Fiche résumée du cours de Mouvement Brownien, par J.Bertoin

1 Construction du mouvement brownien

1.1 Rappels sur les variables aléatoires gaussiennes

On note $\mathcal{N}(0,1)$, loi gaussienne de variance 1 centrée, de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. Si $m \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$, on note $\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$, loi gaussienne de moyenne m et de variance $sigma^2$, de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$. A noter que si $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $m+\sigma\xi \sim \mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$.

Fonctions caractéristiques :
$\phi_{0,1}(\lambda) = \mathbb{E}\left(e^{i\lambda\xi}\right) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$, pour $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. $\phi_{m,\sigma^2}(\lambda) = \mathbb{E}\left(e^{i\lambda(m+\sigma\xi)}\right) = e^{i\lambda m-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}$, pour $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$.

On en déduit en particulier l'additivité des gaussiennes.

La convergence en loi de gaussiennes équivaut à la convergence des moyennes et des variances. Un vecteur est gaussien si toute combinaison linéaire de ses coordonnées est une variable aléatoire gaussienne.

Définition 1.1.1 (Processus aléatoire gaussien) *Si T est un ensemble d'indices, on appelle **processus aléatoire** $\xi = (\xi_t)_{t\in T}$ une collection de variables aléatoires. Un processus aléatoire est dit **gaussien** si pour toute sous famille finie $t_1,...,t_d \in T$, $\underline{\xi} = (\xi_{t_1},...,\xi_{t_d})$ est un vecteur gaussien.*

1.2 Mouvement brownien

Définition 1.2.1 (minimale, mouvement brownien) *On appelle mouvement brownien un processus gaussien $B = (B_t)_{t\geq 0}$ centré, de fonction de covariance $\mathbb{E}(B_t,B_s) = t\wedge s$.*

1.3 Régularisation des trajectoires

Définition 1.3.1 (Modification, version) *Deux processus $(X_t)_{t\in T}$ et $\left(\widetilde{X}_t\right)_{t\in T}$ sont des **versions** ou des **modifications** l'un de l'autre, si*

$$\forall t\in T, \mathbb{P}\left(X_t = \widetilde{X}_t\right) = 1 \quad .$$

*Si $\mathbb{P}\left(X_t = \widetilde{X}_t \quad \forall t\right) = 1$, on dit que les deux processus sont **indistinguables**.*

Proposition 1.3.1 (Critère de Kolmogorov) *Soit $X = (X_t, t\in[0,1])$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que $\exists p>1$, $c<\infty$, $\varepsilon>0$,tel que $\mathbb{E}\left(|X_t-X_s|^p\right) \leq c.|t-s|^{1+\varepsilon}$ $\forall s,t\in[0,1]$. Alors, il existe une version $\widetilde{X}$ de X dont p.s. les trajectiores sont holder-continues d'exposant α pour tout $\alpha<\varepsilon/p$.*

Proposition 1.3.2 (Dvoretski) *Il existe $c>0$ tel que, pour tout $\varepsilon>0$,*

$$\mathbb{P}\left(\exists t\in[0,1] : |B_{t+s}-B_t| \leq \sqrt{c},\ \forall s\in[0,\varepsilon]\right) = 0\ .$$

Corollaire 1.3.1 (Paley,Wiener-Zygmund) *Avec probabilité 1, la trajectoire brownienne est nulle part différentiable, i.e. :*

$$\mathbb{P}\left(\exists t\in\mathbb{R}_+,\ \ tel\ que\ \ lim_{s\to t}\frac{B_t-B_s}{t-s}\ existe\right)$$

2 Le mouvement brownien en tant que processus markovien

2.1 Premières propriétés

Proposition 2.1.1 *i) Le mouvement brownien est symétrique, i.e. $-B$ est un mouvement brownien.*

ii) Scaling, changement d'échelle : Pour tout c, $\left(B't = \frac{1}{c}B_{c^2t}\right)_t$ est un mouvement brownien.

iii) Inversion du temps : $\left(\widetilde{B}_t = tB_{\frac{1}{t}}\right)_t$ est un mouvement brownien.

2.2 Filtration du mouvement brownien

2.2.1 Classes monotones

Proposition 2.2.1 (Lemme des classes monotones, version fonctionnelle) *Soit H un espace vectorielde fonctions bornées sur un espace E. On suppose que H est stable par limite croissante uniformément bornée, et que H est stable par convergence croissante bornée. Soit alors C une classe de fontions qui contient les constantes, et qui est stable par produit $(\forall f, g \in C, alors f.g \in C)$ Alors, si $C \subset H$, nécessairement, H contient toutes les fonctions bornées mesurables par rapport à la tribu engendrée par C.*

Théorème 2.2.1 *La filtration browniennne est continue à droite. Si on note $\mathscr{F}_{t_+} = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \mathscr{F}_{t+\varepsilon}$, alors $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t_+}$. En particulier, $\mathscr{F}_{0_+}$ est triviale, c'est à dire qu'elle ne contient que des évènements de probabilité 0 ou 1. C'est la loi du $0-1$ de Blumenthal.*

