Fiche résumée du cours de topologie

1 Topologies, continuité

1.1 Espaces topologiques

1.1.1 Définition (Topologie)

Soit E un ensemble. Une **topologie** sur E est un sous ensemble $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$, vérifiant :

i) $\emptyset \in \mathcal{O}$, et $E \in \mathcal{O}$

ii) $\forall U, V \in \mathcal{O}$, $U \cap V \in \mathcal{O}$

iii) Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{O}$, alors $\underset{i\in I}{\cup} U_i \in \mathcal{O}$

1.1.2 Définition (Espace topologique, ouvert, fermé)

Un **espace topologique** est un couple $(E, \mathcal{O})$, où E est un ensemble et $\mathcal{O}$ une topologie sur E. Un **ouvert** de $(E, \mathcal{O})$ est un élément de $\mathcal{O}$. Un **fermé** de $(E, \mathcal{O})$ est un ensemble F tel que $E - F \in \mathcal{O}$ (On endéduit que l'union fine de fermés en est un, et que l'interection quelconque defermés est un fermé.)

1.1.3 Définition (Homéomorphisme)

Soient $(E, \mathcal{O})$, $(E', \mathcal{O}')$ deux espaces topologiques.Un **homéomorphisme** de E dans E' est une applicat

1.2 Espaces métriques

1.2.1 Définition (Distance, espace métrique)

Une **distance** sur un ensemble E est une application $E \times E \to \mathbb{R}_+$, telle que, $\forall x \in E, d(x, x) = 0$, et vérifiant les axiomes de séparation, symétrie, et l'inégalité triangulaire. Un **espace métrique** est un couple (E, d), où d est une distance sur E.

1.2.2 Définition (Application k-lipschitzienne, isométrique)

Soient (E, d), (E', d') deux espaces métriques. Soit $k \geq 0$, une **application k-lipschitzienne** $f : E \to E'$ est une application telle que, $\forall x, y \in E$, $d(f(x), f(y)) \leq k.d(x, y)$.

Une **application isométrique** $f : E \to E'$ est une application telle que, $\forall x, y \in E$, $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. Une isométrie est une application isométrique bijective. Deux espaces métriques sont dits isométriques s'il existe une isométrie entre eux.

1.2.3 Définition (Topologie associée à une distance)

Soit (E, d) un espace métrique. On définit $\mathcal{O} \subset \mathscr{P}(E)$ par :

$$U \in \mathcal{O} \Leftrightarrow \forall a \in U, \exists r > 0 \mid B(a, r) \subset U$$

On obtient ainsi une topologie sur E, appellée topologie associée à d. Un espace topologique $(E, \mathcal{O})$ est dit métrisable s'il existe une distance qui engendre la topologie de E.

1.2.4 Définition (Distances équivalentes, topologiquement équivalentes)

Soit E un ensemble, et d, d' deux distances sur E.

i) On dit que d et d' sont topologiquement équivalentes si elles induisent la même topologie sur E. (ie $(E, d) \xrightarrow{Id} (E, d')$ est un homéomorphisme)

ii) On dit que d et d' sont équivalentes si $\exists c > 0$ tel que $\forall (x, y) \in E^2$, $c^{-1}d(x, y) \leq d'(x, y) \leq c.d(x, y)$

1.2.5 *Proposition*

On note $d(x,A)=\inf\limits_{y\in A} d(x,y)$. Si A est non vide, cette application est 1-lipschitzienne. On note également $V_r(A)=\{x\in E, d(x,A)<r\}$. Enfin, on note $\sup\limits_{\substack{y\in A\\ x\in A}} d(x,y)$

1.2.6 *Définition* ***(Norme)***

C'est une fonction séparée, homogène qui vérifie l'inégalité triangulaire. A chaque norme, $\|.\|$, on associe une distance $d(x,y)=\|x-y\|$. Deux normes sont équivalentes si et ssi les distances associées sont équivalentes.

1.2.7 *Définition* ***(Distances sur un produit)***

Soient (E_J, d_J) des espaces métriques, pour $J=1..N$. Soit $E=E_1\times E_2\times..\times E_N$. Pour $p\in[1;+\infty[$, si $x=(x_1..x_n), y=(y_1..y_n)\in E$, on définit

$$d_p(x,y)=(\sum_{J=1}^{N} d_J(x_J,y_J)^p)^{1/p}$$

et

$$d_\infty(x,y)=\max_{J=1..N} d_J(x_J,y_J)$$

1.2.8 *Définition* ***(pseudo-distance)***

Soit E un ensemble. Une **pseudo distance** sur E est une application vérifiant les mêmes axiomes qu'une distance, sauf la séparation. Une famille de pseudo distance (d_i) est dite **séparante** si

$$d_i(x,y)=0\,\forall i \Rightarrow x=y$$

Une **semi-norme** est une application vérifiant $\|0\|=0$, au lieu de $\|x\|=0\Rightarrow x=0$. Une famille de pseudo normes est dite **séparante** si la famille de pseudo distances associées est séparante, ie le seul vecteur $x\in E$ tel que $\|x\|_i=0\,\forall i$ est 0

1.2.9 *Définition* ***(Topologie associée à une famille de pseudo distances)***

Soit E un ensemble, et $(d_i)_{i\in I}$ une famille de pseudo distances sur E. On définit $\mathcal{O}\subset\mathscr{P}(E)$, par

$$U\in\mathcal{O}\Leftrightarrow\forall a\in U,\exists r>0,\exists J\subset I,\text{fini},|\bigcap_{i\in J} B_{d_i}(a,r)\subset U$$

On définit ainsi une topologie sur E.

1.3 Topologie engendrée, base d'ouverts

1.3.1 *Définition* ***(Topologie engendrée)***

Soit E un ensemble,$\Sigma=\{(A_i)_{i\in I}\}$ un ensemble de parties de E. Pour tout $J\subset I$ fini, on pose $A_J=\bigcap\limits_{i\in J} A_i$. On note $\mathcal{O}\subset\mathcal{P}(E)$ donné par les réunions quelconques de A_J,avec les $J\subset I$ finis.

$\mathcal{O}$ ainsi défini est une topologie sur E, appellée topologie engendrée par Σ. On dit que Σ est une prébase de la topologie $\mathcal{O}$

1.3.2 *Définition* ***(Base d'ouverts)***

Soit $(E,\mathcal{O})$ un espace topologique. Une base d'ouverts de la topologie $\mathcal{O}$ est une famille $\mathscr{B}$ telle que tout ouvert de $\mathcal{O}$ soit réunion d'éléments de $\mathscr{B}$.

De manière équivalente, $\mathscr{B}$ base de $\mathcal{O}\Leftrightarrow\mathscr{B}\subset\mathcal{O}$ et $\forall U\in\mathcal{O},\forall x\in U,\exists B\in\mathscr{B}\mid x\in B\subset U$. On dit que B est à base dénombrable d'ouverts si il existe une base dénombrable d'ouverts.

Une prébase est une base si $\forall P_1,P_2$ dans cette prébase, $\forall x\in P_1\cap P_2$, $\exists P'\subset P_1\cap P_2, x\in P'$ et tel que P' est dans la prébase.

1.3.3 *Proposition*

Soit $(E,\mathcal{O})$ un espace topologique, et soit $\mathscr{B}\subset\mathcal{P}(E)$. Supposons que $\bigcup\limits_{B\in\mathscr{B}} B=E$ et que, $\forall U,V\in\mathscr{B}$, $\forall x\in U\cap V$, $\exists\omega\in\mathscr{B},\omega\subset U\cap V$, et $x\in\omega$. Alors, $\mathscr{B}$ est une base d'ouverts de la topologie qu'elle engendre.

1.4 Voisinages

1.4.1 *Définition* ***(Voisinages)***

Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, $a \in E$. On dit que V est voisinage de a s'il existe U ouvert tel que $a \in U \subset V$. On dit que V est voisinage de $A \subset E$ s'il existe U ouvert tel que $A \subset U \subset V$.

1.4.2 *Définition* ***(Filtre)***

Un filtre sur un ensemble X est une famille $\mathscr{F} \subset \mathcal{P}(X)$ vérifiant :

i) $\mathscr{F}$ est stable par intersection finie

ii) Si $U \in \mathscr{F}$, $U \subset V$, alors $V \in \mathscr{F}$

iii) $\emptyset \in \mathscr{F}$

1.4.3 *Définition* ***(Base de voisinages)***

Une base de voisinages de $x \in X$ (resp. $X \subset \mathcal{P}(X)$) est une famille $\mathscr{B} \subset \mathcal{P}(X)$ telle que :

- Tout élément de $\mathscr{B}$ est voisinage de X
- Si U est voisinage de X, alors $\exists B \in \mathscr{B}$, $B \subset U$.

1.5 Intérieur, adhérence, frontière

1.5.1 *Définition* ***(Intérieur, adhérence, frontière)***

Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, et $A \subset E$. On appelle intérieur de A la réunion de tous les ouverts inclus dans A. C'est le plus grand ouvert inclus dans A. On le note $\mathring{A}$

On appelle adhérence de A l'intersection de tous les fermés contenant A. C'est le plus petit fermé contenant A. On le note $\overline{A}$

On appelle frontière de A, notée $fr(A) = \partial A = \overline{A} - \mathring{A} = \overline{A} \cap (\overline{E - A})$

1.5.2 *Propriétés*

Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, et $A \subset E$.

i) $\mathring{A}$ est un ouvert, et $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$

ii) $\overline{A}$ est un fermé, et $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

iii) $A \mathring{\cap} B = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

iv) $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset A \mathring{\cup} B$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

v) $E - \mathring{A} = \overline{E - A}$ et $E - \overline{A} = E \mathring{-} A$

1.5.3 *Définition* ***(Partie dense)***

$A \subset E$ est dense si $\overline{A} = E$. Cette définition est équivalente à "tout ouvert non vide de E rencontre A", ou encore " tout ouvert non vide d'une base d'ouverts de E rencontre A".

1.5.4 *Définition* ***(Espace séparable)***

Un espace topologique est **séparable** s'il existe une partie dénombrable dense.

1.5.5 *Proposition*

Tout espace topologique à base dénombrable d'ouvert est séparable.

1.6 Espaces topologiques séparés

1.6.1 *Définition* ***(Espace séparé)***

Un espace topologique E est dit **séparé** si $\forall (x, y) \in E^2$, $\exists U, V$ deux ouverts/voisinages/éléments d'une base de voisinages **disjoints** tels que $x \in U$ et $y \in V$

Cette notion est invariante par homéomorphisme, et, si E est séparé, $\forall x \in E, \{x\}$ est un fermé.

1.6.2 *Proposition*

Tout espace métrique est séparé.

1.7 Applications continues

1.7.1 Définition ***(Application continue)***

Soient E et f deux espaces topologiques, $f : E \to F$, $a \in E$. On dit que f est continue en a si, $\forall V$ voisinage de $f(a)$, $\exists U$ voisinage de $a \mid f(U) \subset V$. cette définition est équivalente à : $\forall V$ voisinage de $f(a)$, $f^{-1}(V)$ est voisinage de a

Remarque : cette définition de la continuité est compatible avec celle déjà donnée dans les espaces métriques. Par ailleurs, la continuité est stable par composition.

1.7.2 Proposition

Soient E, F deux espaces topologiques, et $f : E \to F$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\forall V$ ouvert de F, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de E

ii) $\forall V$ élément d'une base d'ouverts de F, $f^{-1}(V)$ ouvert de E

iii) $\forall V$ élément d'une prébase d'ouverts de F, $f^{-1}(V)$ ouvert de E

iv) $\forall V$ fermé de F, $f^{-1}(V)$ est un fermé de E

v) $\forall a \in E$, f est continue en a

vi) $\forall A \subset E$, on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

On dit alors que f est continue sur E.

1.7.3 Proposition

- Si $f : E \to F$ est continue et surjective, et que A est dense dans E, alors $f(A)$ est dense dans F.
- Si $f : E \to F$ est bijective, f est un homéomorphisme si et seulement si f et f^{-1} sont continues.
- La composée d'homéomorphismes et d'une fonction f est continue si et seulement si f l'est.

1.7.4 Définition ***(Application ouverte, fermée)***

On dit que f est **ouverte** (resp. **fermée**) si , pour tout ouvert U (resp. fermé F), $f(U)$ est un ouvert (resp. $f(F)$ est un fermé).

1.7.5 Théorème ***(Prolongement d'Urysohn)***

Soit E un espace topologique métrisable,F un fermé de E, et $f : F \to \mathbb{R}$ continue lorsque E est muni de la topologie associée à sa distance. Il existe alors $g : E \to \mathbb{R}$, continue, telle que f et g coïncident sur F, et ayant les mêmes bornes sup et inf que f.

1.7.6 Corollaire

Soit E un espace métrisable, F un fermé de E, et U un voisinage ouvert de F. il existe $f : E \to [0,1]$, continue, telle que $f_{/F} = \widetilde{1}$, et $f_{/E-U} = \widetilde{0}$.

