Fiche résumée du cours de géométrie différentielle

1 Equations différentielles ordinaires

1.1 Definition

Définition 1.1 (Equation différentielle ordinaire) ***Une équation différentielle*** *dans E espace vectoriel norméest donnée par un ouvert U dans $\mathbb{R} \times E$ et $f : U \to E$ ($f(t,x)$ vecteur) une solution C^1 est constituée de $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, et $y : I \to E$, C^1, telle que*

$$\forall t \in I,\ (t, Y(t)) \ \text{ et } y' = f(t, y(t)) .$$

On a une relation d'ordre sur les solutions $(y_1, I_1) > (y_2, I_2)$ si $I_2 \subset I_1$ et $y_{1|I_2} = y_2$ dont on déduit la notion de solution maximale.

1.1.1 Existence et unicité

Théorème 1.1 (Cauchy-lipschitz) *Soit f continue en t, localement lipschitzienne en x, avec une constante de lipschitz localement bornée en t. Alors, $\forall (t_0, x_0) \in U$, il existe une unique solution maximale $u_{t_0,x_0} : I_{t_0,x_0} \to E$, telle que $u_{t_0,x_0}(t_0) = x_0$. Elle est de classe C^{r+1} si f est de classe C^r.*

1.1.2 Compléments

Théorème 1.2 *$D = \{(s,t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E, s \in I_{t,x}\}$, on définit $R : D \to E$, $R(s,t,x) = u_{t,x}(s)$ résolvante.D est ouvert, et R est continue. Si f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont C^{r-1}, alors R est C^r.*

Equations aux variations : $\frac{\partial R}{\partial x}$, à t et x fixé, est une application $I_{t,x} \to End(E)$, solution de l'équation différentielle linéaire

$$z'(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(s, R(s,t,x)) = z(s),\ z(t_0) = Id_E .$$

Théorème 1.3 (Des bouts, critère d'explosion en temps fini) *f continue, localement lipschitzienne en x, soit $u : I \to E$ une solution maximale. Soit (b,x) une valeur d'adhérence de $(t, u(t))$ lorsque $t \to b$ une des bornes de I. Alors, $(b,x) \notin U$. Conséquance, si $U = V \times \mathbb{R}$ et si $b = \sup I < \infty$, alors $\forall k$ compact $\subset V$, $\exists c < b$ tel que $u(t) \notin K$ pour $c < t < b$.En dimension finie, cela signifie que $\|u(t)\| \to \infty$ en b.*

1.2 Cas des équations linéaires

f est linéaire en x.

Proposition 1.1 *Toutes les solutions sont définies sur I. Cas autonome, $f(t,x) = f(x)$, indépendant de t. La solution est donnée par une exponentielle de matrice.*

Lemme 1.1 *Av B non diagonalisable , de mêmes valeurs propres, elles sont semblables en dimension 2. $A - \lambda I$ et $B - \lambda I$ sont semblables à $E_{1,2}$.*

Lemme 1.2 *A, B diagonalisables sur $\mathbb{C}$, semblables sur $\mathbb{C}$, alors elles sont semblables sur $\mathbb{R}$.*

1.3 Equations différentielles et difféomorphismes

Proposition 1.2 *Soit $y' = f(t,y)$, f de classe C^{r+1}, soit $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$, le domaine de définition de $R : D \to E$. On note $U_{s,t} = \{x \in E,\ s,t,x \in D\}$,*

$$\varphi_{s,t} : x \to R_{s,t,x} .$$

Alors, $\varphi_{s,t}$ est un difféomorphisme de $U_{s,t}$ dans $U_{t,s}$. Là où cette formule est définie, on a

$$\varphi_{r,s} \circ \varphi_{s,t} = \varphi_{r,t} \ .$$

Corollaire 1.1 *Mêmes hypothèses, $y' = f(y)$, $U_t = \{x, (t, 0, x) \in D\}$, $\varphi_t = \varphi_{t,0}$. Alors $\varphi_{t,s} = \varphi_t \circ \varphi_s^{-1}$, $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$.*