2.2.2 Propriété de Markov

Proposition 2.2.2 *Fixons $t \geq 0$ et notons $\widetilde{B}_s = B_{t+s} - B_t$, $s \geq 0$. Alors, le processus $\widetilde{B}$ ainsi défini est un mouvement brownien indépendant de $\mathscr{F}_t$.*

Proposition 2.2.3 (Markov faible) $\mathbb{E}\left(\phi\left(B'\right) \mid \mathscr{F}_t\right) = \mathbb{E}^{B_t}\left(\phi\left(B\right)\right)$, *où $B'_s = B_{t+s}$. La loi conditionelle de B' sachant $\mathscr{F}_t$ est celle d'un mouvement brownien issu de B_t.*

Définition 2.2.1 (Semi-groupe du mouvement brownien) *On appelle **semi groupe du mouvement brownien** la famille $P_t : f \mapsto P_t f$, où $P_t f$ est défini par*

$$P_t f\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(y\right) exp\left(-\frac{\left(y-x\right)^2}{2t} dy\right) .$$

Proposition 2.2.4 *Le semi-groupe du mouvement brownien vérifie la propriété de Feller. Si $C_0\left(\mathbb{R}\right)$ est l'ensemble des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini, alors, $P_t = C_0\left(\mathbb{R}\right) \rightarrow C_0\left(\mathbb{R}\right)$. De plus,*

$$\forall f \in C_0\left(\mathbb{R}\right), lim_{t\rightarrow 0^+} P_t f\left(x\right) = f\left(x\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}\, , et$$

$$lim_{t\rightarrow 0^+} P_t f = f \; dans \; C_0\left(\mathbb{R}\right) .$$

Proposition 2.2.5 *Si f est C^2, avec f" bornée, alors*

$$\lim_{\varepsilon\rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(P_\varepsilon f - f\right) = \frac{1}{2} f''$$

. On dit que le générateur infinitésimal du brownien est un demi du laplacien. On a par ailleurs l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial P_t f}{\partial t}\left(x\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial P_t f}{\partial x^2}\left(x\right) ,$$

pour toute fonction vérifiant les conditions précédentes.

Définition 2.2.2 (Temps d'arrêt) *On dit qu'une variable aléatoire T à valeurs dans $[0, \infty]$ est un temps d'arrêt dans une filtration $(\mathscr{F}_t)\, t$ si, pour tout $t \geq 0$, $\{T \geq t\} \in \mathscr{F}_t$.*

Théorème 2.2.2 *Soit T un $(\mathscr{F}_t)$-temps d'arrêt, $T < \infty$ p.s. Posons $\widetilde{B}_s = B_{T+s} - B_T$, $s \geq 0$.. Notons encore la tribu du passé avant T, $\mathscr{F}_T = \{\lambda,\ \lambda \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t,\ \forall t \geq 0$. Alors, $\left(\widetilde{B}_s\right)_s$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathscr{F}_T$. C'est la propriété de Markov forte du brownien.*

Corollaire 2.2.1 (Principe de réflexion de Désiré André) *Soit a positif ou nul, $b < a$, on a alors*

$$\mathbb{P}(S_t > a, B_t < b) = \mathbb{P}(B_t > 2a - b) \text{ , et donc}$$

$$\mathbb{P}(S_t > a) = 2\mathbb{P}(B_t > a) \ .$$

2.2.3 Loi du logarithme itéré, Khitchin

Théorème 2.2.3 (Lil, Khitchin) *Avec proba 1,*

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{|B_t|}{\sqrt{2t \log\log\left(\frac{1}{t}\right)}} = 1 \text{ , et}$$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|B_t|}{\sqrt{2t \log\log(t)}} = 1 \ .$$

Cf : Module de continuité de Paul Levy.

3 Filtrations, temps d'arrêt, et Martingales

3.1 Filtrations et processus

Définition 3.1.1 (Processus aléatoire) *Un **processus aléatoire** $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est une collection de variables aléatoires dans un même espace. On dit que X est mesurable si $(t,\omega) \to X_t(\omega)$ est mesurable de $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{F})$ dans $(E, \mathscr{E})$.*

Définition 3.1.2 (Filtrations complètes) *On appelle **filtration** une famille croissante $(\mathscr{F}_t)_t$ de sous tribus de $\mathscr{F}$. On dit qu'elle est **complète** par rapport à $\mathbb{P}$ si $\mathscr{F}_0$ contient les ensembles $\mathbb{P}$-negligeables. On note $\mathscr{F}_{t_+} = \underset{\varepsilon > 0}{\cap} \mathscr{F}_{t+\varepsilon}$, la filtration $(\mathscr{F}_t)_t$ est dite **continue à droite** si, pour tout t, on a $\mathscr{F}_{t_+} = \mathscr{F}_t$. Si $(\mathscr{F}_t)_t$ est une filtration arbitraire, on la rend complète en lui adjoignant les négligeables, puis continue à droite en considérant $\mathscr{F}_{t_+}$. C'est l'augmentation habituelle. Une tribu complète et continue à droite est dite "satisfaisant les conditions habituelles".*