1.7.7 Définition ***(Espace normal)***

On dit qu'un espace topologique E est **normal** si il est séparé, et que, pour tout fermés F et G disjoints de E, il existe U,V voisinages ouverts disjoints de F et G respectivement.

1.7.8 Proposition

Tout espace topologique métrisable est normal.

1.7.9 Théorème

Soit E un espace topologique normal, F et G deux fermés de E d'intersection vide. il existe $f : E \to [0,1]$, continue, telle que $f_{/F} = \widetilde{1}$ et $f_{/G} = \widetilde{0}$

1.8 Connexité, connexité par arcs

1.8.1 *Définition **(connexité)***

Soit E un espace topologique. Les propriétés suivanyes sont équivalentes :

i) Si $A \subset E$ est à la fois ouvert et fermé, alors $A = \emptyset$ ou $A = E$

ii) Il n'existe pas de partition de E de deux ouverts non vides.

iii) Il n'existe pas de partition de E de deux fermés non vides.

iv) Si X est un espace topologique muni de la topologie discrète, et $f : E \to X$ continue, alors f est constante.

v) Toute fonction $f : E \to \{0, 1\}$ (muni de la topologie discrète) est constante

On dit alors que E est connexe.

1.8.2 *Définition **(Connexité par arcs)***

On dit qu'un espace topologique E est connexe par arcs si $\forall x, y \in E$, $\exists\gamma$ continue , $[0; 1] \to E$, vérifiant $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

2 Constuction de topologies

2.1 Comparaison de topologies

2.1.1 *Définition **(topologies fines)***

Soient $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ deux topologies sur E. On dit que $\mathcal{O}_1$ est plus fine que $\mathcal{O}_2$ si $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$.

2.1.2 *Proposition*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\mathcal{O}_1$ est plus fine que $\mathcal{O}_2$

ii) tout ouvert de $\mathcal{O}_2$ est un ouvert de $\mathcal{O}_1$

iii) tout fermé de $\mathcal{O}_2$ est un fermé de $\mathcal{O}_1$

iv) $\forall x \in E$, tout voisinage de x dans $\mathcal{O}_2$ est voisinage de x dans $\mathcal{O}_1$

v) Si $\mathcal{V}_j(x)$ désigne une base de voisinages de x pour $\mathcal{O}_j$, alors, $\forall x \in E$, $\forall V_2 \in \mathcal{V}_2(x)$, $\exists V_1 \in \mathcal{V}_1(x)$, avec $V_1 \subset V_2$

2.1.3 *Proposition*

"Plus fine que" est une relation d'ordre partiel. La topologie grossière est moins fine que toute topologie de E, alors que la topologie discrète est plus fine que toute topologie de E.

2.2 Topologie Initiale

2.2.1 *Définition **(Topologie initiale)***

Soient $(Y_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, X un ensemble, $f_i : X \to Y_i$. On appelle topologie initiale associée aux $(f_i)_{i\in I}$ la topologie la moins fine rendant les $(f_i)_i$ continues. C'est aussi l'intersection de toutes les topologies rendant les $(f_i)_i$ continues.

Dans le cas d'une famille de pseudo distances $(d_i)_{i\in I}$, la topologie associée à la famille de pseudo distances est la topologie initiale associée aux $(d_i(., y))_{i\in I, y\in E}$

2.2.2 *Proposition*

Soit Z un espace topologique, $f : Z \to X$. Lorsque X est muni de la topologie initiale associée aux $(f_i)_i$, f est continue si et seulement si les $f_i \circ f$ sont toutes continues.

2.2.3 *Proposition*

i) Soit X un espace topologique muni de la topologie initiale associée à une famille de pseudo-distances $(d_i)_{i\in I}$. Alors X est séparé si et seulement si la famille est séparante.

ii) Soit $(dn)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille séparante de pseudo distances. Alors, $d = \sum_{i=0} 2^{-n} \frac{d_n}{1+d_n}$ est une distance qui définit la même topologie que les $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$

2.3 Sous-espaces topologiques

2.3.1 *Définition* ***(Topologie induite sur A)***

Soit X un espace topologique, et $A \subset X$ un sous ensemble. Soit $J : A \hookrightarrow X$ l'injection canonique.

On appelle topologie induite sur A par la topologie de X la topologie initiale associée à J. Muni de cette topologie, on dit que A est un sous espace topologique de X.

2.3.2 *Proposition*

i) $V \subset A$ est ouvert de $A \quad \Leftrightarrow \quad \exists U$ ouvert de X tel que $V = U \cap A$

ii) $F \subset A$ est fermé de $A \quad \Leftrightarrow \quad \exists G$ fermé de X avec $F = G \cap A$

iii) Si $a \in A$, V voisinage de a dans $A \quad \Leftrightarrow \quad \exists U$ voisinage de a dans X, $U \cap A = V$

iv) $\forall$ V ouvert de A, on a V ouvert de X $\Leftrightarrow$ A ouvert de X

v) $\forall$ F fermé de A, on a F fermé de X $\Leftrightarrow$ A fermé de X

vi) Si $A \subset B \subset X$ $\overline{A}^B = \overline{A}^X \cap B$

vii) Si $f : X \to Y$ est continue, si $A \subset X$, $B \subset Y$. Si $f(A) \subset B$, alors $f_{/A} : A \to B$ est continue lorsque A et B sont munis de la topologie induite.

Ex : topologie de Schwarz

2.3.3 *Définition* ***(Point isolé)***

Soit E un espace topologique, et $A \subset E$. On dit qu'un point de A est isolé dans A si $\{a\}$ est un ouvert de A

A est discret (sa topologie est la topologie discrète) si $\forall a \in A$, $\{a\}$ est ouvert.

2.3.4 *Proposition* ***(propriété de faisceau des fonctions continues)***

Soit E un espace topologique, $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts telle que $E = \bigcup_{i\in I} U_i$. Si $f : E \to F$ est donnée, avec F un espace topologique, f est continue si et seulement si, $\forall i \in I$, $f_{/U_i} : U_i \to F$ est continue.

2.3.5 *Propriétés de la topologie induite*

Soit E un espace topologique, $A \subset E$, A muni de la topologie induite.

i) E séparé $\Rightarrow$ A séparé

ii) E à base dénombrable d'ouverts $\Rightarrow$ A à base dénombrable d'ouverts

iii) E métrisable séparable $\Rightarrow$ A métrisable séparable

iv) E métrisable $\Rightarrow$ A métrisable

Remarque : En dehors du cas des espaces métriques, E séparable $\not\Rightarrow$ A séparable.

2.3.6 *Proposition*

Soit X un espace topologique localement métrisable (tout point admet un voisinage métrisable). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) X est métrisable et séparable

ii) X est séparable à base dénombrable d'ouverts

iii) $\exists \Phi : X \to P^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ homéomorphisme de X sur $\Phi(X)$, où $P^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \text{ et } (\sum x_n^2)^{\frac{1}{2}} < +\infty\}$.

2.3.7 *Définition* ***(Connexité d'un sous espace)***

Soit X un espace topologique, $A \subset X$. on dira que A est connexe si A muni de la topologie induite est connexe.

2.3.8 Propriétés de la connexité

i) Si $f : A \to Y$ est continue et si A est connexe, alors $f(A)$ est connexe
ii) si $A, B \subset X$ et si $A \subset B \subset \overline{A}$, A connexe $\Rightarrow$ B connexe
iii) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties connexes, et s'il existe $i_0 \in I$ tel que $\forall i \in I,\ A_i \cap A_{i_0}$, Alors $\underset{i\in I}{\cup} A_i$ est connexe. (CP : $\underset{i\in I}{\cap} A_i \neq \emptyset$)

2.3.9 Propriétés de la connexité par arcs

i) Si $f : A \to Y$ est continue et si A est connexe par arcs, alors $f(A)$ est connexe par arcs
ii) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties connexes par arcs, et s'il existe $i_0 \in I$ tel que $\forall i \in I,\ A_i \cap A_{i_0}$, Alors $\underset{i\in I}{\cup} A_i$ est connexe par arcs.

2.3.10 Définition *(concaténation)*

Soit X un espace topologique, $\Gamma_1 : [0;1] \to X$, continue, et $\Gamma_2 : [0;1] \to X$, continue, avec $\Gamma_1(1) = \Gamma_2(0)$. La concaténation de Γ_1 et de Γ_2 est le chemin continu $\Gamma : [0;1] \to X$, défini par :

$$\Gamma(t) = \Gamma_1(2t) \forall t \in \left[0;\frac{1}{2}\right], \text{ et } \Gamma(t) = \Gamma_2(2t-1) \forall t \in \left[\frac{1}{2};1\right]$$

2.3.11 Définition *(Convexité locale)*

On dit qu'un espace topologique X est localement convexe (resp. cpa) si tout point admet un voisinage connexe (resp. cpa)

2.3.12 Proposition

Soit X un espace topologique localement connexe par arcs. Alors :

$$X \text{ connexe } \Leftrightarrow X \text{ connexe par arcs}$$

2.3.13 Définition *(Composantes connexes, connexes par arcs)*

Soit X un espace topologique. On définit la relation d'équivalence R (resp. $\widetilde{R}$) sur X par

$$xRy(resp.\widetilde{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \exists A \subset X \text{ connexe (resp. connexe par arcs) tel que } x, y \in A$$

R et $\widetilde{R}$ sont des relations d'équivalence. On appelle composantes connexes (resp. connexes par arcs) les classes d'équivalence de R (resp. $\widetilde{R}$). Par ailleurs, la classe de x est la plus grande partie connexe (resp. connexe par arcs) contenant x.

2.3.14 Proposition

i) Les composantes connexes sont fermées
ii) Si X est localement connexe par arcs, $C(x) = \widetilde{C}(x)$
iii) Si X est localement connexe, les composantes connexes sont ouvertes
iv) les composantes connexes par arcs forment une partition de X

2.4 Topologie produit

2.4.1 Définition *(Topologie produit)*

Soit $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'espaces topologiques. Soit $X = \prod_{i\in I} X_i$, et soit $\begin{array}{cccc} p_i & : & X & \to & X_i \\ & & x & \mapsto & x_i \end{array}$. la topologie produit sur X est la topoologie initiale associée aux p_i.

2.4.2 Propriétés

Une base d'ouverts de X est donnée par les $\underset{i\in J}{\cap} p_i^{-1}(U_i)$, où $J \subset I$ fini et U_i est un ouvert de X_i. De manière équivalente, une base d'ouverts de X est formée par les ouverts $\prod_{i\in J} U_i$ tel que $\exists J$ fini , et $\forall i \in I - J,\ U_i = X_i$.

2.4.3 *Propriétés*

i) Si Z est un espace topologique, et $g : Z \in X$, alors

$$g \text{ est continue } \Leftrightarrow p_i \circ g \text{ est continue } \forall i$$

Si $\mathcal{B}_i$ est une base d'ouverts de X_i, les $\prod_{i \in I} U_i$,(où il existe $J \subset I$ fini, avec $U_i = X_i$ si $i \in I - J$, $U_i \in \mathcal{B}_i$ si $i \in I$) est une base d'ouverts de X

ii) Si $a = (a_i)_{i \in I} \in X$, une base de voisinages de a est formée par les $\prod_{i \in I} U_i$, pour $J \subset I$ fini, et tel que, $\forall i \in J$, U_i est voisinage de a_i, et $\forall i \in I - J$, $U_i = X_i$

iii) Supposons que $I = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$ une partition de I. Soit $Y_\alpha = \prod_{i \in I_\alpha} X_i$, et soit

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & \prod_{i \in I} X_i & \rightarrow & \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha \\ & & x = (x_i)_{i \in I} & \mapsto & (y_\alpha)_{\alpha \in A} \end{array}$$

où $y_\alpha = (x_i)_{i \in I_\alpha}$. Alors, ϕ est un homéomorphisme.

iv) Soit $A_i \subset X_i$, Alors $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$

2.4.4 *Proposition*

i) Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. Si tous les X_i sont séparés, alors $\prod_{i \in I} X_i$ est séparé. Si, réciproquement, X_i est non vide $\forall i$, et que $\prod_{i \in I} X_i$ est séparé, alors chaque X_i est séparé.

ii) Si I est dénombrable et si chaque X_i est un espace métrisable, alors $\prod_{i \in I} X_i$ est métrisable.

2.5 Topologie limite projective

2.5.1 *Définition* ***(Topologie limite projective)***

Soit I un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$, et soit X_i une famille d'espaces topologiques. Lorsque $i < j$, on se donne $f_{ij} : X_j \rightarrow X_i$ continue. On suppose que, $\forall i \in I$, $f_{ii} = Id$, et que, $\forall i \leq k \leq j$, $f_{ij} = f_{ik} \circ f_{kj}$. On dit alors que $((X_i)_{i \in I}, (f_{ij})_{i<j})$ est un **système projectif**.

On appelle **limite projective** des $(X_i)_{i \in I}$, notée

$$\varprojlim_i X_i = \{x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i, \quad \forall i < j, \quad f_{ij}(x_j) = x_i\} \subset \prod_{i \in I} X_i$$

Notons p_i la restriction à $\varprojlim_i X_i$ de la $i^{\text{ème}}$ projection.