Définition 1.2 (Champ de vecteurs) *U ouvert de E, un **champs de vecteurs** de classe C^r sur U est une application C^r de U dans E. Une **ligne intégrale** d'un champs de vecteurs f est une solution de l'équation différentielle $y' = f(y)$. Le **flot local** de f est la famille (U_t, φ_t), φ_t difféomorphisme de U_{-t} sur U_t. f est **complet** si toutes les lignes intégrales sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.Soit U le domaine de définition de f,*

$$\varphi_t \in Diff^r(U) = \{C^r \ diffeo \, U \to U\} \ .$$

*$t \to \varphi_t$ est un morphisme de groupes. On parle de **flot, ou de groupe à un paramètre de difféomorphisme**.*

1.4 Cinématique

Définition 1.3 (Mouvement) *Un **mouvement** dans $\mathbb{R}^n$ est une application $C^r : I \times U^m \to \mathbb{R}^n$ telle que pour tout t, m_t difféomorphisme de U sur $m_t(U)$. Le champs des vitesses du mouvement est le champs de vecteur f_t sur $m_t(U)$ défini par $f_t(y) = \frac{d}{ds} m_s(x)_{|s=t}$, où $m_t(x) = y$, $x = m_t^{-1}(y)$*

Proposition 1.3 *Un mouvement est constitué de translations si et seulement si son champs des vitesses est constant. Un mouvement est constitué de rotations si et seulement si son champs des vitesses est constitué de vecteurs linéaires, symétriques. Un mouvement est constitué de déplacements solides si et seulement si son champs des vitesses est constitué de vecteurs antisymétriques.*

2 Sous variétés

2.1 Definitions

Définition 2.1 (Sous variété) *$X \subset \mathbb{R}^n$ est une **sous variété** de dimension d est de classe C^r, si $\forall x \in X$, il existe un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$, pour tout ouvert V de $\mathbb{R}^n$ contenant 0, il existe un C^r difféomorphisme $\varphi : U \to V$, telle que*

$$\varphi(X \cap U) = \mathbb{R}^d \cap V \ .$$

Définition 2.2 *U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^r, $r \geq 1$, $x \in U$, f est une **submersion** en x si $T_x f$ est surjective. Soit $y \in \mathbb{R}^{n-d}$, f est une submersion au dessus de y si elle l'est en tout point de $f^{-1}(\{y\})$.*

Théorème 2.1 (Des submersions) *U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^r. Si f est une submersion au dessus de y, alors $f^{-1}(y)$ est une sous variété de classe C^r et de dimension d de $\mathbb{R}^n$, ou alors $f^{-1}(y) = \emptyset$.*

Définition 2.3 *$f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^r est une **immersion** si $T_x f$ est injective.*

Théorème 2.2 (Des immersions) *Si $f : U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ est une immersion en x de classe C^r, alors il existe un voisinage U' de x telle que $f(U')$ est une sous variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$.*

Théorème 2.3 (Sard) *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ est de classe C^∞, f est une submersion au dessus de presque tout point, au sens de Lebesgue.*

Théorème 2.4 (Du rang constant) *$f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ de classe C^r. Si le rang de Tf est constant au voisinage de x, alors il existe un voisinage U' de x tel que $f(U')$ est une sous variété de dimension $rang(Txf)$, et si $y \in f(U')$, $f^{-1}(y)$ est une sous variété de dimension $dim(ker(T_x f))$.*

2.2 Groupes classiques

Définition 2.4 (Sous variété complexe) *$X \subset \mathbb{C}^n$ est une **sous variété complexe** de dimension complexe d de $\mathbb{C}^n$ si au voisinage de tout point, X peut être redressée sur $\mathbb{C}^d$ par un difféomorphisme holomorphe. On a des théorèmes des immersions, submersions, holomorphes.*

2.3 Espace tangent

Définition 2.5 (Espace tangent) *Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ une sous variété, $x \in X$. **L'espace tangent** à X en x, est $T_xX = \{\gamma'(0), \gamma\ C^1,\ 0 \in I \to X,\ \gamma(0) = x\}$.*

Proposition 2.1 *T_xX est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension d si $X = f(U)$, f immersion, $f(0) = x$, alors $T_xX = im(T_xf)$. Si $X = f^{-1}(y)$, f submersion, alors $T_xX = ker(T_xf)$.*

