Grands Théorèmes d'Intégration

0.0.1 *Théorème* ***(Borel-Cantelli)***

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles d'un espace mesuré $(E, \mathscr{A}, \mu)$. Alors, si $\sum\limits_{n\geq 1}\mu(A_n) < \infty$, on a $\mu(\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n) = 0$, où l'on a posé $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcap\limits_{n\geq 1}\bigcup\limits_{k\geq n} A_k$

0.0.2 *Théorème* ***(des classes monotones)***

Soit $\mathscr{C}$ une famille de parties de E. Si $(\mathscr{M}_i)$ est la famille de classes monotones contenant $\mathscr{C}$, alors $\cap\mathscr{M}_i$ est encore une classe monotone, c'est la plus petite classe monotone contenant $\mathscr{C}$, on la note $\mathscr{M}(\mathscr{C})$.

Si $\mathscr{C}$ est stable par intersection finie, alors $\mathscr{M}(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C})$ est une tribu.

0.0.3 *Théorème* ***(Beppo-Levi, théorème de convergence monotone)***

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite croissante de fonctions mesurables $E \to \mathbb{R}_+$, avec $f_\infty = \lim \uparrow f_n$ qui est mesurable. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \uparrow \int f_n d\mu = \int \lim\limits_{n\to+\infty} \uparrow f_n d\mu = \int f_\infty d\mu$

0.0.4 *Lemme* ***(Fatou)***

Soit une suite de fonctions $f_n : E \to \mathbb{R}_+$ mesurables positives. On rappelle que $\liminf(f_n)$ est mesurable, et on a $\int \liminf(f_n) \leq \liminf \int f_n d\mu$

0.0.5 *Théorème* ***(Convergence dominée, Lebesgue)***

Soit $f_n : E \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables.On suppose :

i) $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$ μ-presque partout

ii) $\exists g \in \mathscr{L}_1^+$ telle que $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n$ μ-presque partout

Alors, f_n, $f \in \mathscr{L}_1$, et $\int |f_n - f| d\mu \to 0$. En particulier, $\int f_n d\mu$ converge vers $\int f d\mu$.

0.0.6 *Proposition* ***(Lemme de Scheffé)***

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $E \to \mathbb{R}_+$, telles que $f_n \to f$ μ-presque partout. On suppose $\int f d\mu$ finie et que $\int f_n d\mu$ converge vers $\int f d\mu$. Alors, on a $\int |f_n - f| d\mu \to 0$

0.0.7 *Théorème* ***(Egoroff)***

Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré, de mesure **finie**. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions telle que $f_n \to f$ $\mu(dx)$-presque partout. Alors, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A, \mu(A) < \varepsilon$, et tel que f_n converge uniformément vers f sur $E - A$

0.0.8 *Théorème*

On se donne un espace métrique (U, d) et une application $f : U \times E \to \mathbb{R}$. On suppose que :

i) $\forall u \in U$, $f(u, .)x \to f(u, x) \in \mathscr{L}_1(\mu)$

ii) $\mu(dx)$-presque partout, $f(., x)u \to f(u, x)$ est continue en un point u_0

iii) $\exists g \in \mathscr{L}_1^+(\mu)$ telle que $|f(u, x)| \leq g(x)$ $\mu(dx)$-presque partout, $\forall u \in U$

Alors, $I(u) = \int_E f(u, x)\mu(dx)$ est une application $U \to \mathbb{R}$, continue en u_0.

0.0.9 *Théorème*

Soit I un intervalle ouvert de I, $u_0 \in I$, et une application $f : I \times E \to \mathbb{R}$. On suppose que :

i) $\forall u \in I$, $f(u, .)x \to f(u, x) \in \mathscr{L}_1(\mu)$

ii) $\mu(dx)$-presque partout, $f(., x)u \to f(u, x)$ est dérivable en u_0 de dérivée $\partial_u(u_0, x)$

iii) $\exists g \in \mathscr{L}_1^+(\mu)$ telle que $|f(u, x) - f(u_0, x)| \leq g(x)|u - u_0|$ $\mu(dx)$-presque partout, $\forall u \in U$

Alors, $F(u) = \int_E f(u, x)\mu(dx)$ est une application $I \to \mathbb{R}$, dérivable en u_0 avec pour dérivée $F'(u_0) = \int_E \partial_u f(u_0, x)\mu(dx)$.

0.0.10 Théorème ***(Dérivation, Lebesgue)***

Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, formons

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$$

Alors, F est dérivable $\lambda-$presque partout, et $\partial F(x) = f(x)$ $\lambda(dx)$-presque partout

0.0.11 Théorème ***(Lebesgue)***

Soit F absolument continue. Alors F est dérivable presque partout de dérivée $\partial F \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, et telle que $F(x) = F(0) + \int_0^x \partial F(t)dt$

0.0.12 Théorème

Soit $F : \overline{\mathbb{R}} \to [0,1]$, croissante,avec $F(-\infty) = 0$ et $F(+\infty) = 1$.