On appelle **topologie limite projective** sur $\varprojlim_i X_i$ la topologie initiale associée aux $(p_i)_i$. C'est aussi la topologie induite sur $\varprojlim_i X_i$ par la topologie produit.

2.5.2 *Définition* ***(Anneau des entiers p-adiques)***

On appelle **anneau des entiers p-adiques**

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_n \frac{\mathbb{Z}}{p^n \mathbb{Z}} = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, \quad x_n \in \frac{\mathbb{Z}}{p^n \mathbb{Z}} \quad \forall n\}$$

et où la classe de x_{n+1} dans $\frac{\mathbb{Z}}{p^n \mathbb{Z}}$ est égale à x_n. On munit $\mathbb{Z}_p$ de la topologie limite projective.

2.6 Topologie finale

2.6.1 *Définition* ***(Topologie finale)***

Soit X un ensemble, $(Y_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques, et $f_i : Y_i \rightarrow X$. On appelle **topologie finale sur X** la topologie la plus fine rendant les f_i continues.

2.6.2 *Définition* ***(Topologie faible sur une réunion)***

Soit X un ensemble, $(X_i)_{i \in I}$ famille de parties de X_i. Notons $f_i : X_i \hookrightarrow X$ l'injection canonique. Supposons que chaque X_i est muni d'une topologie. on appelle topologie faible sur X la topologie finale associée aux f_i.

2.6.3 Proposition

Soit X muni de la topologie faible.

i) Si I est dénombrable, et si $\forall i \in I$, X_i est séparable, alors X est séparable.

ii) $\forall i, X_i$ séparé $\not\Rightarrow$ X séparé

2.6.4 Proposition

Soit $U \subset D(\Omega)$ un sous espace convexe, alors U est ouvert pour la topologie de Schwartz si et seulement si U est un ouvert pour la topologie faible.

2.6.5 Corollaire

Soit $l : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. Alors l est continue lorsque $D(\Omega)$ est muni de la topologie de Schwartz si et seulement si elle est continue vis à vis de la topologie faible.

2.6.6 Définition ***(Topologie quotient)***

Soit X un ensemble, R une relation d'équivalence sur X. Soit X/R l'ensemble quotient, et $\pi : X \to X/R$ la surjection canonique. Si f est donnée, $f : X \to Y$, constante sur les classes d'équivalences, alors $\exists! \overline{f} : X/R \to Y$ vérifiant $\overline{f} \circ \pi = f$. On appelle topologie quotient sur X/R la topologie finale associée à π.

2.6.7 Proposition

i) U ouvert de $X/R \Leftrightarrow \pi^{-1}(U)$ ouvert de X

ii) F fermé de $X/R \Leftrightarrow \pi^{-1}(F)$ fermé de X

iii) $f : X/R \to Z$ est continue si et seulement si $f \circ \pi X \to Z$ est continue

2.6.8 Proposition

$A \subset X$ est saturé pour R si $A = \pi^{-1} \circ \pi(A)$, i.e. $\forall x \in A, \forall y \in X$

$$xRy \Rightarrow y \in A$$

2.6.9 Proposition

X/R est séparé si et seulement si $\forall x, y \in X$, $xnon - Ry$, $\exists U$ ouvert saturé contenant x et V ouvert saturé contenant y tels que $U \cap V = \emptyset$

CF : suspension

2.6.10 Définition ***(Cas de la limite inductive)***

On définit sur $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ la relation d'équivalence

$$x_i \sim x_j \Leftrightarrow \text{ Soit } j \leq i \text{ et } f_{ij}(x_j) = x_i, \text{ soit } i \leq j \text{ et } f_{ji}(x_i) = x_j$$

On appelle limite inductive des X_i l'ensemble $\varinjlim_i X_i = \bigsqcup_{i \in I} X_i / \sim$

Soit $\widetilde{f_i} : X_i \to \bigsqcup_{i \in I} X_i$ l'injection canonique, et soit $\pi : \bigsqcup_{i \in I} X_i \to \varinjlim_i X_i$. Soit alors $f_i = \pi \circ \widetilde{f_i}$. on appelle topologie limite inductive sur $\varinjlim_i X_i$ la topologie finale associée aux $(f_i)_{i \in I}$. c'est aussi la topologie quotient de la topologie connue sur $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ (i.e) la topologie finale associée aux $(\widetilde{f_i})_{i \in I}$

2.7 Groupes, anneaux, et corps topologiques

2.7.1 Définition ***(Groupe topologique)***

Un **groupe topologique** est un groupe G muni d'une topologie rendant le produit et le passage à l'inverse continus.

2.7.2 Définition ***(morphisme de groupes topologiques)***

Un **morphisme (resp. isomorphisme) de groupes topologiques** entre G et G' est un morphisme (resp. isomorphisme) continu pour la topologie du groupe.

2.7.3 Proposition

Soient G et G' deux groupes topologiques.

i) Soit $\varphi : G \to G'$. φ est continue si et seulement si elle est continue en e_G

ii) Si G est connexe, alors G est engendré par n'importe quel voisinage de E

iii) Soit G_0 la composante connexe de e, alors G_0 est un sous-groupe distingué de G ($\forall g \in G, g^{-1}G_0g = G_0$)

2.7.4 Définition ***(Anneau topologique)***

Un **anneau topologique** est un anneau muni d'une topologie telle que la somme, l'opposé et le produit soient continus. Pour un **corps topologique**, l'inverse est également continu.

2.7.5 Définition ***(Espace vectoriel topologique)***

Un **espace vectoriel topologique** est un espace vectoriel muni d'une topologie telle que la somme et la multiplication par un scalaire soient continus. Un **morphisme (resp. isomorphisme) d'espaces vectoriels topologiques** est une application linéaire (resp. linéaire et bijective) qui est continue pour la topologie de l'espace vectoriel (resp. qui est un homéomorphisme).

2.7.6 Proposition

Un sous espace vectoriel d'un e.v.t. est topologique lorsqu'il est muni de la topologie induite. Un produit d'evt est un evt, et si C est une partie convexe d'un evt, C est en particulier connexe par arcs. Enfin, si f est linéaire entre deux espaces topologiques, f est continue si et seulement si elle est continue en 0.

2.7.7 Définition ***(Evt localement convexe)***

Un espace vectoriel est localement convexe est un evt dans lequel 0 admet une base de voisinages convexes. (il est équivalent de demander que tt point admette une base de voisinages convexes.

2.7.8 Définition ***(Jauge)***

Soit E un evt, et C un voisinage convexe de 0. Pour $x \in E$, on pose $\|x\|_C = inf\{t > 0, \frac{1}{t}x \in C\}$. $\|x\|_C$ est appellée jauge associée à C

2.7.9 Propriétés élémentaires

i) $\frac{x}{t} \in C \quad \Rightarrow \quad t > \|x\|_C$

ii) si $t > \|x\|_C$, alors $\frac{x}{t} \in C$

2.7.10 Lemme

La jauge vérifie les propriétés suivantes

i) $\forall x, y \in E$, on a $\|x+y\|_C \leq \|x\|_C + \|y\|_C$, et $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$, $\|\lambda x\|_C \lambda . \|x\|_C$

ii) $x \mapsto \|x\|_C$ est continue

iii) Si C est ouvert, $C = \{x, \|x\|_C <\}$

iv) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et si C est symétrique (ie $x \in C \Rightarrow_x \in C$), alors $\|.\|_C$ est une semi norme.

v) Si C' est un voisinage convexe de 0, et si $C' \subset C$, on a $\|x\|_C \leq \|x\|_{C'}$

vi) Si $(C_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille de voisinages convexes de 0, et si $\underset{\alpha \in A}{\cap} C_\alpha$ est voisinage de 0, alors

$$\|x\|_{\cap C_\alpha} = \underset{\alpha \in A}{sup}(\|x\|_{C_\alpha})$$

vii) $\forall \lambda > 0$, $\|.\|_{\lambda C} = \lambda^{-1}\|.\|_C$

2.7.11 Théorème

Soit E un espace vectoriel topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) E est localement convexe.

ii) La topologie de E est définie par une famille de semi normes.

On a aussi l'équivalence :

i) E est localement convexe, à base dénombrable de voisinages.

ii) La topologie de E est définie par une famille dénombrable de semi normes.

2.8 Continuité des applications linéaires et multilinéaires sur un espace vectoriel normé

2.8.1 Définition ***(norme d'une application n-linéaire)***

On définit la norme d'une application n-linéaire u par :

$$\|u\|_{\mathscr{L}(E_1..E_n)}=\sup_{\substack{i=1..n\\ x_i\neq 0}}\frac{\|u(x_1..x_n)\|_F}{\prod_{i=1}^{n}\|x_i|_{E_i}}=\sup_{0<\|x_i\|_{E_i}\leq 1}\|u(x_1..x_n)\|_F=\sup_{\|x_i\|_{E_i}=1}\|u(x_1..x_n)\|_F$$

2.8.2 Proposition

Soit $u : E_1\times E_2\times ...\times E_n\to F$ une application n-linéaire.

i) u continue $\Leftrightarrow$ u continue en 0 $\Leftrightarrow$ $\|u\|_{\mathscr{L}(E_1..E_n)}<\infty$

ii) $\|u\|_{\mathscr{L}(E_1..E_n)}$ est une norme sur l'espace des applications n-linéaires continues, noté $\mathscr{L}(E_1..E_n,F)$

iii) Si G est un evn, $u\in\mathscr{L}(E_1..E_n,F)$, $v\in\mathscr{L}(F,G)$, alors $v\circ u\in\mathscr{L}(E_1..E_n,G)$ et on a

$$\|v\circ u\|_{\mathscr{L}(E_1..E_n,G)}=\|u\|_{\mathscr{L}(E_1..E_n,F)}.\|v\|_{\mathscr{L}(F,G)}$$

2.9 Topologie faible et topologie faible-$*$

2.9.1 Définition ***(Topologie faible)***

On appelle **topologie faible**, notée $\sigma(E,E')$ la topologie initiale associée aux fonctions de E', avec $E'=\{l\in E^*$ continues $\}$ le dual topologique de E.

2.9.2 Proposition

$\sigma(E,E'$ est la topologie la moins fine rendant tout élément de E' continue. Si on appelle topologie forte la topologie donnée sur E, la topologie forte est plus fine que la topologie faible.

une base de voisinages de 0 pour la topologie faible est formée par les $V_{L,\varepsilon}=\{x\in E, |l(x)|<\varepsilon,\quad\forall l\in L\}$ avec $L\subset E'$ fini et ε décrivant $\mathbb{R}_+^*$.

En dimension finie, les deux topologies, fortes et faibles, coïncident.

2.9.3 Définition ***(Topologie faible-$*$)***

On appelle **topologie faible-$*$**, notée $\sigma(E',E)$ sur E' la topologie initiale associée aux $\begin{array}{cccc}\varphi_x & : & E' & \to & \mathbb{K}\\ & & l & \mapsto & l(x)\end{array}$, $x\in E$

2.9.4 Proposition

$\sigma(E',E)$ est la moins fine des topologies rendant continues les φ_x

une base de voisinages de 0 pour la topologie faible est formée par les $W_{X,\varepsilon}=\{l\in E', |l(x)|<\varepsilon,\quad\forall x\in X\}$ avec $X\subset E$ fini et ε décrivant $\mathbb{R}_+^*$.

2.9.5 Proposition

La topologie faible-$*$ est séparée

2.9.6 *Définition (Norme quotient sur un evn)*

Soit E un espace vectoriel normé, et F un sous espace vectoriel de E. Pour $\overline{x} \in E/F$. On pose $\|\overline{x}\|_{E/F} = \inf\limits_{y \in F}(\|x+y\|)$, qui est une semi norme.

2.9.7 *Proposition*

Lorsque F est un fermé, $\|.\|_{E/F}$ est une norme.

3 Limites et valeurs d'adhérence

3.1 Limites

Soient X,Y deux espaces topologiques. $A \subset B \subset X$, $a \in \overline{A}$, et $f : B \to Y$

3.1.1 *Définition (Limite)*

On dit que f admet l pour limite quand $x \underset{x \in A}{\to} a$ si

$$\forall V \in \mathcal{V}_l, \exists U \in \mathcal{V}_a, f(U \cap A) \subset V$$

3.1.2 *Proposition*

On peut remplacer tout voisinage par tout élément d'une base de voisinages. De plus, si Y est séparé, la limite, si elle existe, est unique.

3.1.3 *Proposition*

Si $a \in A$, f continue en $a \Leftrightarrow$ la limite quand $x \to a$ de f existe et vaut $f(a)$. Par ailleurs, si $f : A \to Y$ admet l pour limite $x \underset{x \in A}{\to} a$, cela reste vrai si on remplace :

i) La topologie de Y par une topologie moins fine.

ii) La topologie de X par une topologie plus fine.

Dans le cas des espaces métriques, on retrouve la définition usuelle de la limite.