Définition 3.1.3 (Mesurabilité progressive) *Un processus $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit adapté à une filtration $(\mathscr{F}_t)_t$ si, pour tout t, X_t est une variable aléatoire $\mathscr{F}_t$-mesurable. Il est dit progressivement mesurable si, pour tout t positif,* $\begin{array}{ccc} [0,t]\times\Omega & \to & \Omega \\ (s,\omega) & \mapsto & X_s(\omega) \end{array}$ *est $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$-mesurable.*

Proposition 3.1.1 *Tout processus adapté et à trajectoires continues est progressivement mesurable*

3.2 Temps d'arrêt

3.2.1 Martingales à temps discret

Proposition 3.2.1 *Soit $(\mathscr{F}_t)_t$ une filtration, et T un $(\mathscr{F}_t)_t$-temps d'arrêt. Alors :*

i) T est $\mathscr{F}_t$-mesurable.

ii) Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est $(\mathscr{F}_t)_t$-progressif, alors X_T est également $\mathscr{F}_T$-mesurable.

Lemme 3.2.1 *Supposons que $(\mathscr{F}_t)_t$ satisfait les conditions habituelles. Si X est un processus adapté continu à droite à valeurs dans un espace métrique (E,d), et si θ est un ouvert de E, alors $T_\theta = \inf\{t \geq 0, X_t \in \theta\}$ est un $(\mathscr{F}_t)_t$-temps d'arrêt. Si, de plus, on suppose X continu p.s., et que F est un fermé, alors T_F est un $(\mathscr{F}_t)_t$-temps d'arrêt.*

Définition 3.2.1 (Uniforme intégrabilité) *On dit qu'une famille $(X_t)_{t\in I}$ de variables aléatoires dans $\mathbb{L}^1$ est **uniformément intégrable** si*

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{i\in I}\mathbb{E}\left(X_i\mathbb{1}_{\{X_i>x\}}\right)=0\ .$$

*Cette notion ne dépend que des lois des $(X_t)_{t\in I}$. On dit qu'elle est **uniformément continue si***

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{i\in I}\sup_{\lambda\in\mathscr{F},\mathbb{P}(\lambda)<\varepsilon}\mathbb{E}\left(|X_i|,\lambda\right)=0$$

Remarque : Pour une famille bornée dans $\mathbb{L}^1$, ces deux notions sont équivalentes.

Théorème 3.2.1 (Extension du théorème de convergence dominée.) *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables $\mathbb{L}^1$ qui converge p.s., ou seulement en proba, vers X_∞, alors*

$$X_n\overset{\mathbb{L}^1}{\to}X_\infty\ \Leftrightarrow\ (X_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \text{est uniformément intégrable}\ .$$

Définition 3.2.2 (Martingale à temps discret) *Soit $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$un espace de probas, muni d'une filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, et $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}$, adapté à $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, et tel que $X_t\in\mathbb{L}^1$ pour tout t positif. On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ est une surmartingale si*

$$\mathbb{E}\left(X_{t+s}\mid\mathscr{F}_t\right)\leq X_t,\ \text{pour tous}\ s,t\geq 0.$$

On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ est une sousmartingale si

$$\mathbb{E}\left(X_{t+s}\mid\mathscr{F}_t\right)\geq X_t,\ \text{pour tous}\ s,t\geq 0\ .$$

On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale si

$$\mathbb{E}\left(X_{t+s}\mid\mathscr{F}_t\right)=X_t,\ \text{pour tous}\ s,t\geq 0\ .$$

Théorème 3.2.2 (Inégalité maximale de Doob) *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous martingale, ou une surmartingale, et $\lambda\in\mathbb{R}_+$, alors*

$$\lambda\mathbb{P}\left(\sup_{1\ldots n}|X_i|\geq\lambda\right)\leq 3\max_{0\ldots n}\mathbb{E}\left(|X_k|\right)\ .$$

Théorème 3.2.3 (Inégalité de Doob) *Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale dans $\mathbb{L}^p$, avec $p>1$, notons q le conjugué de p, et $M_n^*=\sup_{0\ldots n}M_n$, alors*

$$\|M_n^*\|_p\leq q\|M_n\|_q\ .$$

Proposition 3.2.2 *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une surmartingale et $a<b$, alors $\mathbb{E}\left(M_n\left(a,b\right)\right)\leq\frac{1}{b-a}\mathbb{E}\left(\left(X_n-a\right)^-\right)$ où $M_n\left(a,b\right)$ est le nombre de montées effectuées par X d'un niveau inférieur ou égal à a à un niveau supérieur ou égal à b avant*

$$n=\max\{k,\ \exists n_1\leq\ldots\leq n_k\leq n,\ X_{n_{2i+1}}\leq a,\ X_{n_{2i+2}}\geq b\}\ .$$