Définition 2.6 (Fonctions C^r) *Soient X, Y des sous-variétés de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$ de classe C^r, soit $r' \leq r$. $f : X \to Y$, f est dite de classe $C^{r'}$, si $\forall x \in X$, f lue à travers les difféomorphismes redresants est $C^{r'}$.*

Proposition 2.2 *$f : X \to Y$ est C^r, $f : X \to Y \to \mathbb{R}^p$ est C^r si et seulement si pour tout x, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$, et $g : U \to \mathbb{R}^p$ de classe C^r telle que $g_{|X\cap U} = f_{|X\cap V}$.*

Définition 2.7 *X, Y sous variétés, $f : X \to Y\ C^1$, $T_xf : T_xX \to T_{f(x)}Y$ est définie par $v \in T_xX$, $v = \gamma'(0)$,*

$$T_xf(v) = (f \circ \gamma)'(0) \in T_{f(x)}Y\ .$$

2.4 Intersection de sous variétés

Définition 2.8 (Transversalité) *E, F sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, ils sont dits transverses si $E+F = \mathbb{R}^n$. X, Y sous variétés de $\mathbb{R}^n$, X et Y sont dits transverses si $\forall x \in X \cap Y$, les espaces tangents en x à X et Y sont transverses. Si $f : X \to \mathbb{R}^n$ est C^1, f est transverx à y si, $\forall x \in f^{-1}(Y)$, on a $Im(T_xf)$ est transverse à $T_{f(x)}(Y)$.*

Théorème 2.5 *i) Soit X, Z des sous variétés de classe C^1, $f : X \to Z^n$ de classe C^1. Si f est transverse à Y, alors $f^{-1}(Y)$ est soit vide, soit une sous variété de codimension $codim_X f^{-1}(Y) = codim_{Z^n}(Y)$*

ii) Cas particulier, X, Y sous variétés transverses de Z ($\forall x \in X \cap Y, T_xX + T_xY = T_xZ$), alors $X \cap Y$ est une sous variété à la fois de X et de Y.

iii) Soienrt X, P, Z des sous variétés à Rennes. Soit $Y \subset Z$ une sous variétés, soit $F : X \times P \to Z$, on note $F_p : X \to$, $F_p(x) = F(x, p)$. On s'intéresse à la famille des sous-ensembles $F_p(x)$ et à son intersection avec Y, plus exactement $F_p^{-1}(Y)$. Si F_p est transverse à Y et $dim(X) + dim(Y) = dim(Z)$, alors $F_p^{-1}(Y)$ est un ensemble discret des points qui dépendent différentiablement de p.

2.5 Transversalité

Théorème 2.6 (Lemme de transversalité de Thorn) *Soient X, Y, P des sous variétés de $\mathbb{R}^n$, soit $Y \subset Z$ une sous variété. Soit $F : X \times P \to Z$. toutes les variétés sont C^∞. On suppose F transvers à Y, alors pour tout $p \in P$, F_p est transverse à Y.*

Définition 2.9 (Morse) *Soit f de classe C^2 au voisinage de 0 à valeurs réelles, telle que 0 est un point critique $T_0f = 0$, 0 est un point critique non dégénéré, l'application T_f est transverse à la sous variété $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ en 0, $T_f : x \to (x, T_xf)$.*

Définition 2.10 (fonction de morse) *X sous variété de classe C^2, $f : X \to \mathbb{R}$ de classe C^2, f est une **fonction de morse** si tous ses points critiques sont non dégénérés.*

Lemme 2.1 (Morse) *Soit f de classe C^2 au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, on suppose que 0 est un point critique non dégénéré, alors il existe un difféomorphisme local φ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$. Alors, $T_0\varphi = Id$, et $f(x) = f(0) + q(\varphi(x))$, q forme quadratique non dégénérée.*

Théorème 2.7 *Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ une sous variété de classe C^∞, pour presque toute forme linéaire $l \in \mathbb{R}^{n*}$, la restriction $l_{|X}$ est une fonction de morse sur X.*