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $]0,1[$, la fonction F^{-1} est croissante, continue à droite, donc mesurable, et l'image de λ par F^{-1} est une mesure μ sur $\mathbb{R}$ dont la fonction de répartition est F. On appelle μ la mesure de Stieltjes associée à F, notée $\mu(dx) = dF(x)$ Enfin, si F est C^1, on a $dF(x) = F'(x)dx$.

0.0.13 Théorème ***(Inégalité de Holder)***

Si $f \in L^p$,$g \in L^q$ sont deux fonctions mesurables $E \to \mathbb{R}$, et p, q conjugués dans $[1, +\infty]$ (ie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), alors $fg \in L^1$ et

$$\|fg\|_1 = \int |fg|d\mu \leq \|f\|_p . \|g\|_q$$

0.0.14 Proposition ***(Inégalité de Jensen)***

Soit μ une mesure de probabilité, $f \in L^1(\mu)$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, convexe (donc continue et mesurable), alors :

$$\varphi(\int f d\mu) \leq \int \varphi(f)d\mu$$

0.0.15 Théorème ***(Riesz)***

$(L^p, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé, et est un espace de Banach.

0.1 Le théorème de Radon Nikodym

0.1.1 Définition ***(Mesures absolument continues, étrangères)***

Soient μ et ν deux mesures sur (E, ξ). On dit que ν est **abslument continue** par rapport à μ, noté $\nu \ll \mu$ si toute partie μ-negligeable est ν-negligeable. Cette définition est également valide pour des mesures signées.

On dit que μ et ν sont **étrangères** noté $\mu \perp \nu$, si il existe $N \subset E$ vérifiant $\mu(N) = \nu(N^C) = 0$

0.1.2 Théorème ***(Fubini-Tonelli, cas positif)***

Soient $(E, \mathscr{E}, \mu)$, et $(F, \mathscr{F}, \nu)$ deux espaces mesurés, avec μ et ν σ-finies. On considère $f : E \times F \to \mathbb{R}_+$. Alors, les applications

$$x \mapsto \int_F f(x,y)\nu(dy)$$

$$y \mapsto \int_E f(x,y)\mu(dx)$$

sont respectivement $\mathscr{E}$-mesurables et $\mathscr{F}$-mesurables.

Enfin

$$\int_{E\times F} fd(\mu \otimes \nu) = \int_E \mu(dx) \left(\int_F \nu(dy) f(x,y) \right) = \int_E \mu(dx) \left(\int_F \nu(dy) f(x,y) \right)$$

0.1.3 Théorème ***(Fubini-Lebesgue)***

Soient $(E, \mathscr{E}, \mu)$, et $(F, \mathscr{F}, \nu)$ deux espaces mesurés, avec μ et ν σ-finies. On considère $f : E \times F \to \mathbb{R}$. **On suppose que $\mathbf{f \in L^1(E \times F, \mu \otimes \nu)}$.** On a alors :

i) $\mu(dx)$-presque partout, $y \mapsto f(x, y) \in L^1(F, \nu)$
ii) $nu(dy)$-presque partout, $x \mapsto f(x, y) \in L^1(E, \mu)$
iii) $x \mapsto \int_F f(x, y)\nu(dy)$ est $\mathscr{E}$-mesurable, et dans $L^1(E, \mu)$
iv) $y \mapsto \int_E f(x, y)\mu(dx)$ est $\mathscr{F}$-mesurable, et dans $L^1(F, \nu)$
v) $\int\limits_{E\times F} fd(\mu\otimes\nu) = \int\limits_E \mu(dx)\left(\int\limits_F \nu(dy)f(x,y)\right) = \int\limits_E \mu(dx)\left(\int\limits_F \nu(dy)f(x,y)\right)$

NB : Pour appliquer ce théorème (vérifier que $\mathbf{f \in L^1(E \times F, \mu \otimes \nu)}$), on applique Fubini-Tonelli à $|\mathbf{f}|$

0.1.4 Théorème ***(Radon-Nikodym)***

Soient $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable, ν une mesures positive **sigma finie**, et μ une mesure signée. Alors , les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\mu \ll \nu$
ii) (Uniforme absolue continuité) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\nu(A) < \eta \Rightarrow |\mu|(A) < \varepsilon$
iii) $\exists g \in L^1(\nu)$, mesurable, et μ-essentiellement unique, telle que $d\mu = gd\nu$, et $|\mu|$=$|g|\nu$

0.1.5 Théorème ***(Riesz)***

Soit E un espace séparable métrique localement compact. Soit $\mathbb{C}_0 = \{f, \text{continue tendant vers 0 à l'infini}\}$. On munit $\mathbb{C}_0$ de la norme uniforme. Si $\Phi : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue, alors il existe une unique mesure signée μ sur E muni de la tribu borélienne telle que $\Phi(f) = \int f d\mu$. On peut remarquer que μ est une mesure positive si et seulement si Φ est positive.