Théorème 3.2.4 *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une surmartingale bornée dans $\mathbb{L}^1(\sup_n\ \mathbb{E}(|X_n|)<\infty)$, alors X_n converge vers $X_\infty\in\mathbb{L}^1$ quand $n\to\infty$. Si $(X_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une surmartingale inverse, rétrograde, dans la filtration rétrograde $(\mathscr{F}_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$, et si $(X_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{L}^1$, alors $X_{-\infty}=\lim_{n\to\infty}X_{-n}$ existe p.s. et $\mathbb{L}^1$. De plus, en notant $\mathscr{F}_{-\infty}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_{-n}$, on a*

$$\mathbb{E}\left(X_{-n}\mid\mathscr{F}_{-\infty}\right)\geq X_{-\infty}\ .$$

Lemme 3.2.2 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une surmartingale, et $D\subset[0;\infty[$ une partie dénombrable et dense. La restriction de X à D admet alors des limites à droite et à gauche (le long de D) en tout $t\geq 0$ p.s.*

$$\mathbb{P}\left(\forall t\in\mathbb{R}_+,\ \lim_{s\searrow t,\ s\in D}X_s=X_{t^+}\ \text{et}\ \lim_{s\nearrow t,\ s\in D}X_s=X_{t^-}\right)=1\ .$$

De plus, on a pour chaque t $\mathbb{E}\left(X_{t^+}\mid\mathscr{F}_t\right)\leq X_t$ p.s. Enfin, $(X_{t^+})_{t\geq 0}$ est une $(\mathscr{F}_{t^+})$-surmartingale.

Théorème 3.2.5 *On suppose que $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ satisfait aux conditions habituelles. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une surmartingale telle que $t\to\mathbb{E}\left(X_t\right)$ est continue à droite (toujours le cas pour une martingale). Alors, il existe une version $\left(\widetilde{X}_t\right)_{t\geq 0}$ de X, à trajectoires continues à droite, qui est une surmartingale.*

3.3 Théorèmes d'arrêt

Théorème 3.3.1 *Soit (X_t) une surmartingale à trajectoires continues à droite p.s. et bornée dans $\mathbb{L}^1$, i.e. $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}(|X_t|) < \infty$. Alors, (X_t) converge p.s. quand $t \to \infty$ vers $X_{\infty-}$, et $X_{\infty-} \in \mathbb{L}^1$.*

Définition 3.3.1 (Fermeture) *Si $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale, on dit qu'une variable aléatoire Z **ferme** M (à droite) si $Z \in \mathbb{L}^1$ et $M_t = \mathbb{E}(Z \mid \mathscr{F}_t)$ pour tout t. Dans le cas des surmartingales, la dernière égalité est remplacée par la condition $X_t \geq \mathbb{E}(Z \mid \mathscr{F}_t)$.*

Théorème 3.3.2 *Soit $(M_t)_t$ une martingale bornée dans $\mathbb{L}^1$, continue à droite, $M_{\infty-}$ sa limite. les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $(M_t)_t$ est fermée

ii) $(M_t)_t$ est uniformément intégrable

iii) $M_t \to M_{\infty-}$ dans $\mathbb{L}^1$.

Dans ce cas, $M_{\infty-}$ ferme la martingale.

Théorème 3.3.3 *i) Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale à trajectoires continues à droite p.s. et uniformément intégrable. Si T est un $(\mathscr{F}_t)$-temps d'arrêt, on a $M_T = \mathbb{E}(M_{\infty-} \mid \mathscr{F}_T)$, avec la convention $M_T = M_{\infty-}$ sur $\{T = \infty\}$. En conséquence, si $S \leq T$ sont deux temps d'arrêt, on a encore que $M_S = \mathbb{E}(M_t \mid \mathscr{F}_S)$.*

ii) Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ est une surmartingale continue à droite bornée dans $\mathbb{L}^1$ et fermée, et $S \leq T$ deux temps d'arrêt, alors $X_s = X_{\infty-}$ sur $\{S = \infty\}$, ou $X_{\infty-}$ ferme $(X_t)_t$. On a X_S, $X_T \in \mathbb{L}^1(\mathbb{P})$ et $X_S \geq \mathbb{E}(X_T \mid \mathscr{F}_S)$.

