Pour tout $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| \leq \| \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \| .$$

Lemme 3.4 (Goldstine) *Soit E un espace de Banach, alors $J(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ pour la topologie $\sigma(E'', E')$.*

Théorème 3.3 (Kakutani) *Soit E un espace de Banach, alors E est reflexif si et seulement si B_E est compacte pour la topologie faible étoile/=.*

Corollaire 3.1 *Soit E un espace de Banachréflexif, et F un sev fermé de E, alors F muni de la topologie induite par la topologie forte de E est réflexif.*

Corollaire 3.2 *Soit E un espace de Banach, alors E est réflexif si et seulement si E' est réflexif.*

Corollaire 3.3 *Soit E un espace de Banach réflexif et K une partie convexe fermée bornée de E, alors K est compacte pour fb.*

Corollaire 3.4 *Soit E un espace de Banach réflexif, C un convexe non vide fermé de E, $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe s.c.i. non identiquement égale à $+\infty$, si C est bornée ou si*

$$f(x) \to +\infty \text{ quand } x \in C, \ \|x\| \to +\infty \ .$$

Alors, il existe $\overline{x} \in C$ tel que $f(\overline{x}) \leq f(x), \ \forall x \in C$.

3.4 Espaces séparables

Définition 3.4 (Séparabilité) *On dit que l'espace de Banach E est séparable si et seulement si E possède une partie dénombrable dense.*

Proposition 3.5 *Soit E un espace de Banach tel que E' soit séparable alors E est séparable.*

Corollaire 3.5 *Soit E un espace de Banach , alors E est réflexif et séparable si et seulement si E' est réflexif et séparable.*

Théorème 3.4 *Soit E un espace de Banach, alors E est séparable si et seulement si la trace de la topologie faible étoile sur $B_{E'}$ est métrisable.*

Proposition 3.6 *Soit E un espace de banach, si E' est séparable, alors la trace de la topologie faible sur B_E est métrisable.*

Corollaire 3.6 *Soit E un espace de Banach séparable, et soit $(f_n)_n$ une suite bornée de E', alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sus suite qui converge pour la topologie faible étoile.*

Théorème 3.5 *Soit E un espace de banach reflexif, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite qui converge faiblement.*

3.5 Espaces uniformément convexes

Définition 3.5 *Soit E un espace de Banach, on dit que E est uniformément convexe si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x et y dans B_E si $\|x - y\| \geq \varepsilon$, alors*

$$\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta \ ; .$$

Théorème 3.6 (Millman) *Tout espace de Banach uiformément convexe est réflexif.*

Théorème 3.7 *Soit E un espace de Banach uniformément convexe et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant faiblement vers x dans E, si $\|x_n\|$ converge vers $\|x\|$ alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers x dans E.*

typo dans la def 3.5 du 3.5 : 2 fois "dit"

4 Opérateurs linéaires, opérateurs compacts

4.1 Généralités

Lemme 4.1 *Soit $T \in (E, F)$, alors $Im(T)$ est fermé si et seulement si*

$$Im(T) = Ker(T^*)^{\perp} \ .$$

4.2 Conséquences de la théorie de Baire

Théorème 4.1 (Banach Steinhaus, principle of uniform boundedness) *Soit E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de (E,F). Si*

$$\forall x \in E, sup_{i\in I}\|f_i(x)\|_F < \infty \ ,$$

alors

$$sup_{i\in I}\|f_i\|_{(E,F)} < \infty \ .$$

Théorème 4.2 (Application ouverte) *Soit E et F deux espaces de Banach et soit $f \in (E,F)$ surjective. Alors, f est une application overte au sens ou l'image directe de tout ouvert est également un ouvert.*

Théorème 4.3 (Continuité de l'inverse de Banach) *Soient E et F deux espaces de Banach, et $f \in (E,F)$ une bijection, alors $f^{-1} \in (F,E)$.*

Théorème 4.4 (Graphe fermé) *Soit E et F deux espaces de Banach, $f \in L(E,F)$ tel que le graphe de f soit fermé dans $E\times F$, alors $f \in (E,F)$.*

Proposition 4.1 *Soit E un espace de Banach et $f \in (E)$ telle que $\|f\|_{(E)} < 1$, alors $id+f$ est inversible, avec*

$$(id+f)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k f^k \ .$$

4.3 Opérateurs compacts, alternative de Fredholm

Définition 4.1 (Opérateur compact) *Soit $T \in (E,F)$ on dit que T est un opérateur compact si et seulement si $T(B_E)$ est relativement compact. On note $\mathcal{K}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E vers F et $\mathcal{K}(E)$ l'ensemble des endomorphismes compacts de E.*

Lemme 4.2 *$\mathcal{K}(E,F)$ est un sous espace vectoriel fermé de (E,F).*

Proposition 4.2 *Soit E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{K}(E,F)$ alors si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergeant faiblement vers x, Tx_n converge fortement dans F vers Tx*

Théorème 4.5 *Soit $T \in \mathcal{K}(E,F)$, alors $T^* \in \mathcal{K}(F',E')$. Réciproquement , si $T^* \in^K (F',E')$, alors $T \in \mathcal{K}(E,F)$.*

Lemme 4.3 (Riesz) *Soit E un espace vectoriel normé , et F un sous espace vectorielle$>$ fermé strict de E, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, il existe $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $d(u,F) \geq 1-\varepsilon$.*