0.1.6 Quelques lois importantes

i) Lois dicrètes, à valeurs dans $\mathbb{Z}_+$

a) Masse de dirac en k, δ_k, loi de la variable aléatoire constante égale à k
b) Loi de Bernouilli, sur $\{0; 1\}$: Soit $p \in]0; 1[$, β loi de Bernouilli avec paramètre p : $\beta(1) = p$, et $\beta(0) = 1 - p$
c) Loi Binomiale , sur $\{0, 1..n\}$: Soit $n \in \mathbb{N}$, $p \in]0; 1[$. La loi binomiale de paramètres (n, p) est la mesure ρ sur $\{0, 1..n\}$, telle que

$$\rho(k) = \binom{k}{n} p^k (1 - p)^{n-k}$$

d) Loi géométrique, sur $\mathbb{N}$: pour $p \in]0; 1[$ elle est donnée par

$$\gamma(k) = p^{k-1}(1 - p)$$

e) Loi de Poisson : on se donne $c \in]0, \infty[$. La loi de poisson de paramètre c est la mesure ν sur $\mathbb{Z}_+$ donnée par

$$\nu(k) = e^{-c}\frac{c^k}{k!}$$

ii) Lois continues, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On regarde principalement les mesures absolument continues par rapport à Λ_d.

a) Loi uniforme sur $[0; 1]$: c'est la mesure de Lebesgue sur $[0; 1]$. la loi uniforme sur $[a; b]$ est la loi de densité

$$\frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a;b]}$$

b) Loi exponentielle de paramètre $c > 0$. C'est la loi de densité

$$ce^{-cx}$$

.

c) Loi de cauchy, avec pour densité

$$\frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$

d) Loi gaussienne, ou loi normale centrée réduite, avec pour densité

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Si $m \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, on note $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ la loi gaussienne de moyenne m et de variance σ^2, ie la loi de densité

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Si ξ a pour loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors $\xi' = \sigma\xi + m$ suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

0.1.7 Théorème

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire X caractérise la loi de cette variable. Si X et X' sont deux variable aléatoire dans $\mathbb{R}^d$ telles que $\Phi_X = \Phi_{X'}$, alors X et X' ont la même loi. On a une formule d'inversion, dite **Formule de Plancherel** ; si $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, de transformée de fourier intégrable (ex , φC^2 à support compact), alors

$$E(\varphi(X)) = \int \varphi(x)P_X(dx) = 2\pi^{-d}\int \widehat{\varphi}(\xi)\Phi_X(-\xi)d\xi$$

0.1.8 Théorème ***(Loi du tout ou rien de Kolmogorov)***

Soit $(\mathscr{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous tribus indépendantes, posons $G_n = \bigvee_{i\geq n} \mathscr{B}_i$, et $G_\infty = \bigcap_n$ (Tribu queue). Alors, G_∞ est triviale, ie si $\Lambda \in G_\infty$, alors $\mathbb{P}(\Lambda) = 0$ ou 1

0.1.9 Lemme ***(Borel Cantelli, partie directe)***

Soient $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements. Si $\sum \mathbb{P}(\lambda_i) < \infty$. Alors $\mathbb{P}(\limsup \lambda_n) = 0$

Réciproque : On suppose de plus que les λ_n sont indépendants. Alors, si $\sum \lambda_i = \infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup \lambda_n) = 1$

0.1.10 Théorème ***(Loi des grands nombres)***

On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, iid. On suppose $X_1 \in L^1$, et on note $m = E(X_1)$. Alors :

$$\text{(loi faible)} \quad \frac{X_1 + ... + X_n}{n} \to m \text{ dans } L^1$$

$$\text{(loi forte)} \quad \frac{X_1 + ... + X_n}{n} \to m \text{ presque surement}$$

0.1.11 Théorème ***(Du porte manteau)***

Si μ, $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^d$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\mu_n \Rightarrow \mu$
ii) $\forall G \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, $\liminf \mu_n(G) \geq \mu(G)$
iii) $\forall F \subset \mathbb{R}^d$ fermé, $\limsup \mu_n(F) \leq \mu(F)$
iv) $\forall B$ borélien, si $\partial B = \overline{B} - \overset{\circ}{B}$ est tel que $\mu(\partial B) = 0$, alors $\mu_n(B) \to \mu(B)$

0.1.12 Théorème ***(Central limite)***

Soit $X_1, X_2...$ une suite de variables aléatoires iid à valeurs dans $\mathbb{R}$, $X_1 \in {}^2(\mathbb{P})$. On pose $m = E(X_1)$, $\sigma^2 = var(X_1)$. Alors :

$$\frac{X_1 + ... + X_n - nm}{\sqrt{n}} \Rightarrow N(0, \sigma^2)$$

0.1.13 Théorème ***(Central limite d-dimensionnel)***

Soit $X_1, X_2...$ une suite de variables aléatoires iid à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $X_1 \in {}^2(\mathbb{P})$. On pose $\underline{m} = E(X_1)$, $D_{ij} = cov(X_1^{(i)}X_1^{(j)})$, où $X = (Y^{(1)}...Y^{(d)})$ (la matrice de covariance est toujours symétrique positive, il existe donc un vecteur gaussien $N(\underline{m}, D)$) . Alors :

$$\frac{X_1 + ... + X_n - n\underline{m}}{\sqrt{n}} \Rightarrow N(0, D)$$