3.1.4 *Proposition*

Si l est limite de f quand $x \underset{x \in A}{\to} a$, alors $l \in \overline{A}$

3.1.5 *Corollaire*

Si $f : B \to \mathbb{R}$ est telle que, $\forall x \in A, f(x) = 0$ alors si l est la limite de f quand $x \underset{x \in A}{\to} a$, $l = 0$

3.1.6 *Théorème 1 (Composition de limites)*

Soient $A \subset B \subset X$, $a \in \overline{A}$, et $f : B \to Y$, Z un espace topologique, et $A' \subset B' \subset Y$ et $g : B' \to Z$. Supposons $f(A) \subset A'$, alors, si f admet l pour limite $x \underset{x \in A}{\to} a$, g admet l' pour limite quand $y \underset{y \in A'}{\to} l$ alors, quand $x \underset{x \in A}{\to} a$, $g \circ f$ admet l' pour limite. par ailleurs, si $g : Y \to Z$ est continue en l, $g \circ f$ admet $g(l)$ pour limite quand $x \underset{x \in A}{\to} a$

3.1.7 *Théorème*

Soit X un espace topologique dans lequel tout point a une base dénombrable de voisinages. Soit $A \subset X$.

i) $a \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de A avec $x_n \to a$

ii) A fermé $\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge dans X vers a on a $a \in A$

iii) Soient $A \subset B \subset X$, $f : B \to Y$. Alors f admet l pour limite $x \underset{x \in A}{\to} a$ $\Rightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers a, $(f(x_n))_n$ converge vers l.

iv) Si $f : X \to Y$, f continue en $a \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de X qui converge vers a, $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$

3.1.8 Définition (Espace séquentiellement fermé)

On dit qu'un sous ensemble A d'un espace topologique X est **séquentiellement fermée** si toute suite convergente de A converge dans A

3.1.9 Définition (Fonction séquentiellement continue)

On dit que f est séquentiellement continue en a si $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de X qui converge vers a, on a $(f(x_n))_n \to f(a)$.

3.1.10 Proposition

Soit X un ensemble, $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, et $f_i : X \to Y_i$. Soit Z un espace topologique, $A \subset B \subset Z$, et enfin $g : B \to X$. Soit $a \in \overline{A}$. Alors, si l'on suppose X muni de la topologie initiale associée aux $(f_i)_i$. Alors :

$$\underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{g \to l} \Leftrightarrow \forall i \in I \quad \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{f_i \circ g \to f_i(l)}$$

3.1.11 Définition (Convergence des suites pour les topologies faible et faible-∗)

On note $x_n \rightharpoonup x$ la convergence pour la topologie faible, et $l_n \overset{*}{\rightharpoonup} l$la convergence pour la topologie faible-∗. Par définition, on a alors

$$x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \forall l \in E', \quad l(x_n) \to l(x) \text{ dans } \mathbb{K}$$

$$l_n \overset{*}{\rightharpoonup} l \Leftrightarrow \forall x \in E, \quad l_n(x) \to l(x) \text{ dans } \mathbb{K}$$

3.2 Valeurs d'adhérence

Soient X,Y deux espaces topologiques. $A \subset B \subset X$, $a \in \overline{A}$, et $f : B \to Y$

3.2.1 Définition (Valeur d'adhérence)

On dit que $l \in Y$ est valeur d'adhérence de f quand $x \underset{x\in A}{\to} a$ si, $\forall V$ voisinage de l, $\forall U$ voisinage de A, $f(U \cap A) \cap V \neq \emptyset$

Dans le cas des espaces métriques, on retrouve la définition usuelle.

3.2.2 Proposition

i) L'ensemble des valeurs d'adhérence de f quand $x \to a$ est $\bigcap_{U\subset\mathcal{V}_a} \overline{f(U\cap A)}$, où $\mathcal{V}_a$ est une base de voisinages de a.

ii) Si f admet l pour limite $x \underset{x\in A}{\to} a$, alors l est valeur d'adhérence, et si Y est séparé, c'est la seule.

3.3 Espaces complets

3.3.1 Définition (Suite de Cauchy)

Soit (X,d) un espace métrique, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de cauchy si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p,q) > N, d(x_p, x_q) < \varepsilon$$

3.3.2 Proposition

i) Toute suite de Cauchy est bornée.

ii) Toute suite convergente est de Cauchy.

iii) Toute suite de cauchy ayant une valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence.

3.3.3 Définition ***(Uniforme continuité)***

$f : (X, d) \to (Y, d')$ est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in X, d(x, y) < \eta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

3.3.4 Définition ***(Uniforme équivalence)***

On dit que deux distances d et d' sont **uniformément équivalentes** sur un ensemble X si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in X, d'(x, y) < \eta \Rightarrow d(x, y) < \varepsilon$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in X, d(x, y) < \eta \Rightarrow d'(x, y) < \varepsilon$$

ie si $Id : (X, d) \to (X, d')$ et $Id : (X, d') \to (X, d)$ sont uniformément continues.

3.3.5 Proposition

i) Si $f : (X, d) \to (Y, d')$ est uniformément continue, elle transforme une suite de cauchy de X en suite de cauchy de Y.

ii) Si d et d' sont deux distances uniformément équivalentes sur X, elles ont les mêmes suites de Cauchy.

3.3.6 Définition ***(Suites de Cauchy dans un groupe topologique)***

Si G est un groupe topologique, on peut définir la notion de suite de cauchy par $\forall V$ voisinage de e_G $\exists n_0$, $\forall p, q \geq n_0, x_p x_q^{-1} \in V$

Espaces complets

3.3.7 Définition ***(Espace complet)***

On dit qu'un espace métrique est complet si toute suite de Cauchy converge.

3.3.8 Proposition

Si $f : (X, d) \to (Y, d')$ est uniformément continue, bijective, et d'inverse uniformément continu, alors

$$(X, d) \text{ complet } \Leftrightarrow (Y, d') \text{ complet}$$

Si d et d' sont uniformément équivalentes, alors

$$(X, d) \text{ complet } \Leftrightarrow (X, d') \text{ complet}$$

3.3.9 Définition ***(Espaces de banach, de Fréchet)***

i) On appelle espace de banach tout espace vectoriel complet

ii) On appelle espace de Fréchet tout espace vectoriel topologique localement convexe séparé à base denombrable de voisinages de 0, qui est complet.

3.3.10 *Proposition*

Soit (E,d) un espace métrique.

i) Si E est complet, $F \subset E$ est un sous espace fermé F est complet.

ii) Si F muni de la topologie induite est complet, alors F est fermé.

iii) Le produit dénombrable d'espaces métriques complets est complet

iv) Un produit fini d'espaces de Banach est un espace de banach.

3.3.11 *Proposition*

Soit E un espace vectoriel topologique normé. On a alors

E banach $\Rightarrow$ toute série absolument convergente de E est convergente

3.3.12 *Corollaire*

Soit E un banach, F un sous espace vectoriel fermé de E. Alors, E/F est un banach

3.3.13 *Proposition*

Soit E un espace vectoriel topologique **de dimension finie** sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $l : E \to \mathbb{K}$ linéaire. On a alors

$$l \text{ continue} \Leftrightarrow Ker(l) \text{ est fermé}$$

3.3.14 *Proposition*

Soit E un espace vectoriel normé séparé de dimension finie n. Alors, E est homéomorphe à $\mathbb{K}^n$ muni de la topologie produit.

3.3.15 *Corollaire*

Si E est un espace vectoriel topologique séparé, si F est un sous espace de dimension finie n de E, F est toujours fermé.

3.3.16 *Corollaire*

Soit E un espace vectoriel topologique séparé de dimension finie , F un espace vectoriel topologique . Soit $u : E \to F$ linéaire, alors u est continue.

3.3.17 *Définition **(contraction)***

Soit (X,d) un espace métrique, et $f : X \to X$. On dit que f est contractante si il existe $k < 1$ tel que f soit k-lipschitzienne.

3.3.18 *Théorème **(Point fixe)***

Soit (X,d) est complet, et $f : X \to X$ contractante, alors f a un unique point fixe, limite de toute suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$, avec x_0 quelconque

3.3.19 *Théorème **(Point fixe à paramètre)***

Soit (X,d) est complet, et Λ est un espace topologique. Soit $f : X \times \Lambda \to X$. On suppose f contractante de rapport indépendant de $\lambda \in \Lambda$, et que $\forall x \in X$, $f(x,.)$ est continue. Alors, f admet pour tout $\lambda \in \Lambda$ un unique point fixe $x(\lambda)$. Par ailleurs, $x : \lambda \mapsto x(\lambda)$ est continue.

4 *Compacité*

4.1 Espaces compacts

4.1.1 Définition ***(Recouvrement)***

Soit X un espace topologique, et $B \subset X$. Un **recouvrement** de B est une famille $(A_i)_i$ de parties de X telles que $B \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. On dit que le recouvrement est ouvert (resp. fermé) si tous les A_i le sont.

Un sous recouvrement de B est la donnée de $J \subset I$, tel que $B \subset \bigcup_{i \in J} A_i$. on dit que le sous recouvrement est fini si J est fini.

4.1.2 Définition ***(Espace compact)***

Soit X un espace topologique. On dit que X est **compact** si X est séparé, et que tout recouvrement de X admet un sous-recouvrement fini.

4.1.3 Théorème ***(Fermés emboités)***

Si $(F_n)_n$ est une suite de fermés non vides d'un espace compact X avec, $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} \subset F_n$, alors $\cap F_n \neq \emptyset$

4.1.4 Proposition

La notion d'espace compact est invariante par homéomorphisme. Un espace discret est compact si et seulement si il est fini.

4.1.5 Définition ***(Compacité sur un sous espace)***

Soit X un espace topologique, $A \subset X$. On dit que A est compact si et seulement si A muni de la topologie induite est compact.

4.1.6 Proposition

i) Soit X un espace topologique, compact, et $F \subset X$ un fermé, alors F est compact.

ii) Soit X un espace topologique séparé $F \subset X$ sous espace compact, alors F est fermé.

iii) Soit X un espace topologique séparé, F_1, F_2 deux compacts de X, alors $F_1 \cup F_2$ est compact.

4.2 Compacité et valeurs d'adhérence

4.2.1 Proposition

Soit Y un compact, et Z l'ensemble des valeurs d'adhérence de f quand $x \underset{x \in A}{\longrightarrow} a$

i) Z est un compact non vide de Y

ii) $\forall V$ voisinage de Z, $\exists U$ voisinage ouvert de a, $f(U \cap A) \subset V$

iii) Si $Z = \{l\}$, l est limite de f quand $x \underset{x \in A}{\rightarrow} a$

4.2.2 Corollaire

Soit X un espace topologique compact, et $(x_n)_n$ une suite de X. Alors, $(x_n)_n$ admet une valeur d'adhérence. Par ailleurs, si cette valeur d'adhérence est unique, la suite converge vers cette valeur d'adhérence.

4.2.3 Définition ***(Espace précompact)***

Soit (X, d) un espace métrique. On dit que (X, d) est précompact si $\forall \varepsilon > 0$, on peut recouvrir X par un nombre fini de $B(x, \varepsilon)$

4.2.4 Théorème ***(Bolzano-Weierstrass)***

Soit (X, d) un espace métrique, les propriétés suivantes sont équivalentes

i) X est compact

ii) Toute suite de X admet une suite extraite convergente

iii) X est précompact complet

4.2.5 Corollaires

i) Tout espace métrique compact est borné

ii) Tout $[a; b] \subset \mathbb{R}$ est compact

iii) Tout espace métrique compact est séparable

4.3 Compacité et produit

4.3.1 Théorème ***(Tychonoff)***

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. Alors, si chaque X_i est compact, $\prod_{i \in I} X_i$ est compact

4.3.2 Définition ***(espace inductif)***

On dit qu'un espace E est **inductif** si toute partie P totalement ordonnée de E admet un majorant.

4.3.3 Théorème ***(Zorn)***

Tout ensemble inductif non vide admet un élément maximal.

4.3.4 Définition ***(mauvais recouvrement)***

Soit X un espace topologique , un **mauvais recouvrement** de X est un recouvrement ouvert n'admettant aucun sous-recouvrement fini.

4.3.5 lemme

Soit X un espace topologique , $\mathcal{P}$ une prébase d'ouverts de X. Supposons que X admette un mauvais recouvrement, alors il existe un mauvais recouvrement constitué uniquement d'éléments de $\mathcal{P}$.

4.3.6 Sous-lemme

Supposons que X admette un mauvais recouvrement. Alors, $\exists\, \mathcal{U}^*$ un autre mauvais recouvrement vérifiant :

i) Si $V_1..V_n$ sont des ouverts tels que, $\forall j \in \{1,..,n\}$, $V_j \notin \mathcal{U}^*$, alors

$$\bigcap_{j=1}^{n} V_j \notin \mathcal{U}^*$$

ii) Si V est un ouvert, $V \notin \mathcal{U}^*$, et V' ouvert tel que $V \subset V'$, alors

$$V' \notin \mathcal{U}^*$$

4.4 Espaces localement compacts

4.4.1 Définition *(**Espace localement compact**)*

On dit d'un espace topologique qu'il est **localement compact** s'il est séparé, et si tout point admet un voisinage compact.