Théorème 3.3.4 *Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue à droite, et T un temps d'arrêt. Alors, M^T, la martingale arrêtée en T $(= (M_{T\wedge t})_t)$, est encore une martingale dans sa propre filtration. Elle est uniformément intégrable dès que M l'est ou que T est un temps d'arrêt borné.*

Théorème 3.3.5 (Scheffé) *Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires positives telles que $\xi_n \to \xi$, avec $\xi \in \mathbb{L}^1$. Si de plus $\mathbb{E}(\xi_n) \to \mathbb{E}(\xi)$, alors $\xi_n \to \xi$ dans $\mathbb{L}^1$.*

4 Semi martingales et intégration stochastique

4.1 Processus à variations finies et intégrale

Définition 4.1.1 (Fonction à variations finies, mesure de Stieljes) *Une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue est dite **à variations finies** s'il existe $C^+, C^- : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ croissantes telles que $f = C^+ - C^-$. (on suppose $f(0) = 0$). Si $C : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue à droite croissante et $C(0) = 0$, ma mesure de Stiljes est la mesure sur $\mathbb{R}^+$ telle que*

$$dC([a,b]) = C(b) - C(a) \ .$$

On peut supposer sans perdre de généralité C^+ et C^- continues, puisque leurs sauts se compensent. La décomposition devient unique si on suppose les mesures de Stieljes associées étrangères.

Lemme 4.1.1 *Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est à variations finies et continue. sa décomposition canonique est donnée par :*

$$C^+(t) = \sup_n \sum_{(k-1)2^{-n} \leq t} \left(f\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - f\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)^+ ,$$

$$C^-(t) = \sup_n \sum_{(k-1)2^{-n} \leq t} \left(f\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - f\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)^- .$$

Enfin :

$$|\mu|[0,t] = \sup_n \sum_{(k-1)2^{-n} \leq t} \left| f\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - f\left(\frac{k}{2^n}\right)\right| .$$

Définition 4.1.2 (Processus croissant, variations finies) *Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$un espace de probabilités filtré. On appelle processus croissant (continu) un processus $(C_t)_{t\geq 0}$ adapté, à trajectoires continues p.s. tel que $t \to C_t$ est croissant. On suppose $C_0 = 0$. On appelle processus à variations finies un processus qui peut s'exprimer comme différence de deux processus croissants. En particulier, les trajectoires sont p.s. à variations finies. Plus précisément , si (V_t) est un processus à variations finies et si C^+, C^- est la décomposition canonique de V, trajectoire par trajectoire,*

$$C^+(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{(k-1)2^{-n}\leq t} \left(V_{\frac{k+1}{2^n}} - f_{\frac{k}{2^n}}\right)^+ ,$$

est bien adapté. Ainsi, C^+, C^- sont deux processus croissants. Si V est à variations finies, et H est un processus progressivement mesurable, tel que p.s.

$$\int_0^t |H_s|\,|dV_s| < \infty,\ \forall t$$

(où $|dV_s|$ est la vraiation totale associée à V). On pose alors

$$(H.V)\,.t = \int_{[0,t]} H_s dV_s = \int_{[0,t]} H_s dC_+(s) - \int_{[0,t]} H_s dC_-(s)$$

est encore un processus à variations finie. Plus précisément,

$$|dHV| = |H|\,|dV|$$

4.2 Les martingales locales et leurs variations quadratiques

Définition 4.2.1 (Martingale locale) *Un processus continu adapté M est une martingale locale dans $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$s'il existe une suite de temps d'arrêt $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $T_n \nearrow \infty$p.s, telle que M_0 soit $\mathscr{F}_0$-mesurable, pour tout n, le processus*

$$M^{T_n} - M_0 = (M_{T_n\wedge t} - M_0)_{t\geq 0}$$

est une martingale.

Proposition 4.2.1 *Soit M une martingale locale continue et $M_0 = 0$ p.s. Si de plus M est un processus à variations finies, alors $M \equiv 0$ p.s.*

Théorème 4.2.1 *Soit M une martingale locale continue. Il existe un unique processus croissant, continu, noté $(<M,M>_t)_{t\geq 0}$, ou $(<M>_t)_{t\geq 0}$, ou encore $<M>$, tel que*

$$\left(M_t^2 - <M>_t\right)_t \text{ est une martingale locale.}$$

Proposition 4.2.2 *Soit M une martingale locale continue, telle que $M_0 \equiv 0$ p.s. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\sup_{t\geq 0} |M_t| \in \mathbb{L}^2(\mathbb{P})$.
ii) M est une vraie martingale et $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}(M_t^2) < \infty$.
iii) $\mathbb{E}(<M>_\infty) < \infty$.
iv) M est une vraie martingale et $\lim_{t\to\infty} M_t = M_\infty$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{P})$.