Théorème 4.6 (Alternative de Fredholm) *Soit $T \in \mathcal{K}(E)$, alors on a*

1. *$ker(I-T)$ est de dimension finie.*
2. *$Im(I-T)$ est fermé et*

$$Im(I-T) = (ker(I-T^*))^{\perp} \ .$$

3. *$ker(I-T) = \{0\}$ si et seulement si $Im(I-T) = E$*
4. *$dimker(I-T) = dimker(I-T^*)$.*

4.4 Décomposition spectrale des opérateurs compacts autoadjoints

Définition 4.2 (Ensemble résolvant d'une application linéaire) *On appelle ensemble résolvant d'une application linéaire T, noté $\rho(T)$, est donné par*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : T - \lambda I \ \text{bijective}\ \} \ .$$

Proposition 4.3 *Soit $T \in (E)$ le spectre de T est un ensemble compact inclus dans l'intervalle $[-\|T\|, \|T\|]$.*

Théorème 4.7 *Soit E un espace de Banach de dimension infinie et soit $T \in \mathcal{K}(E)$, alors on a :*

i) $0 \in \sigma(T)$,

ii) $\sigma(T) - \{0\} = VP(T) - \{0\}$.

iii) L'une des situations suivantes : Soit $\sigma(T) = \{0\}$, ou $\sigma(T) - \{0\}$ est fini, soit $\sigma(T) - \{0\}$ est une suite qui tend vers 0.

Lemme 4.4 *Sous les mêmes hypothèses que ci dessus, soit $(\lambda_n)_n$ une suite d'éléments tous distincts de $\sigma(T) - \{0\}$, alors $\lambda_n \to 0$*

Définition 4.3 (Application autoadjointe) *Soit H un espace de Hilbert et $T \in (H)$, on dit que T est autoadjoint si $T^* = T$, i.e. si*

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle, \forall u, v \in H \times H \ .$$

Proposition 4.4 *Soit H un espace de Hiblert, et $T \in (H)$ un opérateur autoadjoint, on pose*

$$m = \inf\{\langle Tu, u\rangle, u \in H, normu \leq 1\}, M = \inf\{\langle Tu, u\rangle, u \in H, normu \leq 1\},$$

$$aors\ \sigma(T) \subset [m, M], et (m, M) \in \sigma(T)^2 \ .$$

Théorème 4.8 (Théorème spectral pour les opérateurs compacts autoadjoints) *Soit H un espace de Hilbert séparable et T un opérateur compact autoadjoint de H, alors il existe une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T.*

5 Espaces L^p

5.1 Rappels d'intégration

Théorème 5.1 (Convergence monotone, Beppo Levi) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de L^1. Si $\sup \int_n f_n < \infty$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers $f = \sup_n f_n$. De plus, $f \in L^1$, et $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$ quand $n \to \infty$*

Lemme 5.1 (Fatou) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions L^1 telles que chaque f_n est positive, et $\sup_n f_n < \infty$. Alors*

$$\int \liminf f \leq \liminf \int f \ .$$

Théorème 5.2 (Convergence dominée, Lebesgue) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite de L^1. Si pour presque tout x, $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$, et qu'il existe une fonction positive g, intégrable, telle que pour tout n, $|f_n| \leq g$, alors $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1.*

Lemme 5.2 (Densité des fonctions continues à support compact) *Soit $f \in L^1(\Omega)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in C_c(\Omega)$ telle que $\|f - g\|_{L^1} \leq \varepsilon$.*

Théorème 5.3 (Densité des fonctions C^∞ à support compact) *Soit $f \in L^1(\Omega)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\|f - g\|_{L^1} \leq \varepsilon$.*

Théorème 5.4 (Fubini) *Si $f \in L^1(\Omega \times U)$, alors pour presque tout x, $f(x, y) \in L^1_y(U)$ et $\int_U f(x, y)dy \in L^1_x(\Omega)$, et on a*

$$\int_\Omega \int_U f(x, y) dx dy = \int_\Omega \left(\int_U f(x, y) dy\right) dx.$$

Théorème 5.5 (Tonelli) *Si pour presque tout x, $f(x,.) \in L^1_y(U)$, et*

$$\int_\Omega \left(\int_U |f(x,y)|\, dy \right) dx < +\infty,$$

, alors $f \in L^1(\Omega \times U)$.

5.2 Propriétés élémentaires des espaces L^p

Théorème 5.6 (Inégalité de Holder) *Soit $f \in L^p$, et $g \in L^{p'}$, alors $fg \in L^1$, et*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} \ .$$

Théorème 5.7 *Soit $p \in [1, +\infty]$, $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel et $\|.\|_{L^p}$ est une norme sur $L^p(\Omega)$.*

Théorème 5.8 *$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout p, $1 \leq p \leq \infty$.*

Proposition 5.1 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de L^p et $f \in L^p$. Si f_n converge vers f dans L^p, alors (f_n) possède une sous-suite qui admet une majorante L^p et qui converge vers f presque partout.*

5.3 Dualité, reflexivité, séparabilité

Lemme 5.3 (Inégalité de Clarkson) *Soit $p \in [2, +\infty[$, pour tout f et g dans L^p, on a*

$$\|\frac{f+g}{2}\|^p_{L^p} + \|\frac{f-g}{2}\|^p_{L^p} \leq \frac{1}{2} \left(\|f\|^p_{L^p} + \|g\|^p_{L^p} \right).$$

Lemme 5.4 *L^p est uniformément convexe pour $2 \leq p < \infty$*

Lemme 5.5 (Inégalité de Hanner) *Soit $p \in]1, 2]$, pour tout f et g dans L^p, on a :*

$$(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})^p + |\|f\|_{L^p} - \|g\|_{L^p}|^p \leq \|f+g\|^p_{L^p} + \|f-g\|^p_{L^p}.$$

Lemme 5.6 *L^p est uniformément convexe pour $1 < p \leq 2$.*

Théorème 5.9 *Pour tout $p \in]1, \infty[$, $L^p(\Omega)$ est uniformément convexe.*

Théorème 5.10 *$L^p(\Omega)$ est un espace réflexif pour tout $1 < p < +\infty$.*

Théorème 5.11 *Soit $p \in]1, +\infty[$, (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers f dans L^p et si*

$$\lim_n \|f_n\| = \|f\|,$$

alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement dans L^p vers f.