4.4.2 Proposition

Dans un espace localement compact, tout point admet une base de voisinages compacts.

4.4.3 Corollaire

Tout ouvert d'un espace localement compact est encore un espace localement compact

4.4.4 Définition *(**Compactifié**)*

Soit X un espace localement compact, il existe un espace topologique $\widehat{X} = X \sqcup \{\infty\}$, espace topologique compact tel que X soit un ouvert dense de $\widehat{X}$. Cet espace $\widehat{X}$ est appellé le **compactifié** de X

4.5 Applications continues et espaces compacts

4.5.1 Proposition

Soit X un espace topologique compact, Y un espace topologique séparé, et $f : X \to Y$ continue. Alors, f(X) est un compact.

4.5.2 Corollaire

Soit X un espace topologique compact, Y un espace topologique séparé, $f : X \to Y$ continue et bijective, alors f est un homéomorphisme.

4.5.3 Corollaire

Si X est un espace topologique compact, $f : X \to \mathbb{R}$ continue, alors f est bornée et atteint ses bornes

4.5.4 Corollaire

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie .

i) $A \subset E$ est compact $\Leftrightarrow$ E est fermé borné

ii) Deux normes sur E sont équivalentes

4.5.5 *Théorème* ***(Riesz)***

Soit E un espace vectoriel normé . les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) E est localement compact

ii) La boule unité fermée $\overline{B(0,1)}$ de E est compacte

iii) E est de dimension finie

4.5.6 *Théorème* ***(Banach Alaoglu)***

Soit E un espace vectoriel normé , E' son dual topologique. Soit $\overline{B}_{E'}$ la boule unité fermée de E'. Alors $\overline{B}_{E'}$ est compacte pour la topologie faible-$*$

4.5.7 *Définition* ***(relative compacité)***

Soit X un espace topologique. On dit que $A \subset X$ est relativement compacte si $\overline{A}$ est compacte.

4.5.8 *Définition* ***(Application propres)***

Soient X et Y deux espaces localement compacts. On dit que $f : X \rightarrow Y$ est propre si l'image réciproque de tout compact est compacte.

4.5.9 *Proposition*

Soient X, Y deux espaces topologiques localement compacts.

i) Soit $f : X \rightarrow Y$, propre, alors f est fermée.

ii) Soit $f : X \rightarrow Y$, continue, bijective et propre, alors f est un homéomorphisme.

5 *Topologie fonctionelle*

5.1 topologie de la convergence uniforme

5.1.1 *Définition* ***(Topologie de la convergence uniforme)***

On définit une distance d sur l'espace des fonctions $X \rightarrow Y$, $F(X,Y)$ où Y est un espace métrique par :

$$d(f,g) = min(\underset{x \in X}{sup}(d(f(x),g(x))),1)$$

On appelle **topologie de la convergence uniforme** la topologie associée à cette distance.

5.1.2 *Proposition*

i) L'application $\begin{array}{ccc} F(X,Y) & \rightarrow & Y \\ f & \mapsto & f(x) \end{array}$ est continue $\forall x$

ii) Supposon Y complet. Alors, $(F(X,Y),d)$ est complet.

iii) Si X est un espace topologique, $\mathscr{C}(X,Y)$ est un fermé donc complet si Y l'est.

5.1.3 *Théorème* ***(Interversion de limites)***

Soit Z un espace métrique complet, Y un espace topologique. Soit $A \subset Y$, $a \in \overline{A}$, et $f_n : A \rightarrow Z$, une suite de fonctions. On suppose que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{\substack{x \to A \\ x \in A}} f_n(x)$ existe, notée l_n
2. $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A

Alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f$ existe, et vaut $\lim\limits_{n \to \infty} l_n$, qui existe également, c'est à dire

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f_n(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

*5.1.4 Définition **(Convergence simple)***

Soit X un espace topologique, Y un espace topologique. Soit $F(X,Y) = Y^X$, on appelle **topologie de la convergence uniforme** la topologie produit.

*5.1.5 Théorème **(Dini)***

Soit X un espace topologique compact, et $f_n : X \to \mathbb{R}$ vérifiant :

i) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue

ii) $\forall x \in X$, $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ existe

iii) $x \to f(x)$ est continue

iv) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X \quad f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$

Ou $iv) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X \quad f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$

Alors $f_n \to f$ uniformément

5.2 Convergence uniforme sur les compacts

*5.2.1 Définition **(Convergence uniforme sur les compacts)***

Soit X un espace topologique , Y un , *et $f_n : X \to Y$ une suite d'applications. On dit que $f_n \to f$* ***uniformément sur les compacts*** *de X si $\forall K$ compact de X, $f_{n|/K} \to f_{|K}$ pour la topologie de la convergence uniforme.*

5.2.2 Proposition

Supposons X localement compact, soit $(f_n)_n$ suite de fonctions de $\mathscr{C}(X,Y)$ convergent uniformément sur les compacts de f alors $f \in \mathscr{C}(X,Y)$

*5.2.3 Définition **(Topologie compacte ouverte)***

Soit X un espace topologique, localement compact, Y un espace métrique. On appelle **topologie compacte ouverte** la topologie sur $\mathscr{C}(X,Y)$ dont une prébase d'ouverts est donnée par les $O(K,U) = f \in \mathscr{C}(X,Y), f(K) \subset U$, pour K compact de X, et U ouvert de Y.

5.2.4 Proposition

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{C}(X,Y)$, et $f \in \mathscr{C}(X,Y)$, les propriétés suivantes sont équivalentes : :

i) $f_n \to f$ uniformément sur les compacts

ii) $f_n \to f$ pour la topologie compacte ouverte

5.3 Continuité uniforme

5.3.1 *Définition* ***(Module de continuité)***

Soient X, Y deux espaces métriques, $f : X \to Y$, on appelle module de continuité de f la fonction

$$\begin{array}{rcccc} \omega_f & : & X & \to & Y \\ & & h & \mapsto & \omega_f(h) = \sup\limits_{d(x,y)<h} d'(f(x), f(y)) \end{array}$$

5.3.2 *Définition* ***(Fonctions holderiennes)***

On dit que f est α-**holderienne**, avec $\alpha \in]0;1[$, si $\exists c > 0$, $\forall x, y \in X$

$$d'(f(x), f(y)) \leq Cd(x,y)^{\alpha}$$

5.3.3 *Théorème* ***(Heine)***

Soient (X, d), et (Y, d') deux espaces métriques. Supposons X compact. Alors, toute application continue $f : X \to Y$ est uniformément continue.

5.3.4 *Théorème* ***(Prolongement des applications continues)***

Soient (X, d), et (Y, d') deux espaces métriques, avec Y complet. Soit $A \subset X$ dense, $f : A \to Y$ uniformément continue. Il existe une unique $g : X \to Y$, continue telle que $g_{/A} = f$. De plus, g est uniformément continue. (ie. $\omega_f = \omega_g$)

5.3.5 *Théorème* ***(Complété d'un espace métrique)***

Soit (X, d) un espace métrique. Il existe un espace métrique complet $\widehat{X}$, et $i : X \hookrightarrow \widehat{X}$ injection isométrique d'image dense.

De plus, si $\widehat{X}'$ est un autre espace métrique complet, i' : $X \to \widehat{X}'$ une injection isométrique, d'image dense, il existe $J : \widehat{X} \to \widehat{X}'$ isométrie unique telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \widehat{X} \\ \downarrow i' & \swarrow_J & \\ \widehat{X} & & \end{array}$$

5.3.6 *Corollaire*

Soient X, Y deux espaces métriques, $f : X \to Y$ uniformément continue. Alors, il existe une unique application $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ uniformément continue, $\widehat{f}_{|X} = f$

5.4 Semi continuité

5.4.1 *Définition* ***liminf, limsup)***

Soit X un espace topologique,$A \subset B \subset X$, $a \in \overline{A}$, $f : B \to \overline{\mathbb{R}}$. Soit K l'ensemble des valeurs d'adhérence de f quand $x \to a, x \in A$. On sait que K est un fermé non vide, donc compact, de $\overline{\mathbb{R}}$. On pose alors

$$\underline{\lim}_{\substack{x \to A \\ x \in A}} f(x) = \min K, \text{ et } \overline{\lim}_{\substack{x \to A \\ x \in A}} f(x) = \max K$$

5.4.2 *Proposition*

Soit Vune base de voisinages de a. On a

i) $\underset{\substack{x\to A\\x\in A}}{\underline{\lim}} f(x) = \sup_{V\in\mathcal{V}} \inf_{V\cap A} f(x)$, et $\underset{\substack{x\to A\\x\in A}}{\overline{\lim}} f(x) = \inf_{V\in\mathcal{V}} \sup_{V\cap A} f(x)$

ii) Si $f, g : B \to \overline{\mathbb{R}}$, et $x \in A$, $f(x) \le g(x)$, alors

$$\underline{\lim} f(x) \le \underline{\lim} g(x), \text{ et } \overline{\lim} f(x) \le \overline{\lim} g(x)$$

iii) $\underline{\lim} f(x) + \underline{\lim} g(x) \le \underline{\lim}(f+g)(x)$

iv) $\overline{\lim}(f+g)(x) \le \overline{\lim} f(x) + \overline{\lim} g(x)$

v) Si $f, g : B \to [0; +\infty]$, on a

$$\underline{\lim} f(x).\underline{\lim} g(x) \le \underline{\lim}(f+g)(x)$$

$$\overline{\lim}(f+g)(x) \le \overline{\lim} f(x) + \overline{\lim} g(x)$$

vi) $\min(\underline{\lim} f, \underline{\lim} g) \le \underline{\lim}(\min(f,g))$, et $\overline{\lim}(\min(f,g)) \le \min(\overline{\lim} f, \overline{\lim} g)$
Par ailleurs, on a :

$$\max(\underline{\lim} f, \underline{\lim} g) \le \underline{\lim}(\max(f,g)), \text{ et } \overline{\lim}(\max(f,g)) \le \max(\overline{\lim} f, \overline{\lim} g)$$

5.4.3 *Définition* ***(Continuité inférieure, supérieure)***

Soit X un espace topologique, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, et $x_0 \in X$ On dit que f est **semicontinue inférieurement** (resp. **supérieurement**) en x_0, si $\forall \lambda < f(x_0)$, (resp.$\forall \lambda > f(x_0)$) $\exists V$ voisinage de x_0, $\forall x \in V$

$$f(x) \ge \lambda \text{ ie. } \lim_{x\to x_0} f(x) \ge f(x_0)$$

$$(\text{resp. } f(x) \ge \lambda \text{ ie. } \lim_{x\to x_0} f(x) \ge f(x_0))$$

5.4.4 *Proposition*

- Le Sup d'une famille de fonctions semicontinues inférieurement est semicontinu inférieurement
- L'Inf d'une famille de fonctions semicontinues supérieurement est semicontinu supérieurement

5.4.5 *Définition* ***(Fonctions semicontinues)***

une fonction est **semicontinue inférieurement** (resp. **supérieurement**) si elle l'est en en tout point.

5.4.6 *Proposition*

i) f sci sur X $\Leftrightarrow \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \{x, f(x) > \lambda\}$ ouvert
$\Leftrightarrow \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \{x, f(x) \le \lambda\}$ fermé

ii) f scs sur X $\Leftrightarrow \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \{x, f(x) < \lambda\}$ ouvert
$\Leftrightarrow \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \{x, f(x) \ge \lambda\}$ fermé

5.4.7 *Théorème*

Soit X un espace topologique compact, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sci, alors f atteint sa borne inférieure.

5.5 Théorème d'Arzela Ascoli

5.5.1 *Définition **(Equicontinuité)***

On dit qu'un sous ensemble A de $\mathscr{C}(X,Y)$ est **équicontinu** en $x_0 \in X$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists V$ voisinage de x_0,

$$\forall x \in V, \forall f \in A\, d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

On dit que A est équicontinu sur X, A est continu en tout point de X

5.5.2 *Proposition*

Soit X un espace métrique compact, A équicontinue sur X, alors A est uniformément équicontinue , ie.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, x' \in X, \forall f \in A, d(x,x') < \eta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

5.5.3 *Définition **(Relative compacité)***

On dit qu'un sous ensemble B d'un espace topologique Z est relativement compacte si $\overline{B}$ est compact.

