Fiche résumée du cours de Processus de markov par I.Kourkova

Une chaîne de Markov à temps continu se caractérise par sa mesure initiale et par une matrice $I \times I$, dite d'intensité, notée Q. Elle vérifie toujours les propriétés suivantes :

Q1 $0 \leq -q_{i,i} < \infty$, $\forall i \in I$.

Q2 $q_{i,j} \geq 0$ pour tout $i \neq j$, $i, j \in I$.

Q3 $\sum_{j \in I} q_{i,j} = 0$, pour tout $i \in I$.

Théorème 0.0.1 *Soit I fini.*

i) $P(t)$ est l'unique solution de l'équation $P'(t) = P(t)Q$, avec la condition initiale $P(0) = Id$.

ii) $P(t)$ est l'unique solution de l'équation $P'(t) = qP(t)$, avec la condition initiale $P(0) = Id$.

iii) $\left(\frac{d}{dt}\right)^{(k)} |_{t=0} P(t) = Q^k$

Pour Q matrice d'intensité, on lui associe une matrice Π, par $\Pi_{i,i} = 0$, et $\Pi_{i,j} = -q_{i,j}/q_{i,i}$, si $q_{i,i} \neq 0$, et $\Pi_{i,i} = 1$, $\Pi_{i,j} = 0$, si $q_{i,i} = 0$.

Définition 0.0.1 *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$, minimal, continu à droite, est dit processus de markov de mesure initiale λ et de matrice d'intensité Q si son processus de sauts $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de mesure initiale Λ et de matrice stochastique Π sur I à temps discret, et si le vecteur des durées écoulées $(S_1, S_2, ...)$ a la loi conditionnelle de n variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de paramètres $q_(Y_0), q(Y_2), ...$ respectivement sous condition que les valeurs des Y_i sont fixées.*

Théorème 0.0.2 (Markov forte) *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Markov de mesure initiale λ et de matrice d'intensité Q , et T un temps d'arrêt. Alors, sous la condition $X_T = i$, $i \in I$, $\widetilde{X} = (X_{T+t})_t$ est aussi un processus de Markov de mesure initiale δ_i et de matrice d'intensité Q indépendant de $\mathscr{F}_T$.*

Théorème 0.0.3 *Pour T un temps d'arrêt, pour toute variable aléatoire η $\mathscr{F}_T$-mesurable,, pour tout $A \in \mathscr{F}_T$, pour tout $i, k \in I$, on a*

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\{X_{T+\eta} = k\} \cap A \cap \{\eta < \infty\} \cap \{T < \zeta\} \cap \{X_T = i\}) \\ &= \mathbb{P}_i(\{X_\eta = k\})\mathbb{P}(A \cap \{\eta < \infty\} \cap \{T < \zeta\} \cap \{X_T = i\})\end{aligned}$$

On peut, grâce à ce théorème, calculer $\mathbb{E}(f(X_{T+\eta}))$.

Proposition 0.0.1 *i) Si $(X_t^j)_t$, $j \leq r$ sont des processus de poisson indépendants de paramètres λ_j, en posant $\lambda = \sum \lambda_j$, alors $(\sum X_t^j)_j$ est un processus de poisson de paramètre λ.*

ii) Soit $(X_t)_t$ un processus de Poisson de paramètre λ. Soient $p_j \geq 0$, $j \leq r$ tels que $\sum p_j = 1$ et $\xi_1, \xi_2, ...$ une suite de variable aléatoire iid., vérifiant $\mathbb{P}(\xi_1 = j) = p_j$. On pose $J_0^j(\omega) = 0$ pour tout $j \leq r$, et $J_{n+1}^j(\omega) = \min\{J_k > J_n^j(\omega) : \xi_k = j\}$. Soit $(X_t^j)_t$ le processus continu à droite avec des sauts aux instants $J_n^j(\omega)$, et le processus de saut $Y_n^j = n$. Alors, les $(X_t^j)_t$ sont des processus de poisson indépendants de paramètre λp_j.