Théorème 5.12 (Représentation de Riesz) *Soit $p : 1 < p < \infty$, et soit $\varphi \in (L^p(\Omega))'$, alors il existe un unique $u \in L^{p'}$ tel que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega uf, \forall f \in L^p(\Omega).$$

de plus, on a

$$\|\varphi\|_{(L^p)'} = \|\varphi_{L^{p'}}\|$$

Théorème 5.13 *Soit $\varphi \in (L^1(\Omega))'$, alors il existe un unique $u \in L^\infty$ tel que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega uf, \forall f \in L^1(\Omega) \ ,$$

et de plus, on a

$$\|\varphi\|_{(L^1)'} = \|u\|_{L^\infty} \ .$$

Théorème 5.14 *Soit $p \in [1, +\infty[$, $D(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Théorème 5.15 *$L^p(\Omega)$ est séparable pour tout $p \in [1, \infty[$.*

Théorème 5.16 *Toute suite bornée de $L^\infty(\Omega)$ possède une sous-suite convergente pour la topologie faible-* $\sigma(L^\infty, L^1)$.*

Théorème 5.17 *$L^1(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$ ne sont pas réflexifs.*

Lemme 5.7 *Soit E un espace vectoriel normé . S'il existe $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts non vides de E, avec I non dénombrable, et $O_i \cap O_j = \emptyset$, alors E n'est pas séparable.*

Proposition 5.2 *L^∞ n'est pas séparable.*

5.4 Compacité dans L^p

Théorème 5.18 *Soit $p \in]1, +\infty[$. Toute partie bornée de L^p est faiblement relativement compacte. Toute suite bornée de L^p possède une sous suite qui converge faiblement $\sigma(L^p, L^{p'})$.*

Théorème 5.19 *Toute partie bornée de L^∞ est faiblement-$*$ relativement compacte. toute suite bornée de L^∞ possède une sous-suite qui converge faiblement-$*$ $\sigma(L^\infty, L^1)$.*

Théorème 5.20 (Compacité de Riesz-Fréchet-Kolmogorov) *Soit $p \in [1, \infty]$, et $\mathcal{F}$ une partie bornée de $L^p(\Omega)$. Si d'une part pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout $\omega \subset\subset \Omega$ il existe $\delta : 0 < \delta < d(\omega, \mathbb{R}^d - \Omega)$ tel que*

$$\sup_{f\in F} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} \leq \varepsilon, \forall h \in \mathbb{R}^d : |h| \leq \delta \,,$$

et d'autre part pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\omega \subset\subset \Omega$ (i ;e. ω ouvert, $\overline{\omega}$ compact et inclus dans Ω) tel que

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{L^p(\Omega-\omega)} \leq \varepsilon$$

alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $L^p(\Omega)$.

5.5 Compacité faible dans L^1

Définition 5.1 (Uniforme intégrabilité) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}$ une partie bornée de $L^1(\Omega)$, alors $\mathcal{F}$ est dite uniformément intégrable si $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tel que*

$$\int_A |f| \leq \varepsilon, \text{ pour tout } f \in \mathcal{F} \text{ et tout } A \subset \Omega \text{ tel que } |A| \leq \delta.$$

Théorème 5.21 (Dunford-Pettis) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}$ une partie bornée de $L^1(\Omega)$, alors si $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable, de toute suite de $\mathcal{F}$, on peut extraire une sous-suite convergeant pour $\sigma(L^1, L^\infty)$.*

Lemme 5.8 (Biting lemma) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^1(\Omega)$. Il existe une suite décroissante d'ensembles mesurables (E_k) telle que $|E_k| \to 0$ et une sous suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (f_{n_k}) tels que $(\mathbb{1}_{\Omega-E_k} f_{n_k})$ soit uniformément intégrable.*

6 Espace de mesures

6.1 Rappels sur les espaces de fonctions continues

Théorème 6.1 (Ascoli-Arzela) *Soit (K,d) un espace métrique compact, et $\mathcal{F}$ une partie bornée de $C(K)$ uniformément équicontinue, c'est à dire vérifiant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta >$ tel que pour tout $(x_1, x_2) \in K^2$ si $d(x_1, x_2) \leq \delta$ alors*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon, \forall f \in \mathcal{F}.$$

Alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $C(K)$.