5.5.4 *Proposition*

Soit X un espace topologique , Y un espace métrique, $A \subset \mathscr{C}(X,Y)$. Alors, si A est relativement compact :

i) A est équicontinu
ii) $\forall x_0 \in X$, $A(x_0) = \{f(x_0), f \in A\}$ est relativement compact de Y

5.5.5 *Théorème **(Arzela Ascoli)***

Supposons que X est un espace topologique compact et que Y est un espace métrique. Soit $A \subset \mathscr{C}(X,Y)$, vérifiant A équicontinue, et $\forall x \in X$, $A(x)$ est relativement compact dans Y, alors A est relativement compact de $\mathscr{C}(X,Y)$

5.6 Théorème de Stone-Weierstrass

5.6.1 *Définition ($\mathbb{K}$ **algèbre séparante**)*

Soit $A \subset \mathscr{C}(X,\mathbb{K})$ une $\mathbb{K}$ algèbre unitaire, on dit que A est **séparante** si , $\forall x, y \in X$ avec $x \neq y$, $\exists f \in A$, $f(x) \neq f(y)$

5.6.2 *Théorème **(Stone weierstrass)***

Soit X compact

i) Soit A une sous algèbre unitaire séparante de $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$, alors A est dense dans $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$
ii) Soit A une sous algèbre unitaire séparante de $\mathscr{C}(X,\mathbb{C})$ telle que, $\forall f \in A$, on a $\overline{f} \in A$, alors A est dense.

5.6.3 *Lemme*

Soit A une sous algèbre unitaire séparante de $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$. Alors, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x, y \in X^2$, $x \neq y$, $\exists f \in A$, $\quad f(x) = a, \quad f(y) = b$

5.6.4 *Lemme*

Il existe $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que $P_n(t) \to \sqrt{t}$ uniformément sur $[0;1]$

5.6.5 *Lemme*

Soit $A \subset \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ sous algèbre unitaire, alors :

i) Si $f \in A$, $|f| \in \overline{A}$

ii) Si $f_1..f_N \in \overline{A}$, alors $max\{f_1..f_N\}$ et $min\{f_1..f_N\}$ sont dans $\overline{A}$

5.6.6 *Corollaire*

Soit X un *compact, alors* $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ *est séparable*

5.7 Théorème de Baire et applications

5.7.1 *Définition* ***(Espace de Baire)***

On dit qu'un espace topologique X est un **espace de Baire** si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

i) $\forall\ (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'ouverts denses, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense

ii) $\forall\ (F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fermés d'interieur vide, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.

5.7.2 *Théorème* ***(Baire)***

i) Soit X un espace topologique localement compact, alors X est un espace de Baire

ii) Soit X un ouvert d'un espace métrique complet, alors X est un espace de Baire

5.7.3 *Proposition*

Soit E un espace de Banach, alors, soit E est de de dimension finie , soit E est de dimension non dénombrable

5.7.4 *Définition* ***(Ensembles résiduels)***

Soit X un espace de Baire

i) Un G_δ est une intersection dénombrable d'ouverts denses. En particulier, tout G_δ est dense.

ii) Un F_σ est une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide. En particulier, tout F_σ est d'intérieur vide.

iii) On dit qu'un sous ensemble de X est **résiduel** si il contient un G_δ. En particulier, un sous ensemble résiduel est dense.

iv) On dit qu'un sous ensemble de X est **maigre** si il est contenu dans un F_σ. En particulier, un ensemble maigre est d'intérieur vide.

v) Une propriété est dite vrai presque partout au sens de Baire si elle est vraie sur un ensemble résiduel.

5.7.5 *Proposition*

Soit X un espace de Baire, Y un espace métrique, et $f_n : X \to Y$ une suite d'applications continues. Supposons que, $\forall x \in X, \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Alors, f est continue presque partout.

5.7.6 Corollaire

Soit $f :]0;1[\to \mathbb{R}$ dérivable, alors la dérivée est continue sur un ensemble dense.

5.7.7 Théorème

L'ensemble des fonctions continues que ne sont dérivables en aucun point est dense dans $\mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$

5.7.8 Théorème

Soit A l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ dérivables à droite en au moins un point de $[0;1[$, alors A est maigre

5.7.9 Théorème

L'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ analytiques en au moins un point est maigre.

6 Analyse fonctionelle

6.1 Le théorème de Hahn-Banach

*6.1.1 Théorème **(Hahn-Banach)***

Soit E un $\mathbb{R}$-ev, et $p : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $p(x+y) \leq p(x)+p(y) \quad \forall x,y \in E$ $p(\lambda x) \leq \lambda p(x) \quad \forall (x,\lambda) \in E \times \mathbb{R}_+^*$

Soit F un sous espace vectoriel de E. Soit $f : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire vérifiant

$$\forall x \in F \quad f(x) \leq p(x)$$

Il existe alors $\widetilde{f} : E \to \mathbb{R}$, linéaire, vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \widetilde{f}(x) \leq p(x),\ \text{ et } \widetilde{f}_{|F} = f$$

6.1.2 Corollaire

i) Soit E un espace vectoriel normé , F un sous espace vectoriel de E, $f : F \to \mathbb{R}$, forme linéaire continue pour la norme induite par celle de E, il existe $\widetilde{f} \in E'$ $\widetilde{f}_{|F} = f$, et $\|\widetilde{f}\|_{E'} = \|f\|_{F'}$

ii) $\forall x \in E$, $\exists l \in E'$, telle que $\|l\|_{E'} = \|x\|_E$ et $l(x) = \|x\|^2$

iii) $\forall x \in E$, $\|x\|_E = \sup\limits_{\|l\|_{E'} \leq 1} |l(x)|$

*6.1.3 Définition **(Espace séparant)***

Soit E un espace vectoriel , un hyperplan affine H de E est un sous ensemble de la forme $H = \{x \in E, l(x) = \alpha\}$, où l est une forme linéaire sur E, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que H **sépare** deux sous ensembles A et B de E si, quitte à échanger A et B, $A \subset \{x \in E, l(x) \leq \alpha\}$, et $A \subset \{x \in E, l(x) \geq \alpha\}$. On dit que H **sépare strictement** A et B si $\exists \varepsilon > 0$ $A \subset \{x \in E, l(x) \leq \alpha - \varepsilon\}$, et $A \subset \{x \in E, l(x) \geq \alpha + \varepsilon\}$

Remarque : Si E est un EVT, on sait que H fermé $\Leftrightarrow$ l continue

6.1.4 *Théorème* ***(Hahn-Banach, forme géométrique)***

Soit E un espace vectoriel topologique , A, B deux sous ensembles convexes$\neq \emptyset$ de E, tels que $A \cap B \neq \emptyset$

i) Si A est un ouvert $\exists H$ hyperplan fermé séparant A et B

ii) Si E est localement convexe, si A est un compact, et B fermé, il existe H hyperplan fermé séparant strictement A et B

6.1.5 *Proposition*

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, A sous espace vectoriel de E. les propriétés suivantes sont équivalentes : :

i) A est dense

ii) $\forall l \in E'$, $l_{|A} = 0 \Rightarrow l \equiv 0$

6.1.6 *Proposition*

E est localement convexe séparé, la topologie faible sur E est séparée.

6.1.7 *Proposition*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé . Si E' est séparable, E est séparable

6.2 Théorème de Banach-Steinhauss, applications

6.2.1 *Théorème* ***(Banach-Steinhauss)***

Soit E un espace de Fréchet, F un espace vectoriel normé . Soit $u_i : E \to F$, $i \in I$ une famille d'applications linéaires. Supposons :

i) $\forall i \in I$, u_i est continue

ii) $\forall x \in E$, $\sup\limits_{i \in I} \|u_i(x)\|_F < +\infty$

Alors, $(u_i)_{i \in I}$ est équicontinue.

6.2.2 *Théorème* ***(Image ouverte)***

Soient E,F deux Fréchets, $u : E \to F$ continue linéaire surjective, alors u est ouverte.

Lemme 1 : $\exists \rho > 0$, $B(0, 2\rho) \subset \overline{u(B(0,1))}$

Lemme 2 : Supposons $B(0, 2\rho) \subset \overline{u(B(0,1))}$, alors $B(0,\rho) \subset u(\overline{B(0,1)})$

6.2.3 *Corollaire* ***(Théorème de Banach)***

Soient E,F deux espaces de Fréchet, $u : E \to F$, linéaire, continue, bijective. Alors, u^{-1} est continue

6.2.4 *Corollaire*

Soient $\|.\|_1$, et $\|.\|_2$ deux normes sur un espace vectoriel E. Supposons E complet pour chacune de ces normes, et qu'il existe $c_1 > 0$ tel que $\forall x \in E$, $\|.\|_1 \leq c_1 \|.\|_2$ Alors,

$$\exists c_2 > 0 \forall x \in E \ \|.\|_2 \leq c_2 \|.\|_1$$

6.2.5 *Corollaire* ***(Théorème des graphes fermés)***

Soient E, F deux espaces de Fréchet, et $u : E \rightarrow F$ linéaire. Soit G le graphe de u, les propriétés suivantes sont équivalentes : :

i) u est continue

ii) G est un fermé de $E \times F$

6.2.6 *Corollaire*

Soient E, F deux espaces de Fréchet, $u : E \rightarrow F$, linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes : :

i) $u : (E, forte) \rightarrow (F, forte)$ continue

ii) $u : (E, \sigma(E, E')) \rightarrow (F, \sigma(F, F'))$ continue

6.2.7 *Définition* ***(Somme directe topologique)***

Soit E un espace vectoriel normé , F,G tels que $E = F \oplus G$. la somme directe est dite topologique si $\begin{array}{ccc} F \times G & \rightarrow & E \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$ est continue.

6.2.8 *Proposition*

Soit E un espace vectoriel normé , F,G tels que $E = F \oplus G$. $p_1 : E \rightarrow F$, $p_2 : E \rightarrow F$, les projecteurs associés. les propriétés suivantes sont équivalentes : :

i) p_1 continue

ii) p_2 continue

iii) la somme directe est topologique

6.2.9 *Proposition*

Si E est un Banach, si F, G sont deux sous espace vectoriel fermés de E tels que $E = F \oplus G$, alors, la somme directe est topologique.

6.2.10 *Proposition*

Soit E un espace vectoriel normé , F un sous espace vectoriel fermé de complémentaire de dimension finie (resp. de dimension finie), alors, F admet un supplémentaire de dimension finie . Si E est un banach, ce supplémentaire est topologique.

6.3 Espaces de Hilbert

6.3.1 *Théorème* ***(Inégalité de Cauchy-Schwartz)***

$| < x, y > | \leq \|x\| \|y\|$, avec égalité si $x = \lambda y$, $\lambda > 0$

6.3.2 *Théorème* ***(Inégalité de Minkowsky)***

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, avec égalité si $x = \lambda y$, $\lambda > 0$

6.3.3 *Théorème* ***(Egalité de la médiane)***

$\|\frac{x+y}{2}\| + \|\frac{x-y}{2}\| = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, avec égalité si $x = \lambda y$, $\lambda > 0$

6.3.4 *Définition* ***(Espace préhilbertien)***

Un espace préhilbertien est un espace vectoriel $\mathscr{H}$ muni d'un produit scalaire. (En particulier, c'est un espace vectoriel normé). Par ailleurs, l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{H} \times \mathscr{H} & \to & \mathbb{K} \\ (x,y) & \mapsto & < x, y > \end{array}$ est continue.

6.3.5 *Définition* ***(Hilbert)***

Un espace de Hilbert est un espace de préhilbertien complet.