Proposition 0.0.2 *Soit $(X_t)_t$ un processus de Poisson. Sous condition "$(X_t)_t$ fait exactement un saut entre t et $t+s$", la loi de ce saut est uniforme sur $[t, t+s]$.*

Proposition 0.0.3 *Soit $(X_t)_t$ un processus de Poisson. sous condition "$X_t = n$", les instants de sauts $J_1, ...J_n$ on la loi d'une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$ rangées dans l'ordre de leur croissance. la densité de cette famille est $f(t_1, ..., t_n) = n!t^{-n}\mathbb{1}_{\{0\leq t_0 \leq ... \leq t_n\}}$*

Définition 0.0.2 *Un processus minimal $(X_t)_{t\geq 0}$ continu à droite à valeurs dans $\{0, 1, 2, ...\} \cup \{\infty\}$ est dit processus de naissance d'intensité q_i, si, sous condition $X_0 = i$, les durées écoulées entre les sauts $S_1, S_2, ...$ sont des variables aléatoires indépendantes, exponentielles, de paramètres respectifs $q_i, q_{i+1}, ...$ et le processus de sauts est $Y_n = i + n$ pour tout n.*

Proposition 0.0.4 *Soit $(X_t)_t$ un processus de naissances d'intensité $(q_j)_j$, partant de 0.*

i) Si $\sum q_j^{-1} < \infty$, alors $\mathbb{P}(\zeta < \infty) = 1$, le processus explose.

ii) Sinon,$\sum q_j^{-1} = \infty$, alors $\mathbb{P}(\zeta = \infty) = 1$, le processus n'explose pas.

Proposition 0.0.5 *Soient $S_1, S_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes exponentielles de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ respectivement.*

i) Si $\sum \lambda_i^{-1} = \infty$, on a $\mathbb{P}(\sum S_i = \infty) = 1$

ii) Sinon, $\sum \lambda_i^{-1} < \infty$, on a $\mathbb{P}(\sum S_i < \infty) = 1$

On pose $T^A = \inf\{t \geq 0,\ X_t \in A\}$, et $h_i^A = \mathbb{P}_i(T^A < \infty)$.

Théorème 0.0.4 *Le vecteur $h^A = (h_i^A,\ i \in I)$ est la solution non-négative minimale du système*

$$\begin{cases} lh_i^A = 1 & \text{pour } i \in A \\ h_i^A = \sum q_{i,j} h_j^A & \text{pour } i \notin A \end{cases}$$

Théorème 0.0.5 *Soit $k_i^A = \mathbb{E}_i(T^A)$. Supposons que $q_i > 0$ pour tout $i \notin A$. Le vecteur $k^A = (k_i^A, i \in I)$ est la solution non négative du système*

$$\begin{cases} lk_i^A = 0 & \text{pour } i \in A \\ k_i^A = -\sum q_{i,j} k_j^A & \text{pour } i \notin A \end{cases}$$

Proposition 0.0.6 *Soit $T^i(\omega) = \inf\{t \geq J_1(\omega) :\ X_t(\omega) = i\}$.*

i) Si $q_i = 0$ ou $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$, alors i est récurrent et $\int_0^\infty p_{i,i}(t)dt = \infty$.

ii) Si $q_i > 0$ et $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$, alors i est transient et $\int_0^\infty p_{i,i}(t)dt < \infty$.