Proposition 6.1 (Lemme d'Urysohn) *Soit (X,d) un espace localement compact (c'est à dire dont tout point possède un voisinage compact), soit K une partie non vide compacte de X et V un ouvert contenant K alors il existe $f \in C_c(X)$ tel que $\chi_K \leq f \leq \chi_V$.*

Proposition 6.2 (Partition de l'unité) *Soit (X,d) un espace localement compact, K une parie compacte de X et $V_1, ..., V_n$ un recouvrement ouvert de K. Il existe $g_1, ..., g_n \in C_c(X)^n$ vérifiant $0 \leq g_i \leq 1$, $supp(g_i) \subset V_i$ et*

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x) = 1, \forall x \in K .$$

la famille $g_1, ..., g_n$ s'appelle partition de l'unité subordonnée au recouvrement $V_1, ..., V_n$ de K.

Théorème 6.2 (Prolongement de Tietze) *Soit (K,d) un espace métrique compact, F un fermé de K, et $f \in C(F)$, alors f admet un prolongement continu à K.*

Théorème 6.3 *Si (K,d) est un espace métrique compact alors $C(K)$ est séparable.*

6.2 Théorème de Riesz et mesures de Radon dans le cas compact

Définition 6.1 *Soit (X,d) un espace métrique et μ une mesure borélienne sur X, alors μ est dite régulière si pour tout $A \in B_X$ on a*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) \ : \ O \text{ ouvert} \ , \ A \subset O\}$$

et

$$\mu(A) = \inf\{\mu(K) \ : \ K \text{ compact} \ , \ K \subset A\} .$$

Si (X,d) est compact, et μ est une mesure borélienne finie alors la forme linéaire T_μ définie par

$$T_\mu(f) = \int_X f d\mu, \forall f \in C(X)$$

est continue ($|T_\mu)(f)| \leq \|f\| \mu(X)$) et positive dans le sens où $T_\mu(f) \geq 0$ pour tout $f \geq 0$. Comme on a $T_\mu(1) = \mu(X)$ on a

$$\|T_\mu\|_{C(X)'} = \mu(X).$$

Théorème 6.4 (Representation de Riesz, cas compact et positif) *Soit (X,d) un espace métrique compact et T une forme linéaire continue et positive sur $C(X)$. Il existe une unique mesure borélienne finie et régulière μ sur X telle que $T = T_\mu$.*

Corollaire 6.1 *Toute mesure borélienne finie sur un métrique compact est régulière.*

Définition 6.2 (Mesure de Radon) *Soit (X,d) un espace métrique compact, on appelle **mesure de Radon** sur X toute forme linéaire continue sur $C(X)$. On note $\mathcal{M}(X) = C(X)'$ l'espace des mesures de Radon sur X et pour tout $T \in \mathcal{M}(X)$:*

$$\|T\|_{\mathcal{M}(X)} = \|T\|_{C(X)'} = \sup\{T(f), \ f \in C(X), \ \|f\| \leq 1\}.$$

Proposition 6.3 *Soit (X,d) un espace métrique compact et T une mesure de Radon sur X. Définissons pour tout $f \in C(X)$, $f \geq 0$:*

$$T^+(f) = \sup\{T(g) \ : \ g \in C(X), 0 \leq g \leq f\},$$

$$T^-(f) = -\inf\{T(g) \ : \ g \in C(X), 0 \leq g \leq f\},$$

et, pour tout $f \in C(X)$ (en posant $f_+ = \max(f,0)$, et $f_- = \max(-f,0)$) :

$$T^+(f) = T^+(f_+) - T^+(f_-),\ T^-(f) = T^-(f_+) - T^-(f_-)\ .$$

Alors, T^+ et T^- sont deux mesures de Radon positives (appelées respectivement partie positive et partie négative de T). On a $T = T + -T^-$, et

$$\|T\|_{\mathcal{M}(X)} = \|T^+\|_{\mathcal{M}(X)} + \|T^-\|_{\mathcal{M}(X)} = T^+(1) - T^-(1)\ .$$

De plus, la décomposition de $T = T^+ - T^-$ est minimale, en ce sens que si $T = T_1 - T_2$, avec T_1 et T_2 deux mesures de Radon positives, alors $T_1 \geq T^+$, et $T_2 \geq T^-$.

Théorème 6.5 (Théorème de representation de Riesz, cas compact) *Soit (X,d) un espace métrique compact, et T une mesure de Radon sur X, alors il existe deux mesures boréliennes positives finies μ_1 et μ_2 telles que $T = T_{\mu_1} - T_{\mu_2}$. En outre, il existe une unique représentation sous la forme précédente vérifiant*

$$\|T\|_{\mathcal{M}(X)} = \mu_1(X) + \mu_2(X)\ .$$

Lemme 6.1 *Soit μ une mesure signée sur le compact (X,d), de partie positive μ_+ et de partie négative μ_-. Alors, μ_+ et μ_- sont étrangères : il existe un borélien A de X tel que $\mu_+(A) = \mu_+(X)$, et $\mu_-(A) = 0$. (i.e. ces deux mesures sont portées par des mesures de support disjoints)*

6.3 Mesures de Radon dans le cas localement compact

Théorème 6.6 (Représentation de Riesz, cas non compact) *Soit T une mesure de Radon sur X, alors il existe un couple de mesures boréliennes (positives) μ_+ et μ_-, finies sur les compacts de X telles que*

$$T(f) = \int_X f d\mu_+ - \int_X f d\mu_-, \forall f \in C_c(X).$$

NB : Manque un "un" dans le théorème

Proposition 6.4 *Soit (T_n) une suite de mesures de radon sur X telles que $(T_n(f))_n$ est bornée pour tout $f \in C_c(X)$, alors il existe une mesure de Radon T et une sous-suite (T_{n_k}) de (T_n) telles que*

$$T_{n_k}(f) \to T(f), \forall f \in C_c(X)\ .$$

NB : un "de" en trop dans la prop

Définition 6.3 (Convergence vague) *Si $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et μ sont des mesures signées sur X, on dit que (μ_n) **converge vaguement** vers μ si*

$$\int_X f d\mu_n \to \int_X f d\mu, \forall f \in C_c(\Omega)\ .$$

NB : converge vers μ

Lemme 6.2 *Soit T une forme linéaire positive sur $C_0(X)$, alors T est continue.*