6.3.6 *Théorème* ***(Projection sur un convexe fermé)***

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert, et C un convexe fermé non vide de $\mathscr{H}$.

i) $\forall x \in \mathscr{H}$, $\exists ! p(x) \in C$, $d(x, C) = d(x, p(x))$ $\|x - p(x)\| = \min_{y \in C} \|x - y\|$

ii) $p(x)$ est caractérisé par $p(x) \in C$ et $\forall y \in C$, $Re(< x - p(x), y - p(x) > \leq 0$

iii) $x \to p(x)$ est 1-lipschitzienne

iv) Si $C = F$ est un sous espace vectoriel fermé de $\mathscr{H}$, $p(x)$ est caractérisé par $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^{\perp}$

On dit alors que $p(x)$ est le **projeté orthogonal** de x sur C/F

6.3.7 *Corollaire*

Soit $\mathscr{H}$ un Hilbert, F un sous espace fermé de $\mathscr{H}$, Alors F admet un supplémentaire (topologique) fermé, a savoir $\mathscr{H} = F \oplus F^{\perp}$

6.3.8 *Définition* ***($\overline{\mathscr{H}}$)***

Soit $\mathscr{H}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , on définit $\overline{\mathscr{H}}$ donné par les lois $(x, y) \mapsto x + y$, et $(\lambda, x) \mapsto \overline{\lambda} x$

6.3.9 *Théorème* ***(Riesz-Fréchet)***

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert, et soit

$$\Phi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathscr{H} & \to & \overline{\mathscr{H}}' \\ x & \mapsto & y \to < x, y > \end{array}$$

Alors, Φ est une isométrie de $\mathscr{H}$ sur $\overline{\mathscr{H}}'$

6.3.10 *Proposition*

$\mathscr{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, a une forme bilinéaire ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou sesquilinéaire ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) continue. $\exists c > 0$ et $x, y \in \mathscr{H}$, tel que $|a(x,y)| \leq c\|x\|\|y\|$

6.3.11 *Définition* ***(Cohercivité)***

On dit que a est cohercive si $\exists c > 0$, $\forall x \in \mathscr{H}$, $a(x,x) \geq c\|x\|^2$

6.3.12 *Théorème* ***(Stompacchia)***

Soit a une forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire) continue cohercive, et C un convexe fermé non vide de $\mathscr{H}$. Soit $l \in \overline{\mathscr{H}}'$, il existe un unique $x \in \mathbb{C}$ tel que $\forall y \in \mathbb{C}$

$$Re(a(x,y-x)) \geq Re(l(x-y))$$

Lorsque a est symétrique (resp. hermitienne) x est caractérisé par $x \in \mathbb{C}$ et $\frac{1}{2}a(x,x) - Re(l(x)) = \min\limits_{y\in C}(\frac{1}{2}a(y,y) - Re(l(y)))$

6.3.13 *Corollaire* ***(Théorème de Lax-Milgram)***

Soit a vérifiant les hypothèses du théorème, $l \in \overline{\mathscr{H}}'$, il existe un unique $x \in \mathscr{H}$, tel que $\forall y \in \mathscr{H}$, $a(x,y) = l(y)$. Si a est symétrique (resp. hermitienne), x est caractérisé par $\frac{1}{2}a(x,x) - Re(l(x)) = \min\limits_{y\in \mathscr{H}}(\frac{1}{2}a(y,y) - Re(l(y)))$

6.3.14 *Définition* ***(Somme directe hilbertiennes)***

Soit $\mathscr{H}$ un hilbert, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous espaces fermés de $\mathscr{H}$ vérifiant :

i) $\forall n \neq n'$, $E_n \perp E_{n'}$

ii) $\bigoplus\limits_n E_n$ est dense dans $\mathscr{H}$

Alors, $\overline{\mathscr{H}} = \bigoplus\limits_n E_n$, on dit que $\mathscr{H}$ est somme directe hilbertienne des $(E_n)_n$, on note $\mathscr{H} = \overline{\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}}} E_n$

6.3.15 *Proposition*

Supposons $\mathscr{H} = \overline{\bigoplus\limits_n} E_n$. Soit p_n la projection orthogonale de $\mathscr{H}$ sur les sous espaces E_n. Soit $x \in \mathscr{H}$, et $x_n = p_n(x) \in E_n$. Alors, $\sum\|x_n\|^2$ converge dans $\mathbb{R}$, et $\sum x_n$ converge dans $\mathscr{H}$, de somme x

6.3.16 *Définition* ***(Base hilbertienne)***

Soit $\mathscr{H}$ un hilbert, on dit que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille orthonormée dénombrable de $\mathscr{H}$ est une **base hilbertienne**, si :

i) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée si $\mathscr{H}$ est de dimension finie

ii) $\mathscr{H} = \overline{\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}}} Vect(e_n)$

6.3.17 *Définition* ***(Famille totale)***

On dit qu'une famille $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est totale si l'espace qu'elle engendre est dense.

6.3.18 *Théorème*

Soit $\mathscr{H}$ un hilbert séparable, $\mathscr{H}$ admet une base hilbertienne.

6.3.19 Corollaire

Deux espaces de hilbert de même dimension (éventuellement infinie) séparables sont isomorphes.

6.4 Théorie spectrale

6.4.1 Définition (**Valeur régulière, spectre**)

Soit E un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{K}$, $u : E \to E$ linéaire continue. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur régulière** de u si $u - \lambda Id$ est inversible. (ou que λ est dans l'ensemble résolvant $R(u)$ de u) Dans le cas contraire, on dit que λ est dans le spectre de u, noté $sp(u)$, ou $\sigma(u)$

6.4.2 Définition (**Valeur propre**)

On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u si $Ker(u - \lambda Id) \neq \{0\}$. On note que $Vp(u) \subset Sp(u)$, et on appelle **rayon spectral** d'un endomorphisme la borne supérieure des module de ses valeurs spectrales.

6.4.3 Proposition

Soit E un banach, et $u \in \mathscr{L}(E)$ (continue). Alors, $Sp(u)$ est un compact de $\mathbb{K}$, ce compact est non vide si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
Lemme : Si $u \in \mathscr{L}(E)$, et si $\|u\|_{\mathscr{L}(E)}< 1$, $Id - u$ est inversible

6.4.4 Définition (**compacité**)

Soient E,F deux espace vectoriel normé , et $u : E \to F$ linéaire, on dit que u est compacte si l'image par u de $\overline{B_E}$, boule unité fermée de E est relativement compacte dans F, ie si l'image par u de tout borné de E est relativement compacte, ou encore pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, il existe une extraction telle que $u(x_{\phi(n)})_n$ convergente.

6.4.5 Proposition

u compacte $\Rightarrow$ $u(\overline{B_E})$ relativement compacte $\Rightarrow$ $u(\overline{B_E})$ bornée $\Rightarrow$ u continue.

6.4.6 Proposition

Soient $u : E \to F$, $v : F \to G$ linéaires. Si l'une est compacte et l'autre continue, alors la composée est compacte.

6.4.7 Proposition

Supposons que F est un banach, alors, $K(E, F) \subset \mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes, est un sous espace vectoriel fermé de $\mathscr{L}(E, F)$.

6.4.8 Proposition

Soit E un espace vectoriel normé , F un hilbert, $u : E \to F$ compacte, il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications linéaires continues de rangs finis qui converge vers u, ie telle que

$$\|u - u_n\|_{\mathscr{L}(E,F)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

6.4.9 *Proposition*

Soit E un Banach, $u : E \to E$ compacte.

i) $Ker(u - Id)$ est de dimension finie

ii) $Im(u - Id)$ est un fermé

iii) Si $u - Id$ est injective, $u - Id$ est bijective

iv) Si $\lambda \in Sp(u) - \{0\}$, alors λ est une valeur propre de multiplicité finie ($Dim(Ker - \lambda Id)$), isolée dans $Sp(u)$.

6.4.10 *Définition* ***(adjoint)***

Soit $\mathscr{H}$ un hilbert, et $u : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, linéaire continue, alors $\exists!$ application linéaire $u^* : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ telle que

$$\forall x, y \in \mathscr{H}, < u(x), y >=< x, u^*(y) >$$

et u^* est continue. De plus, on a $\|u\| = \|u^*\|$, $\|u \circ u^*\| = \|u^* \circ u\| = \|u\|^2$. Enfin, l'opérateur d'adjonction est semilinéaire.

6.4.11 *Définition* ***(Opérateur autoadjoint)***

On dit que $u : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ est autoadjoint si $u^* = u$

6.4.12 *Proposition*

Soit $\mathscr{H}$ un espace de hilbert, $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$

i) $\lambda \in Sp(u) \Rightarrow \overline{\lambda} \in Sp(u^*)$

ii) $F \subset \mathscr{H}$ est stable $\Leftrightarrow F^\perp$ stable par u^*

iii) u compacte $\Leftrightarrow u^*$ compacte

iv) $Im(u)^\perp = Ker(u^*)$

v) u autoadjoint $\Rightarrow Sp(u) \subset \mathbb{R}$, $Sp(u) \subset [m, M]$, où $M = \max\limits_{\|x\|=1} < u(x), x >$, et $m = \min\limits_{\|x\|=1} < u(x), x >$, qui appartiennent tous deux à $Sp(u)$

vi) $Sp_{res}(u)$ est vide

6.4.13 *Théorème*

Soit $\mathscr{H}$ un hilbert, $u : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ endomorphisme autoadjoint compact. Il existe deux suites de réels positifs (strictement), $(\lambda_n)_{n\in\{0..N^+\}}$ et $(\mu_n)_{n\in\{0..N^-\}}$, avec N^+, N^- dans $\overline{\mathbb{N}}$, strictement décroissantees et convergent vers 0 lorsque N^+ et N^- sont infinis, telles que :

i) $Sp(u) - \{0\} = \{\lambda_n \quad n \in \{0..N^+\}\} \cup \{\mu_n \quad n \in \{0..N^-\}\}$

ii) $\|u\| = max(\lambda_0, -\mu_0)$

iii) Posons , $\forall \lambda \in Sp(u) - \{0\}$ $E_\lambda = Ker(u - \lambda Id)$, alors, $\forall \lambda \neq \lambda'$, on a $E_\lambda \perp E_{\lambda'}$

iv) $\mathscr{H} = Ker\, u \oplus \overline{\bigoplus\limits_{n\in\{0..N^+\}}} E_{\lambda_n} \oplus \overline{\bigoplus\limits_{n\in\{0..N^-\}}} E_{\mu_n}$

7 *Calcul différentiel dans les espaces de Banach*

7.1 Dérivation

7.1.1 *Définition* ***(Fonction différentiable)***

On dit que f est **différentiable ou dérivable** (au sens de Fréchet) en a si il existe $g : E \to F$ linéaire continue telle que $f(a + h) = f(a) + g.h + \varepsilon(h)$ quand h tend vers 0. (ie. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \eta > 0 \, \forall h \in B(0, \eta)$, avec $a + h \in U$,

$\|f(a+h)-f(a)-g.h\|_F \leq \varepsilon\|h\|_E$) On dit que g est la différentielle de f en a, notée $df(a)$, ou $Df(a)$ ou $f'(a)$.

7.1.2 *Définition (**fonctions C^1**)*

On dit que f est différentiable sur U si $\forall a \in U$, f est différentiable en a. On considère alors

$$\begin{array}{ccc} U & \to & \mathscr{L}(E,F) \\ x & \mapsto & df(x) \end{array}$$

On dit que f est de classe C^1 en a si f est différentiable sur V voisinage ouvert de a et si

$$\begin{array}{ccc} V & \to & \mathscr{L}(E,F) \\ x & \mapsto & df(x) \end{array}$$

est continue en a. On dit que f est C^1 sur U si $\forall a \in U$, f est C^1 en a.

7.1.3 *Proposition*

i) Si $f : U \to F$ est constante, f est C^1 sur U et $df(x) = 0\,\forall x \in U$

ii) Si $f : E \to F$ linéaire continue, f est différentiable (et C^1) sur E et $\forall x \in E$, $df(x) = f$, ie $\forall h, df(x).h = f(h)$

iii) **Dérivation d'une composée** : $f : U \to F$, différentiable en $a \in U$, $g : V \to G$, V contenant $f(U)$, g différentiable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et $d(g \circ f)(a) = dg(b) \circ df(a)$ De plus, si f est C^1 en a et g C^1 en b, alors la composée est C^1 en a

iv) Soit $E = E_1 \times .... \times E_n$, avec E_j Banach. Soit $f : E_1 \times ... \times E_n \to F$ n-linéaire continue, alors, $x_1...x_n \to f(x_1...x_n)$ est C^1 sur $E_1 \times ... \times E_n$ et

$$df(a_1...a_n).(h_1...h_n) = f(h_1, a_2...a_n) + ... + f(a_1...a_{n-1}, h_n)$$

v) Soit U un ouvert de E, $\begin{array}{cccc} f & : & U & \to & F_1 \times ... \times F_n \\ & & x & \mapsto & (f_1(x)...f_n(x)) \end{array}$, alors f est différentiable en a si et seulement si $\forall j$, $f_j : U \to F_j$ est différentiable en a, et

$$df(a).h = (df_1(a).h, ..., df_n(a).h_n)$$

De même, f est C^1 en a si et seulement si chaque f_j est C^1 en a.

vi) Si $f_1, f_2 : U \to F$ sont différentiables en a $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est différentiable en a, et :

$$d(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 df_1 + \lambda_2 df_2$$

(Même chose pour les fonctions C^1 en a)

vii) Si $f_1 : U \to F_1$, et $f_2 : U \to F_2$ sont différentiables en a, et si $B : F_1 \times F_2 \to G$ est bilinéaire continue, alors $\delta : x \to B(f_1(x), f_2(x))$ est différentiable en a et

$$dg(a).h = B(df_1(a).h, f_2(a)) + B(f_1(a), df_2(a).h)$$

viii) Soit $f : U \to F$ de classe C^1, un homéomorphisme de U sur son image, et supposons f différentiable en $a \in U$ et $df(a)$ bijective. Alors, f^{-1} est différentiable en $b = f(a)$ et $df^{-1}(b) = df(a)^{-1}$

ix) Soit $\begin{array}{cccc} \Phi & : & GL(E,F) & \to & GL(E,F) \\ & & u & \mapsto & u^{-1} \end{array}$, alors Φ est C^1 sur $GL(E,F)$ et $d\Phi(u).h = -u^{-1}.h.u^{-1}$

7.2 Théorème des accroissements finis

7.2.1 *Théorème (**Accroissements finis**)*

Soit F un banach, $a < b$ deux réels, $f : [a,b] \to F$, continue, dérivable sur $]a,b[$. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ continue, dérivable sur

$]a,b[$. Alors, si $\forall t \in]a,b[\ \|f'(t)\| \leq g'(t)$, on a :

$$\|f(a)-f(b)\| \leq g(b)-g(a)$$

7.2.2 Corollaire

Soit U un ouvert d'un Banach E, $f : U \to F$, dérivable sur U. Soit $a, b \in U$ tels que $[a,b] \subset U$. Supposons donné $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in [a,b]$, $\|df(x)\|_{\mathscr{L}(E,F)} \leq M$, Alors, $\|f(b)-f(a)\| \leq M\|b-a\|$

7.2.3 Corollaire

Soit U un ouvert connexe non vide de E, $f : U \to F$ dérivable telle que $\forall x \in U\ df(x) = 0$, alors f est constante.