Proposition 0.0.7 *Soit Q une matrice vérifiant $Q1$, $Q2$, $Q3$, et Π la matrice associée. Alors, λ est invariante si et seulement si $\mu = \Pi\mu$, où $\mu_i = -\lambda_i q_{i,i}$.*

Proposition 0.0.8 *Soit Q irréductible, récurrente, soit λ sa mesure invariante. Soit $s > 0$, alors $\lambda Q = 0$ si et seulement si $\lambda P(s) = \lambda$.*

Proposition 0.0.9 *$(\xi_t)_{t\in T}$ est un processus de Markov avec une fonction de transition P vérifiant $(i)-(iii)$ si et seulement si pour tout $s \leq t$ et tout $\Gamma \in \mathcal{B}$, on a*

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\xi_t \in \Gamma} \mid \mathscr{F}_{\leq s}) = P(s, \xi_s, t, \Gamma)\ .$$

Définition 0.0.3 (Markov forte) *La famille (ξ_t, P_x) progressivement mesurable vérifie la propriété de Markov forte par rapport à $(\mathscr{F}_{\leq t})_{t\geq 0}$ (resp.$(\mathscr{F}_{\leq t+})_{t\geq 0}$) si pour tout temps d'arrêt T par rapport à $\mathscr{F}_{\leq t}$ (resp. $\mathscr{F}_{\leq t+}$) si pour toute variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ ou $\mathbb{R}_+\cup\{\infty\}$, et $\mathscr{F}_{\leq T}$, (resp. $\mathscr{F}_{\leq T+}$)-mesurable, pour tout $x \in X$ et $\Gamma \in \mathcal{B}$, on ait*

$$P_x(\xi_{T+\eta} \in \Gamma \mid \mathscr{F}_{\leq T}) = P(\eta, \xi_T, \Gamma) \quad (\text{resp.} \mid \mathscr{F}_{\leq T+})\ P_x\text{−p.s. sur } \{T, \eta < \infty\}\ .$$

Proposition 0.0.10 *Soit (ξ_t, P_x) une famille de Markov qui vérifie la propriété de Markov forte. Alors, pour tout $B \in \mathscr{F}_{\geq 0}$*

$$P_x(\theta_T^{-1} \cap B \mid \mathscr{F}_T) = P_{\xi_T}(B),\ P_x - p.s.\ \text{sur } \{T < \infty\}\ .$$

Proposition 0.0.11 *Si T et η prennent un nombre de valeurs au plus dénombrable, la propriété de Markov forte est vérifiée par rapport à $(\mathscr{F}_{\leq t})_{t\geq 0}$.*

Théorème 0.0.6 *Une famille de Markov (ξ_t, P_x), homogène en temps, Fellérienne, avec des trajectoires continues à droite vérifie la propriété de Markov forte par rapport à $(\mathscr{F}_{\leq t+})_{t\geq 0}$.(Et bien sur par rapport à $(\mathscr{F}_{\leq t})_{t\geq 0}$*

Définition 0.0.4 (Générateur infinitésimal) *Soit E un espace de Banach et P^t un semi-groupe d'opérateurs linéaires sur cet espace, $0 \leq t < \infty$, $P^0 = Id$. On dit qu'un opérateur A défini sur un domaine $D_A \subset E$ est un* ***générateur infinitésimal*** *de ce semi-groupe si pour tout $f \in D_A$, il existe une limite $\lim_{t\to 0} t^{-1}(P^t f - f) = Af$, au sens où $\|t^{-1}(P^t f - f) - Af\| \to 0$. Cette limite détermine la valeur de A sur f.*

Théorème 0.0.7 *i) B_0 est un espace vectoriel fermé.*

ii) si $f \in B_0$, P^t est uniformément continue en t sur $[0, \infty[$.

iii) si $f \in B_0$, alors $P^t f \in B_0$.

iv) $D_1 \subset B_0$, $AD_A \subset B_0$.

v) On a les équations de kolmogorov : $AP^t f = P^t Af = \frac{d}{dt}P^t f$, ce qui s'écrit autrement comme

$$P^t f = f + \int_0^t AP^s f ds = f + \int_0^t P_s A f ds\ .$$

Définition 0.0.5 (Résolvante) *On définit pour $\lambda > 0$*

$$R_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P^t f(x) dt\ .$$

Cette famille est appellée la résolvante de la famille (P^t).