Lemme 6.3 *Soit $T \in C_0(X')$, il existe un unique couple (T^+, T^-) de formes linéaires positives sur $C_0(X)$ telles que $T = T^+ - T^-$, et*

$$\|T\|_{C(X)'} = \|T^+\|_{C(X)'} + \|T^-\|_{C(X)'}$$

Théorème 6.7 (Représentation de Riesz, cas non compact, dual de $C_0($ *Soit $T \in C_0(X)'$, alors il existe un couple de mesures boréliennes positives finies μ_+ et μ_-, telles que*

$$T(f) = \int_X f d\mu_+ - \int_X f d\mu_-,\ \forall f \in C_0(X)\ .$$

NB : manque "un" dans le thm 6;7

Définition 6.4 (Convergence étroite) *On dit qu'une suite de mesures (finies) (mu_n) sur X converge étroitement vers une mesure (finie) μ sur X si*

$$\int_X f d\mu_n \to \int_X f d\mu, \forall f \in C_b(X)\ .$$

Théorème 6.8 (Prokhorov) *Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures positives sur X, si $\mu_n(X)$ est bornée et si (μ_n) est **tendue**, dans le sens où pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K tel que*

$$\sup_n \mu_n(X - K) \leq \varepsilon,$$

alors $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous suite qui converge étroitement vers une mesure finie.

6.4 Théorème de Radon-Nikodym, désintégration des mesures

Théorème 6.9 (Decomposition de Lebesgue) *Soit (X,B) un espace mesurable, ν une mesure positive σ-finie et μ une mesure signée finie sur (X,B). Il existe un unique couple (f,μ^s) tel que $f \in L^1(\nu)$, μ^s est un emesure signée finie, et*

$$d\mu = fd\nu + d\mu^s, \quad \textit{avec } \mu^s \perp \nu \, .$$

Théorème 6.10 (Radon-Nikodym) *Soit (X,B) un espace mesurable, ν une mesure positive σ-finie et μ une mesure signée finie. Si $\mu \ll \nu$ alors, il existe un unique $f \in L^1(\nu)$ tel que $d\mu = fd\nu$.*

Théorème 6.11 (Desintégration d'une probabilité par rapport à l'une de ses marges) *Soient X_1 et X_2 des espaces métriques compacts munis de leur tribu borélienne. Soit γ une mesure borélienne de probabilités sur $X_1 \times X_2$, et $\mu := \pi_1\gamma$, alors il existe une famille de mesures de probabilité $(\gamma^{x_1})_{x_1 \in X_1}$ mesurable, au sens où $x_1 \mapsto \gamma_1^x(A_2)$ est μ-mesurable pour tout $A_2 \in B_2$ et telle que $\gamma = \gamma^{x_1} \otimes \mu$, i.e.*

$$\gamma(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} \gamma^{x_1}(A_2) d\mu(x_1), \; \forall A_1 \in B_1, A_2 \in B_2 \, .$$

Lemme 6.4 (Dudley's gluing Lemma) *Soit $X_i, i = 1...3$ des espaces métriques compacts munis de leur tribu borélienne, et μ_i une mesure borélienne de probabilité sur X_i. Soit γ_{12} (resp. γ_{23}) une mesure borélienne de probabilité sur $X_1 \times X_2$ (resp. $X_2 \times X_3$) de marges μ_1, μ_2 (resp μ_2, μ_3), alors il existe une mesure de probabilités γ sur $X_1 \times X_2 \times X_3$ telle que $\pi_{12}\gamma = \gamma_{12}$ et $\pi_{23}\gamma = \gamma_{23}$.*

6.5 Dualité convexe et transport optimal

On considère $\lambda \in (E,F)$. Pour une fonction convexe $fE \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on définit

$$f^*(q) = \sup_{x \in E} \{\langle q, x\rangle - f(x)\}, \forall q \in E' \, .$$

Lemme 6.5 *Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, convexe sci propre, alors f^* est convexe sci propre sur E^**

Théorème 6.12 (Dualité de Fenchel-Rockafellar) *Supposons qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) < +\infty$ et g est continue en $\Lambda(x_0)$, et que l'infimum $\inf_{x \in E}\{f(x) + g(\Lambda x)\}$ soit fini. Alors, on a*

$$\inf_{x \in E}\{f(x) + g(\lambda x)\} = \max_{p \in F'}\{-f^*(-\Lambda^* p) - g^*(p)\}.$$

Théorème 6.13 (Dualité de Kantorovich)

$$\min_{\gamma \in \prod(\mu,\nu)} \int_{X \times Y} c(x,y) d\gamma(x,y) = \sup_{(\varphi,\psi) \in C(X) \times C(Y) : \varphi \oplus \psi \le c} \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu \, .$$

Théorème 6.14 *Soit (X,d) un métrique compact. Pour tout $p \ge 1$, W_p est une distance sur $\mathcal{M}_1^+$, ensemble des mesures de probabilités sur X. De plus, si $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et μ appartiennent à $\mathcal{M}_1^+(X)$, alors $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faible * vers μ si et seulement si $W_p(\mu_n, \mu) \to 0$, $n \to \infty$.*

7 *Espaces de Sobolev et EDPs elliptiques linéaires*

7.1 Cas de la dimension 1

Soit $p \in [1, \infty]$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, on définit

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p, \; \exists g \in L^p, \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi, \forall \varphi \in C_c^1(I)\}.$$

On note également $H^1 = W^{1,2}$.