3 Variétés

3.1 Definitions

Définition 3.1 (Atlas, carte) *Soit X un espace topologique. Un atlas de classe C^r de dimension n pour X est la donnée d'un recouvrement de X par des ouverts U_i, et pour tout i d'un homéomorphisme $\varphi_i : U_i \to V_i$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ tels que, $\forall i, j$ tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} = \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ est un C^1 difféomorphisme. Les φ_i s'appellent les cartes de l'atlas, les U_i sont les domaines de l'atlas. $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ sont les changements de cartes. 2 atlas (U_i, φ_i), et (W_α, ψ_α), sont compatibles si les $\psi_\alpha \circ \varphi_i^{-1}$ sont des C^1 difféomorphismes.*

Définition 3.2 (Structure différentielle) *Une structure différentielle sur X, c'est une classe d'équivalence d'atlas compatibles. Cette définition équivaut à la donnée de l'atlas maximal de toutes les cartes compatibles avec un atlas donné.*

Définition 3.3 (Variété) *Une variété de dimension d de classe C^r est la donnée d'un espace topologique séparé, à base dénombrable d'ouverts et d'une structure différentielle*

Lemme 3.1 *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$ de classe C^r, $\in U$ où f est une immersion en U, $\exists U'$ voisinage de U tel que $f(U')$ est une sous variété et f un C^r difféomorphisme de U' sur $f(U')$.*

3.2 espace projectif

Définition 3.4 (Espace projectif) *L'espace projectif réel (resp. complexe) de dimension n est $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = \{$ droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}\}$.*

Définition 3.5 (Transformation projective) *Si $M \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ est inversible, alors M induit une bijection de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ appellée transformation projective.*

$$f_M = f_{M'} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, M' = \lambda M \ .$$

Le groupe $GL_{n+1}(\mathbb{R})/\mathbb{R}^* I_{n+1} = \mathbb{P}GL_{n+1}(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ fidèlement (i.e. $f_M = Id_{\mathbb{P}_n(\mathbb{R})} = S(M) = \mathbb{R}$ de $\mathbb{P}GL_n(\mathbb{R})$

Définition 3.6 (Sous variété linéaire) *Si $F \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est un sous-espace vectoriel de dimension $d+1$, $p(F) \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ s'appelle une sous variété linéaire de dimension d*

Lemme 3.2 *H_1, H_2 deux hyperplans affines de $\mathbb{R}^{n+1}$, $0 \notin H_1 \cup H_2$. Alors, $(P_{|H_1})^{-1} \circ P_{|H_2}$ est C^∞.*

3.3 Espaces quotients

Définition 3.7 *G agit librement sur X si forall $g \neq e$, $\forall x \in X$, $gx \neq x$*

Définition 3.8 (Action proprement discontinue) *G agit proprement discontinument si $\forall k$ compact, $\{g \in G, gK \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.*

Théorème 3.1 *Soit X une variété, G un groupe de difféomorphismes de X, on suppose l'action libre et proprement discontinue. Alors X/G est séparé, et il existe une unique structure différentielle sur X/G telle que $\Pi : X \to X/G$ soit un difféomorphisme local.*

Lemme 3.3 *Un atlas de cartes $\varphi_i : U_i \to V_i \subset Y$ variété à changement de cartes C^r définit une structure différentielle.*

Proposition 3.1 *X variété, G agit librement et proprement discontinument sur X, Y variété. $f : X/G \to Y$ de classe $C^r \Leftrightarrow f : X \to Y$ de classe C^r, G-invariante.*

3.4 Fibré tangent

Définition 3.9 *γ_1, γ_2 courbes C^1, $]-\varepsilon, \varepsilon[\to X$ ont même position et vitesse en 0, si $\gamma_1(0)$, $\gamma_2(0) = x$ pour toute carte $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^d$, $x \in U$, $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$*

$$TX = \{\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X/ \simeq\} \,,$$

où $\gamma_1, \simeq \gamma_2$ si ils ont la même position et vitesse en 0.

Définition 3.10 *Si $\varphi : X \to Y$ est $C^{r'}$, on défnit $T\varphi : TX \to TY, [\gamma] \to [\varphi \circ \gamma]$, $T\varphi$ est de classe $C^{r'-1}$ linéaire sur chaque fibre.*