Corollaire 4.2.1 *Soit M une martingale locale continue et $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de subdivisions de $[0,t]$ dont le pas tend vers 0. Alors,*

$$<M>_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{t_i\in\tau_n} \left(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t}\right)^2 \text{ en probabilités.}$$

Proposition 4.2.3 *Si M et N sont deux martingales locales continues, alors $MN - <M,N>$ est une martingale locale, où l'on a étendu le crochet par polarisation, i.e.*

$$<M,N> = \frac{1}{4}\left(<M+N> - <M-N>\right) .$$

Proposition 4.2.4 *$M,N \to <M,N>$ est bilinéaire et symétrique. Si T est un temps d'arrêt,*

$$<M^T, N> = <M, N^T> = <M,N>^T = <M^T, N^T> .$$

Théorème 4.2.2 (Inégalité de Kunita Watanabe) *Soient M,N deux martingales locales, et H,K deux processus progressivement mesurables. Alors,*

$$\int_0^\infty |H_s K_s|\,|d<M,N>_s| \leq \int_0^\infty |H_s|^2 |d<M>_s|^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty |K_s|^2 |d<N>_s|^{\frac{1}{2}} .$$

4.3 Intégration stochastique pour les martingales bornées dans $\mathbb{L}^2$

Définition 4.3.1 (Processus élémentaire) *M_c^2 désigne l'espace des martingales continues, nulles en 0, bornées dans $\mathbb{L}^2$. Elles sont toujours du type $\mathbb{E}(M_\infty \mid \mathscr{F}_t)$, avec M_∞ de carré intégrable centrée. On munit cet espace du produit scalaire $(M,N) = \mathbb{E}(M_\infty N_\infty) = \mathbb{E}(< M,N >_\infty)$. C'est alors un espace de Hilbert.*

Définition 4.3.2 (intégrale élémentaire) *On note $\mathcal{P}$ la tribu progressive (i.e, qui contient les A telles que $(t,\omega) \to \mathbb{1}_{(t,\omega)\in A}$ soit progressivement mesurable, i.e. sa restriction à $[0,u] \times \Omega$ est $\mathcal{B}([0,u]) \times \mathscr{F}_u$-mesurable). On note également $\mathbb{L}^2(M)$ le quotient de l'espace des processus progressifs tels que $\mathbb{E}\left(\int_0^\infty H_s d < M >_s\right) < \infty$, où $M \in M_c^2$, par la relation $H \sim H' \Leftrightarrow \int_0^\infty (H_s - H_s')^2 d < M >_s \equiv 0$. $\mathbb{L}^2(M)$ est alors un espace de Hilbert, muni du produit scalaire*

$$(H,K) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty H_s K_s d < M >_s\right) .$$

On appelle alors processus élémentaire tout processus $H \in \mathbb{L}^2(M)$ du type

$$H_s(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} H_i(\omega)\, \mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s) .$$

, où $0 \le t_1 \le ... \le t_p$, et H_i est une variable aléatoire de $\mathscr{L}^2(\mathbb{P}, \mathscr{F}_{t_i})$. C'est un processus adapté, en escalier. On peut alors définir l'intégrale stochastique

$$(H.M)_t = \sum_{i=0}^{p-1} H_i \left(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i \wedge t}\right) .$$

C'est encore une martingale dans M_c^2 pourvu que les variables H_i soient bornées. On va voir comment cette intégrale élémentaire peut-être étendue à $H \in \mathbb{L}^2(M)$. On commence par observer que la définition de $H.M$ ne dépend pas de la représentation de H sous forme élémentaire. De plus, si $H \sim H'$, alors $H.M = H'.M$, car M reste constante sur l'intervalle sur lequel $< M >$ reste constant.

Lemme 4.3.1 *L'ensemble des processus H élémentaires bornés sont denses dans $\mathbb{L}^2(M)$.*

Théorème 4.3.1 *l'application qui, à $H \in \mathscr{E}$ associe $H.M$ s'étend de facon unique en une isométrie de $\mathbb{L}^2(M)$ à valeurs dans M_c^2. Elle est caractérisée par*

$$< H.M, N >= H. < M,N >, \forall N \in M_c^2 .$$

En particulier, $< H.M >= H^2. < M >$. En particulier, si T est un temmps d'arrêt, on a que

$$\left(\mathbb{1}_{[0,T]} H\right).M = (H.M)^T = H.M^T .$$

Le plus souvent, on note $(H.M)_t = \int_0^t H_s dM_s$. C'est l'intégrale stochastique de H par rapport à la martingale de carré intégrable M.Enfin, $< \int_0^t H_s dM_s >= \int_0^t H_s^2 d < M >_s$.

4.4 Semimartingales

Définition 4.4.1 (Semimartingale) *Un processus stochastique Xe est une **semi martingale** si on peut l'exprimer sous la forme $X_t = M_t + A_t$, avec M une martingale locale, continue, A un processus à variations finies. (donc adapté et à trajectoires finies) Une telle décomposition est alors unique, et est appellée décomposition canonique. On note $< X >=< M >$, et de facon plus générale, si X et X' sont deux semi martingales, $< X, X' >=< M, M' >$.*

Proposition 4.4.1 *Si X et X' sont deux semi martingales, et si $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de subdicisions de $[0,\infty[$ de pas tendant vers 0, alors*

$$< X, X' >_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{t_i \in \tau_n} \left(X_{t_{i+1}\wedge t} - X_{t_i\wedge t}\right)\left(X'_{t_{i+1}\wedge t} - X'_{t_i\wedge t}\right) \text{ en probabilités.}$$