Théorème 7.1 *$W^{1,p}$ est un espace de Banach. $W^{1,p}$ est reflexif pour $1 < p < \infty$, et séparable pour $1 \le p < \infty$. H^1 est un espace de Hilbert séparable.*

Théorème 7.2 *Soit $u \in W^{1,p}$, alors u admet un représentant que nous noterons encore $u \in C(\overline{I})$ tel que*

$$u(y) - u(x) = \int_x^y u'(t)dt, \forall x, y \text{ dans } I^2 \ .$$

Proposition 7.1 *Soit $u \in L^p$, avec $1 < p \leq \infty$, on a alors les équivalences entre :*

i) $u \in W^{1,p}$

ii) il existe une constante C telle que

$$\left| \int_I u\varphi' \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}}, \forall \varphi \in C_c^1(I) \ .$$

iii) Il existe une constante C telle que pour tout ouvert $\omega \subset\subset I$ et tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < d(\omega, \mathbb{R} - I)$, on ait

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C\,|h| \,.$$

De plus, on peut choisir $C = \|u'\|_{L^p}$ dans les assertions ii et iii.

Théorème 7.3 (De prolongement) *Il existe un opérateur linéaire continu $P : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ tel que $Pu\,|_I = u$, pour tout $u \in W^{1,p}(I)$.*

Théorème 7.4 (De densité) *Soit $p \in [1, \infty[$, et $u \in W^{1,p}(I)$, il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n\,|_I$ converge vers u dans $W^{1,p}(I)$.*

Théorème 7.5 (Injections de Sobolev de dimension 1) *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, il existe une constante $C = C(I)$ (indépendante de p) telle que pour tout $p \in [1, \infty]$, et tout $u \in W^{1,p}(I)$, on ait*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{W^{1,p}} \ .$$

Autrement dit, $W^{1,p}(I) \subset L^\infty$ avec injection continue. Si de plus I est borné, alors

i) Pour tout $p > 1$, l'injection $W^{1,p} \subset C(\overline{I}$ est compacte.

ii) L'injection $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ est compacte pour tout $q \in [1, \infty[$.

Corollaire 7.1 *Si I est non borné, $1 \leq p < \infty$, et $u \in W^{1,p}(I)$, on a $u(x) \to 0$, pour $|x| \to \infty$, $x \in I$.*

Proposition 7.2 *Soit $1 \leq p \leq \infty$, u et v dans $W^{1,p}(I)$, alors $uv \in W^{1,p}(I)$ avec $(uv)' = uv' + u'v$, et on a la formule d'intégration par parties*

$$\int_x^y uv' = -\int_x^y u'v + u(y)v(y) - u(x)v(x), \ \forall (x,y) \in \overline{I}^2 \ .$$

Théorème 7.6 *Soit $u \in W1, p(I)$, alors $u \in W_0^{1,p}(I)$ si et seulement si $u = 0$ sur ∂I.*

Proposition 7.3 (Inégalité de Poincarré) *Supposons I borné. Alors, il existe une constante C telle que*

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C \|u'\|_{L^p}, \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

7.2 Définitions et propriétés premières en dimension quelconque

On généralise les espaces de Sobolev à $\mathbb{R}^d$, et on les munit de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|\delta u\|_{L^p}, \ \forall u \in W^{1,p} \ .$$

On définit sur H^1 le produit scalaire

$$langleu, v\rangle = \int_\Omega (uv + \Delta u.\Delta v).$$

Théorème 7.7 *$W^{1,p}$ est un espace de Banach. $W^{1,p}$ est reflexif pour $1 < p < \infty$, et séparable pour $1 \leq p < \infty$. H^1 est un espace de Hilbert séparable.*

Théorème 7.8 (De densité de Friedrichs) *Soit $p \in [1, \infty[$, et $u \in W^{1,p}(I)$, il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n\,|_\Omega$ converge vers u dans $L^p(\Omega)$ et $\Delta u_n\,|_\omega$ converge vers $\Delta u\,|_\omega$ dans $L^p(\omega)$ pour tout $\omega \subset\subset \Omega$.*

Proposition 7.4 *Soit $u \in L^p$, avec $1 < p \leq \infty$, on a alors les équivalences entre*

i) $u \in W^{1,p}$

ii) il existe une constante C telle que

$$\left| \int_I u \partial_i \varphi \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}}, \forall \varphi \in C_c^1(I), \forall i \, .$$

iii) Il existe une constante C telle que pour tout ouvert $\omega \subset\subset I$ et tout $h \in \mathbb{R}^d$ tel que $|h| < d(\omega, \mathbb{R} - \Omega)$, on ait

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C\,|h| \, .$$

De plus, on peut choisir $C = \|u'\|_{L^p}$ dans les assertions ii et iii.