7.2.4 Théorème ***(Interversion dérivée/limite)***

Soient E, F deux Banachs, $U \subset E$ ouvert non vide connexe, $f_n : U \to E$ une suite d'applications dérivables. On suppose :

i) $\exists x_0 \in U$ tel que $(f_n(x_0))_n$ converge.

ii) $\forall a \in U\ \exists r(a) > 0$ tel que $B(a, r(a)) \subset U$ et que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $B(a, r(a))$

Alors, $\forall a \in U\ (f_n)_n$ converge uniformément sur $B(a, r(a))$, et si $g = \lim f'_n$, $f = \lim f_n$, f est dérivable sur U et $f' = g$

7.2.5 Corollaire

Si $\Sigma f_n(x)$ est une série convergente en $x_0 \in U$ et si $\Sigma f'_n(x)$ converge uniformément sur toute boule $B(a, r(a))$, $\Sigma f_n(x)$ converge uniformément sur toute boule $B(a, r(a))$, la somme est dérivable, et $(\Sigma f_n)' = \Sigma f'_n$

7.3 Différentielles partielles

7.3.1 Définition ***(Dérivée partielle)***

On considère $E = \Pi E_k$ où les E_k sont des Banach. Soit U un ouvert de E, soit $f : U \to F$, avec F un Banach. Soit $a = (a_1 ... a_n) \in U$ On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la i^{eme} variable en a si $x_i \to f(a_1 ... a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ... a_n)$ est dérivable en $x_i = a_i$. On note cette différentielle partielle $\partial_i f(a) \in \mathscr{L}(E_i, F)$

7.3.2 Proposition

i) Supposons f différentiable en a. Alors, $\forall i$, f admet une dérivée parielle par rapport à la i^{eme} variable. Si $h = (h_1 ... h_n) \in E_1 \times ... \times E_n$, alors :

$$df(a).h = \sum_{i=1}^{n} d_i f(a).h_i \in F$$

ii) Si f admet des dérivées partielles $\partial_i f$, $i = 1...n$ en a, et $\forall a$, et si $x \to \partial_i f(x)$ est continue alors f est C^1. (C'est une équivalence)

7.4 Dérivées d'ordres supérieur

7.4.1 Définition (Dérivée seconde)

Soient E,F deux Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$. On dit que f est deux fois dérivables sur un voisinage ouvert V de a et si $x \to df(x)$ est dérivable en a. On pose $d^2f(a) = d(df)(a) \in \mathscr{L}(E, \mathscr{L}(E,F))$

7.4.2 Proposition

Si f est différentiable deux fois en a, $d^2f(a)$ est une application bilinéaire continue symétrique, $E \times E \to F$.

7.4.3 Corollaire (Lemme de Schwarz)

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i}$$

7.4.4 Définition (Différentielles d'ordre p)

Posons $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}(E \times E, F)$, et $\mathscr{L}_p(E, \mathscr{L}_{p-1}) \backsimeq \mathscr{L}(E \times E \times ... \times E, F)$. On dit que $f : U \to F$ est p-fois différentiable en a si $\exists V$ voisinage ouvert de a, tel que f soit p-1-fois différentiable sur V et si $\begin{array}{ccc} V & \to & \mathscr{L}_{p-1} \\ x & \mapsto & d^{p-1}f(x) \end{array}$ est différentiable en a. On pose $d^pf(a) = d(d^{p-1}f)(a) \in \mathscr{L}^p$. On dit que f est p-fois différentiable sur U si elle l'est $\forall x \in U$

7.4.5 Proposition

Si f est p-fois dérivable sur U et si $x \to d^pf(x)$ est q-fois différentiable sur U, f est p+q fois différentiable et $d^{p+q}f = d^q(d^pf)$.

7.4.6 Proposition

Si f est p-fois différentiable an a $d^pf(a)$ est une application p-linéaire continue symétrique $E^p \to F$.

7.4.7 Définition (Dérivées d'ordre p)

On dit que $f : U \to F$ admet des dérivées partielles d'ordre p en $a \in U$ si et seulement si f admet des dérivées partielles d'ordre $p-1$ sur un voisinage de a et si ces dérivées partielles admettent une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à $x_1 ... x_n$ en a.

7.4.8 Définition (Fonctions C^k)

Soient E,F deux Banach U un ouvert de E, $f : U \to F$ $a \in U$

i) On dit que f est de classe C^k en a si f est k fois dérivable sur V voisinage ouvert de a et $x \to \partial^k f(x)$ est continue en a. On dit que f est C^k sur U si f est C^k en tout point de U.

ii) On dit que f est de classe C^∞ si f est C^k $\forall k \in \mathbb{N}$

7.4.9 Proposition

i) Si $E = E_1 \times ... \times E_r$, U un ouvert de E, $f : U \to F$ est C^k en $a \in U$ si et seulement si toutes les dérivées partielles d'ordre k en a existent et sont continues en a.

ii) Si $F = F_1 \times ... \times F_r$, $f : U \to F$, f est p-fois dérivable en a si et seulement si $\forall j$, f_j est p fois dérivable en a , et f est C^k en a (resp. sur U) si et seulement si $\forall j$, f_j est C^k en a (resp. sur U)

iii) Si $f : E_1 \times ... \times E_p \to F$, p-linéaire continue, alors f est C^∞ et $d^{p+1} f = 0$

iv) Si f est p-fois dérivable en a et g p-fois dérivable en $f(a)$, $g \circ f$ est p-fois dérivable en a.

v) L'ensemble des applications p-fois dérivables en a est un espace vectoriel , de même que l'ensemble des applications C^k en a et l'ensemble des applications C^k sur U

vi) L'application $\begin{array}{ccc} GL(E,F) & \to & GL(E,F) \\ u & \mapsto & u^{-1} \end{array}$ est C^∞

vii) Soit U ouvert de E, $f : U \to F$ homéomorphisme sur son image. On suppose f p-fois dérivable en $a \in U$ et $df(a)$ bijective. Alors, f^{-1} est p-fois dérivable en $f(a)$. de même, si f est C^k sur U, et si f est un homéomorphisme $u \to f(u)$, et si $\forall x \in U$, $df(x)$ est bijective, alors f est un difféomorphisme de classe C^k de U sur $f(U)$

7.5 Théorème des fonctions implicites, d'inversion locale

7.5.1 *Théorème* ***(Inversion locale)***

Soient E, F deux banachs. Soit U un ouvert de E, $f : U \to F$ de classe C^k, $k \leq 1$. Soit $a \in U$, supposons $df(a)$ bijective. il existe V, voisinage ouvert de a dans U, W voisinage ouvert de $f(a)$ dans F tels que $f_{|V} : V \to W$ soit un difféomorphisme C^k

7.5.2 *Théorème* ***(Fonctions implicites)***

Soient E, F, G trois banachs, U un ouvert de $E \times F$, $f : U \to G$ de classe C^k $(k \geq 1)$. Soit $(a,b) \in U$ tel que $f(a,b) = 0$. On suppose $\partial f(a,b) \in \mathscr{L}(F,G)$ est bijective. Alors, il existe U' voisinage ouvert de (a,b) dans U, il existe V voisinage ouvert de a dans E, il existe $g : V \to F$ de classe C^k telle que l'on aie l'équivalence :

$$(x,y) \in U', f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x \in V, \text{ et } y = g(x)$$

7.6 Immersion, submersion

7.6.1 *Définition* ***(Immersion, submersion)***

Soient E,F deux banachs, U un ouvert de E, $f : U \to F$ drivable en $a \in U$

i) On dit que f est une immersion en a (resp. sur U) si $df(a)$ est injective (resp. $\forall a \in U$).

ii) On dit que f est une submersion en a (resp. sur U) si $df(a)$ est surjective (resp. $\forall a \in U$).

iii) On dit que f est un C^k difféomorphisme local en a si il existe V voisinage ouvert de a tel que $f_{|V} : V \to f(V)$ soit un difféomorphisme C^k

7.6.2 *Proposition* ***(cas de la dimension finie)***

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^p$. Si f est différentiable en $a \in U$, la matrice jacobienne de f en a est

$$J_a(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial x_n} \end{pmatrix} (a) \in M_{ln}(\mathbb{R})$$

Par ailleurs, $J_a(g\circ f) = J_{f(a)}(g).J_a(f)$.

$$\frac{\partial (g\circ f)_i}{\partial x_j} = \sum_k \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

Si $p = n$, le jacobien de f est $j_a(f) = det(J_a(f))$

7.6.3 *Définition* ***(Rang d'une application)***

Le rang de f en a est le rang de l'application linéaire $df(a)$, c'est à dire $rg(Im(df(a)))$. Si $E = F = \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$, alors $rg(f)_a = rg(J_a(f))$

7.6.4 *Théorème* ***(Forme locale des immersions)***

Soit U un voisinage ouvert de O dans $\mathbb{R}^p$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k, $k \geq 1$. Supposons que $f(0) = 0$ et que f est une immersion en 0, il existe alors ψ C^k-difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$ en 0 tel que, au voisinage de 0 :

$$\psi \circ f(x_1...x_n) = (x_1...x_p, 0...0)$$

7.6.5 *Théorème* ***(Forme normale des submersions)***

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0, $f : U \to \mathbb{R}^q$ de classe C^k, $k \geq 1$. Supposons que $f(0) = 0$ et que f est une submersion en 0, il existe alors φ C^k-difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$ en 0 tel que, au voisinage de 0 :

$$f \circ \varphi f(x_1...x_n) = (x_1...x_q, 0...0)$$

7.6.6 *Théorème* ***(Forme locale des applications de rang constant au voisinage d'un point)***

U voisinage ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \to \mathbb{R}^q$ de classe C^k. Supposons $f(0) = 0$, et $df(x)$ de rang égal à r $\forall x$ dans un voisinage de 0. Il existe alors φ C^k-difféomorphisme local de $\mathbb{R}^p$ en 0, et ψ C^k-difféomorphisme local de $\mathbb{R}^q$ en 0, tels que

$$\psi \circ f \circ \varphi(x) = (x_1...x_r, 0...0)$$

8 *Equations différentielles ordinaires*

On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de Banach, U un ouvert de $\mathbb{R}\times E$, $f : U \to E$ continue.

8.0.7 *Définition* ***(Solution d'une équation différentielle)***

Une solution de l'équation différentielle $y' = f(t,y)$ est un couple (I,u), où I est un intervalle non vide, $u : I \to E$ dérivable telle que :

$$\forall t \in I, (t,u(t)) \in U \text{ et } u'(t) = f(t,u(t))$$

Si on se donne $(t_0,x_0) \in U$, avec $t_0 \in I$, on dit que la solution vérifie les conditions initiales (x_0,t_0) si $u(t_0) = x_0$

8.0.8 *Définition* ***(Solution maximale)***

On dit que (I, u) est une solution maximale si pour toute solution (J, v) solution telle que $I \subset J$, et $v_{|I} = u$, on aie en fait $J = I$

8.0.9 *Définition* ***(Semi-lipschitziannité)***

On dit que f est semi-lipschitzienne, ou encore lipschitzienne par rapport à x localement dans U, si

$\forall (t_0, x_0) \in U$, $\exists \varepsilon > 0$, $\eta > 0$, $c > 0$ tels que $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B(x_0, \eta)} \subset U$

et que $\forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, $\forall x, x' \in \overline{B(x_0, \eta)}$,

$$\|f(t, x) - f(t, x')\| \leq c\|x - x'\|$$

8.1 Problème de Cauchy

8.1.1 *Théorème* ***(Cauchy-Lipschitz)***

Soit f continue sur U semi-lipschitzienne sur U. $\forall (t_0, x_0) \in U$, il existe une unique solution maximale vérifiant $u(t_0) = x_0$

8.1.2 *Définition* ***(Solution approchée)***

On dit que (I, u) est une solution approchée à ε près de $y' = f(t, y)$ si $\forall t \in I, (t, u(t)) \in U$, et

$$\forall t \in I, \|u'(t) - f(t, u(t))\| \leq \varepsilon$$

8.1.3 *Proposition*

Soient (I, u), et (J, v) deux solutions de $y' = f(t, y)$ telles qu'il existe $t_0 \in I \cap J$, avec $u(t_0) = v(t_0)$. Alors, $u(t) = v(t) \forall t \in I \cap J$

Lemme : $x \underset{x \in A}{\longrightarrow} a$

8.1.4 *Proposition*

8.1.5 *Théorème* *()*

8.1.6 *Définition* *()*

large

i)

ii)

iii)