Proposition 4.4.2 *Soit H un processus adapté continu et X une semi martingale. Alors,*

$$(H.X)_t = \lim_{|\tau\to\infty|} \sum_{t_i\in\tau} H_{t_i}\left(X_{t_{i+1}\wedge t} - X_{t_i\wedge t}\right) \text{ en probabilités.}$$

En conséquence, on a la formule d'intégration par parties :

$$X_t.X'_t - X_0X'_0 = \int_0^t X_s dX'_s + \int_0^t X'_s dX_s + < X, X' >_t \ .$$

4.5 Formule d'Itô et applications

4.5.1 Formule d'Itô

Théorème 4.5.1 *i) Cas unidimensionnel : Soit X une semi martingale, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On a alors*

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, d < X >_s \ .$$

ii) Dimension quelconque : Soit $\underline{X} = (X_1, ..., X_d)$ un vecteur de semi martingales et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Alors,

$$f(\underline{X}_t) - f(X_0) = \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{X}_s)\, dX_s^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le d} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(\underline{X}_s)\, d < X^{(i)}, X^{(j)} >_s$$

Corollaire 4.5.1 (Martingales exponentielles) *Si M est une martingale locale, et $q \in \mathbb{R}$, alors $\mathscr{E}_t = \exp\left(qMt - q^2/2 < M >_t\right)$ est une martingale locale, ainsi que l'exponentielle complexe $\mathscr{E}_t = \exp\left(iqMt + q^2/2 < M >_t\right)$*

Définition 4.5.1 (Nouvelle définition du mouvement brownien) *Si $(\mathscr{F}_t)_t$ est une filtration, on appelle $(\mathscr{F}_t)_t$-mouvement brownien un processus adapté continu $(B_t)_t$ tel que $(B_{t+s} - B_t)$ est indépendant de $\mathscr{F}_t$ et suit une loi $\mathcal{N}(0, s)$.*

Théorème 4.5.2 (Levy) *i) Un processus $(X_t)_t$ adapté à $(\mathscr{F}_t)_t$ et continu est un $(\mathscr{F}_t)$ mouvement brownien, si et seulement si c'est une martingale locale et $< X >_t = t$.*

ii) Si $X = \left(X^{(1)}, ..., X^{(d)}\right)$ est un processus continu et adapté à une filtration $(\mathscr{F}_t)_t$, c'est un $(\mathscr{F}_t)_t$-mouvement brownien si et seulement si les $X^{(i)}$ sont des martingales locales et si $< X^{(i)}, X^{(j)} >_t = t\delta_{ij}$.

Théorème 4.5.3 *i) Version unidimensionnelle : Soit M une martingale locale continue, $M_0 = 0$. on suppose que $< M >_\infty = \infty$ p.s, et on introduit le changement de temps*

$$T_t = \inf\{s \ge 0, < M >_s > t\} < \infty \ p.s.$$

On pose $B_t = M_{T_t}$. Alors, le processus $(B_t)_t$ est un mouvement brownien, et on a $M_t = B_{<M>_t}$.

ii) Version multidimensionnelle : Soient $M^{(1)}, ..., M^{(d)}$ des martingales locales nulles en $t = 0$ dans une même filtration, telle que $< M^{(i)}, M^{(j)} > \equiv 0$ pour $i \neq j$, et $< M^{(i)} >_\infty = \infty$ p.s. pour tout i. Alors, en posant

$$T_t^{(i)} = \inf\{s \ge 0, < M^{(i)} >> t\} \ , \ \text{et } B_t^{(i)} = M_{T_t}^{(i)},$$

alors les $B^{(i)}$ sont des mouvements browniens indépendants.

Théorème 4.5.4 (Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy, BDG) *Pour tout $p > 0$, il existe $c_p > 0$ et $C_p < \infty$ telles que , pour toute martingale continue et nulle en 0 on ait*

$$c_p\mathbb{E}\left(< M >_\infty^{p/2}\right) \le \mathbb{E}\left(M_\infty^{*p}\right) \le C_p\mathbb{E}\left(< M >_\infty^{p/2}\right) \ ,$$

où $M_\infty^* = \sup_{t\ge 0} |M_t|$.

Théorème 4.5.5 (Itô) *Soit $\mathscr{F}_t$ la filtration d'un mouvement brownien et M_t une martingale de la forme $\mathbb{E}(Y \mid \mathscr{F}_t)$, avec $Y \in \mathbb{L}^2(\mathscr{F}_\infty)$. Alors, il existe un processus progressif $H \in \mathbb{L}^2(B)$, (ici, de carré intégrable p.s, car $< B >_s = s$) tel que $M_t = \mathbb{E}(Y) + \int_0^t H_s dB_s$. En particulier, M est une martingale continue.*