Théorème 7.9 (De prolongement) *Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$ de frontière bornée. Alors, il existe un opérateur linéaire continu $P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ et une constante $C \geq 0$ tels que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on ait $Pu\,|_\Omega = u$, pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C\|u\|_{L^p(\Omega)}$, et enfin $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$*

Proposition 7.5 *Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$, $p \in [1, +\infty[$, et $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Alors, il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n\,|_\Omega$ converge vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$.*

7.3 Injections de Sobolev

Lemme 7.1 *Soit $f_1, ..., f_d \in L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $i = 1, ..., d$, on pose x_{-i} le vecteur x moins sa $i-me$ coordonnée. Posons*

$$f(x) = \prod f_i(x_{-i}), \ \forall x \in \mathbb{R}^d \, .$$

On a alors $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \prod \|f_i\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})} \, .$$

Théorème 7.10 (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg) *Soit $1 \leq p < d$, on a alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^{p^*}$, avec p^* défini par*

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d} \, .$$

De plus, l'injection précédente est continue et plus précisément, il existe une constante C telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C\|\Delta u\|_{L^p}, \ \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \, .$$

Corollaire 7.2 *Soit $1 \leq p < d$, on a alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^q(\mathbb{R}^d)$ avec injection continue pour tout $q \in [p, p^*]$.*

Proposition 7.6 (Cas limite $p = d$) *$W^{1,d}(\mathbb{R}^d) \subset L^q(\mathbb{R}^d)$ avec injection continue pour tout $q \in [d, +\infty[$.*

Théorème 7.11 (Morrey) *Soit $\infty \geq p > d$, on a alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec injection continue. De plus, si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, u admet un représentant continu (encore noté u) et plus précisément, il existe une constante C telle que*

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|\Delta u\|_{\|L^p\|} |x - y|^\alpha, \forall x, y \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \, ,$$

pour $\alpha = 1 - d/p$.

Théorème 7.12 *Soit $d \geq 2$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ régulier tel que $\partial\Omega$ soit borné et $p \in [1, +\infty]$. On a*

i) Si $p < d$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ avec injection continue pour tout $q \in [p, p^*]$, avec p^* défini comme précédemment.

ii) si $p = d$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, avec injection continue pour tout $q \in [d, \infty[$

iii) Pour $p > d$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ avec injection continue.

Théorème 7.13 (Rellich-Kondrachov) *Soit Ω un ouvert régulier et borné de $\mathbb{R}^d$ et $p \in [1, \infty]$. On a :*

i) Si $p < d$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ avec injection compacte pour tout $q \in [1, p^*[$, avec p^* défini par

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$$

ii) si $p = d$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, avec injection compacte pour tout $q \in [1, \infty[$

iii) Pour $p > d$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ avec injection compacte.

7.4 Espace $W_0^{1,p}$ et traces de fonctions $W^{1,p}$

Lemme 7.2 *Soit $p \in [1, \infty[$, et $\Omega = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^*$. Il existe une constante C telle que pour tout $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$, on ait*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x',0)|^p \, dx' \right)^{1/p} \leq C \|u\|_{W^{1,p}} \, .$$

Proposition 7.7 *Soit $p \in [1, \infty[$ et Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$ tel que $\partial\Omega$ soit borné (pour simplifier). il existe une constante C telle que pour tout $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$, on ait*

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} := \left(\int_{\partial\Omega} |U(x)|^p \, d\sigma(x) \right)^{1/p} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \, .$$

Théorème 7.14 (Théorème de trace) *Soit $p \in [1, \infty[$ et Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$, alors il existe un opérateur (dit de trace) γ linéaire continu de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\partial\Omega)$ tel que $\gamma u = u \mid_{\partial\Omega}$ pour tout $u \in C_c^1(\mathbb{R}_d)$.*

Proposition 7.8 (Inégalité de Poincaré) *Soit $p \in [1, \infty[$ et Ω un ouvert borné dans une direction.Alors, il existe une constante C telle que*

$$\|\|$$

7.5 Formulation variationnelle de quelques problèmes aux limites

Théorème 7.15 *Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ (dual topologique de $H_0^1(\Omega)$), l'équation*

$$-\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega, \; u = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

possède une unique solution faible $u \in H_0^1$. De plus, u est l'unique minimiseur de la foncitonnelle J définie sur H_0^1 par

$$J(v) = \langle v, v \rangle - f(v) \, .$$

Théorème 7.16 (Lax-Milgram) *Soit H un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire continue coercive (i.e $a(v,v) \geq C\langle v, v \rangle$), et $f \in H'$. Il existe un unique $u \in H$ vérifiant*

$$a(u, \varphi) = f(\varphi), \; \forall \varphi \in H \, .$$

Si de plus a est symétrique, alors u est l'unique minimiseur sur H de la fonctionnelle J définie par

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - f(v), \forall v \in H.$$

Théorème 7.17 (Stompacchia) *Soit H un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire continue et coercive, K un convexe fermé non vide de H et $f \in H'$. il existe un unique $u \in K$ vérifiant*

$$a(u, \varphi - u) \geq f(\varphi - u), \; \forall \varphi \in K \, .$$

Si de plus a est symétrique, alors u est l'unique minimiseur sur K de la foctionnelle J définie par

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - f(v), \forall v \in H.$$

7.6 Principe du maximum et régularité elliptique

Théorème 7.18 (Principe du maximum, cas sans dérive) *Soit* Ω *un ouvert régulier de* $\mathbb{R}^d$, $a_0 \geq 0$, $a_0 \in L^\infty$, $a_{i,j} \in L^\infty$ *vérifiant la condition d'ellipticité*

$$\sum_{i,j} a_{i,j}(x) p_i p_j \geq C \left| p \right|^2 ,$$

$f \in H^{-1}(\Omega)$ *et* $u \in H^1(\Omega)$ *solution faible de l'équation*

$$- \sum_{1 \leq i,j \leq d} \partial_j (a_{i,j} \partial_i u) + a_0 u = f \ \textit{dans}\ \Omega.$$

Si $f \geq 0$ *et si* $u\mid_{\partial\Omega} \geq 0$, *alors* $u \geq 0$ *sur* Ω.

Théorème 7.19 (Principe du maximum, cas avec dérive) *Soit* Ω *un ouvert borné et régulier de* $\mathbb{R}^d$, $a_0 \geq 0$, $a_0 \in L^\infty$, $a_i \in L^\infty$, $a_{i,j} \in L^\infty$ *vérifiant la condition d'ellipticité*

$$\sum_{i,j} a_{i,j}(x) p_i p_j \geq C \left| p \right|^2 ,$$

$f \in H^{-1}(\Omega)$ *et* $u \in H^1(\Omega)$ *solution faible de l'équation*

$$- \sum_{1 \leq i,j \leq d} \partial_j (a_{i,j} \partial_i u) + \sum_{i=1}^{d} a_i \partial_i u + a_0 u = f \ \textit{dans}\ \Omega.$$

Si $f \geq 0$ *et si* $u\mid_{\partial\Omega} \geq 0$, *alors* $u \geq 0$ *sur* Ω.

Corollaire 7.3 *Sous les hypothèses du théorème précédent, le problème de dirichlet*

$$- \sum_{1 \leq i,j \leq d} \partial_j (a_{i,j} \partial_i u) + \sum_{i=1}^{d} a_i \partial_i u + a_0 u = f \ \textit{dans}\ \Omega,\ u\mid_{\partial\Omega} = 0$$

possède une unique solution pour tout $f \in L^2(\Omega)$.

Théorème 7.20 *Supposons que* $\Omega = \mathbb{R}^d$ *ou* $\Omega = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^*_+$, *soit* $a_{i,j} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ *vérifiant la condition d'ellipticité précédente,* $f \in L^2(\Omega)$ *et* $u \in H^1_0(\Omega)$ *solution faible de l'équation*

$$- \sum_{1 \leq i,j \leq d} \partial_j (a_{i,j} \partial_i u) + u = f \ \textit{dans}\ \Omega.$$

Alors $u \in H^2(\Omega)$ *et il existe une constante* C *(indépendante de* f*!) telle que :*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2} .$$

Théorème 7.21 *Soit* Ω *un ouvert borné et régulier de* $\mathbb{R}^d$ *alors il existe une base Hilbertienne* $(u_n)_{n \geq 1}$ *de* $L^2(\Omega)$ *et une suite* $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ *de réels vérifiant* $\lambda_n > 0$ *et* $\lambda_n \to +\infty$ *tels que* $u_n \in H^1_0(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ *et*

$$-\delta u_n = \lambda_n u_n .$$

On appelle les λ_n *les valeurs propres de* $-\Delta$ *sur* Ω *avec condition de Dirichlet et les fonctions* u_n *fonctions propres associées.*

8 Calcul des variations et EDPs elliptiques non-linéaires

8.1 Méthode directe du calcul des variations

Théorème 8.1 *Supposons que* F *et* G *soient continue, que* G *soit minorée, qu'il existe* $A > 0$ *et* $B \in \mathbb{R}$ *tels que* F *vérifie la conditions de coercivité :*

$$F(z) \geq A \left| z \right|^p + B,\ \forall z \in \mathbb{R}^d$$

et que F *soit convexe sur* $\mathbb{R}^d$*. Alors, l'équation*

$$g = \inf_{u \in W^{1,p}(\Omega)} J(u),\ \textit{avec}\ J(u) = \int_\Omega \left(F(\nabla u(x)) + G(u(x)) \right) dx ,$$

possède au moins une solution.

Théorème 8.2 *Sous les hypothèses précédentes, toute solution de l'équation précédente est solution faible de l'équation d'Euler-Lagrange :*

$$-div(\nabla F(\nabla u)) + G'(u) = 0 \ dans \ \Omega, u \mid_{partial\Omega} = 0 \ .$$

c'est à dire que

$$\int_\Omega \nabla F(\nabla u).\nabla\varphi + \int_\Omega G'(u)\varphi = 0, \forall \varphi \in W1, p_0(\Omega) \ .$$

8.2 Théorèmes de point fixe et applications

Théorème 8.3 *Il n'existe pas d'application* C^1 $f : \overline{B}^d \to S^{d-1}$ *telle que* $f(x) = x$ *pour tout* $x \in S^{d-1}$*.*

Théorème 8.4 (Brouwer) *Soit* C *une partie convexe compacte de* $\mathbb{R}^d$ *et soit* $f : C \to C$ *continue, alors il existe* $\overline{x} \in C$ *tel que* $f(\overline{x}) = \overline{x}$*.*

Théorème 8.5 (Perron-Frobenius) *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice à coefficients strictements positifs, alors* A *possède un vacteur propre à coordonnées strictement positives.*

Théorème 8.6 (Schauder) *Soit* C *une partie convexe bornée d'un espace de Banach* E *et* $f : C \to C$ *continue et telle que* $f(C)$ *soit relativement compacte, alors il existe* $\overline{x} \in C$ *tel que* $f(\overline{x} = \overline{x}$*.*

Lemme 8.1 *Soit* E *un espace de Banach et* K *une partie relativement compacte de* E*, alors* $\overline{co}(K)$ *est compact.*