Lemme 4.5.1 *Soit $(D_t)_{t\geq 0}$ une martingale strictement positive continue. Alors, il existe une unique martingale locale $(L_t)_t$ telle que*

$$D_t = \exp\left(L_t - \frac{1}{2} < L >_t\right) .$$

Théorème 4.5.6 (Girsanov) *Soit $D_t = \exp\left(L_t - \frac{1}{2} < L >_t\right)$ une martingale strictement positive, uniformément intégrable, $\mathbb{E}(D_t) = 1$ et $\mathbb{Q} = D_\infty \mathbb{P}$. Si $(M_t)_t$ est une martingale locale continue sous $\mathbb{P}$, alors $M - < M, L >$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale continue.*

5 Equations différentielles stochastiques

Définition 5.0.2 (Equation différentielle stochastique, solution faible) *Soient m, n des entiers strictement positifs, et $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \to M_{m,n}(\mathbb{R})$, et $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ mesurables et localement bornées. On considère l'EDS*

$$E(\sigma, b) \quad dX_t = \sigma(t, X_t)\, dB_t + b(t, X_t)\, dt ,$$

où B est un mouvement brownien n-dimensionnel. On dit que $E(\sigma, b)$ admet une solution faible si $\forall x \in \mathbb{R}^m$, il existe un espace $(\Omega, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$, avec conditions habituelles , un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien n-dimensionnel B, et un processus X_t continu, adapté, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, tel que

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s + \int_0^t b(s, X_s)\, ds ,$$

dans le sens ou si $X = \left(X^1, ..., X^m\right)$,

$$X_t^i = x^i + \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s)\, dB_s^j + \int_0^t b_i(s, X_s)\, ds .$$

ON dit que $E(\sigma, b)$ vérifie l'unicité faible si toutes les solutions issues de x ont la même loi.

Définition 5.0.3 (Solution forte) *On se fixe $(\Omega, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$, et un mouvement brownien B. On dit que l'EDS $E(\sigma, b)$ a la propriété d'unicité forte, ou trajectorielle si, lorsque deux processus X et X' vérifient*

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s + \int_0^t b(s, X_s)\, ds ,$$

et

$$X'_t = x + \int_0^t \sigma(s, X'_s)\, dB_s + \int_0^t b(s, X'_s)\, ds ,$$

alors $X = X'$. On dit qu'une solution X est forte si elle est adaptée à la filtration naturelle de B, i.e. elle s'exprime comme fonction de B.

Théorème 5.0.7 (Yamada-Watanabe) *Existence faible + unicité trajectorielle $\Rightarrow$ unicité faible + solution forte.*

5.1 Coefficients lipschitziens

Théorème 5.1.1 *On suppose σ et b continues sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ et globalement lipschitzienne en x, c'est à dire qu'il existe $K < \infty$, $\forall t \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, on ait*

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq K\,|x - y| \ .$$

Alors, l'EDS(σ, b) admet une unique solution trajectorielle. Plus précisément, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall B$ mouvement brownien , il existe une unique solution forte (adaptée à la filtration de B) et issue de x.

On pose $C = 2(4+T)K^2$, et on travaille sur $[0, T]$.

Théorème 5.1.2 *Sous les hypothèses de lipschitziannité, des coefficients σ et b, l'application*

$$\phi : X \to x + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s + \int_0^t b(s, X_s) ds$$

est contractante dans $\mathscr{E}$ dès que C est supérieur à $2K + 8K^2$. En conséquence, ϕ admet un unique point fixe, qui sera donc solution forte de l'EDS.

Lemme 5.1.1 *Si* $(U_s)_{s\in[0,t]}$ *est continue adapté dans* $\mathscr{E}$, *et si on pose* $M_t = \int U_s dB_s$, $V_t = \int U_s ds$, *alors* M *et* $V \in \mathscr{E}$, *et*

$$\|M\| \leq \sqrt{\frac{2}{C}}\|U\|, \text{ et } \|V\| \leq \frac{1}{C}\|U\| \,.$$

Théorème 5.1.3 $\forall x \in \mathbb{R}^m$, *notons* X^x *la solution de l'EDS*(σ, b) *issue de* $X_0^x = x$. *Pourvu que* C *soit assez grand, l'application* $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \to & \mathscr{E} \\ x & \mapsto & X^x \end{array}$ *est continue.*

Corollaire 5.1.1 *Avec les notations précédentes, et sous conditions de lipschitziannité, la famille des lois dees procesus* X^x *est fortement markovienne. Plus précisément, si* $(\mathscr{F}_t)$ *est la filtration su brownien* B, *et* T *est un* $(\mathscr{F}_t)_t$*-tda, fini presque surement, alors pour toute fonction mesurable, on a*

$$\mathbb{E}(F(X^x_{T+t}, t \geq 0) \mid \mathscr{F}_t) = \mathbb{E}(F(X^Y_t, t \geq 0), \text{ où } Y = X_t \,.$$

Autrement dit, conditionellement à $X_t = y$, *la solution translatée* $(X^x_{t+T})_t$ *a même loi que la solution partant de* y *et est indépendante de* $\mathscr{F}_T$.