Grands Théorèmes de Topologie

0.0.1 Théorème (Prolongement d'Urysohn)

Soit E un espace topologique métrisable,F un fermé de E, et $f : F \to \mathbb{R}$ continue lorsque E est muni de la topologie associée à sa distance. Il existe alors $g : E \to \mathbb{R}$, continue, telle que f et g coïncident sur F, et ayant les mêmes bornes sup et inf que f.

0.0.2 Théorème (Point fixe)

Soit (X, d) est complet, et $f : X \to X$ contractante, alors f a un unique point fixe, limite de toute suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$, avec x_0 quelconque

0.0.3 Théorème (Point fixe à paramètre)

Soit (X, d) est complet, et Λ est un espace topologique. Soit $f : X \times \Lambda \to X$. On suppose f contractante de rapport indépendant de $\lambda \in \Lambda$, et que $\forall x \in X$, $f(x, .)$ est continue. Alors, f admet pour tout $\lambda \in \Lambda$ un unique point fixe $x(\lambda)$. Par ailleurs, $x : \lambda \mapsto x(\lambda)$ est continue.

0.0.4 Théorème (Fermés emboités)

Si $(F_n)_n$ est une suite de fermés non vides d'un espace compact X avec, $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} \subset F_n$, alors $\cap F_n \neq \emptyset$

0.0.5 Théorème (Bolzano-Weierstrass)

Soit (X, d) un espace métrique, les propriétés suivantes sont équivalentes

i) X est compact

ii) Toute suite de X admet une suite extraite convergente

iii) X est précompact complet

0.0.6 Théorème (Tychonoff)

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Alors, si chaque X_i est compact, $\prod\limits_{i\in I} X_i$ est compact

0.0.7 Théorème (Riesz)

Soit E un espace vectoriel normé . les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) E est localement compact

ii) La boule unité fermée $\overline{B(0,1)}$ de E est compacte

iii) E est de dimension finie

0.0.8 Théorème (Banach Alaoglu)

Soit E un espace vectoriel normé , E' son dual topologique. Soit $\overline{B}_{E'}$ la boule unité fermée de E'. Alors $\overline{B}_{E'}$ est compacte pour la topologie faible-$*$

0.0.9 Théorème (Interversion de limites)

Soit Z un espace métrique complet, Y un espace topologique. Soit $A \subset Y$, $a \in \overline{A}$, et $f_n : A \to Z$, une suite de fonctions. On suppose que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{\substack{x \to A \\ x\in A}} f_n(x)$ existe, notée l_n

2. $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A

Alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x\in A}} f$ existe, et vaut $\lim\limits_{n\to\infty} l_n$, qui existe également, c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\substack{x \to a \\ x\in A}} f_n(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x\in A}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

0.0.10 *Théorème* ***(Dini)***

Soit X un espace topologique compact, et $f_n : X \to \mathbb{R}$ vérifiant :

i) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue

ii) $\forall x \in X,\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ existe

iii) $x \to f(x)$ est continue

iv) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X \quad f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$

Ou $iv)\quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X \quad f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$

Alors $f_n \to f$ uniformément

0.0.11 *Théorème* ***(Heine)***

Soient (X,d), et (Y,d') deux espaces métriques. Supposons X compact. Alors, toute application continue $f : X \to Y$ est uniformément continue.

0.0.12 *Théorème* ***(Prolongement des applications continues)***

Soient (X,d), et (Y,d') deux espaces métriques, avec Y complet. Soit $A \subset X$ dense, $f : A \to Y$ uniformément continue. Il existe une unique $g : X \to Y$, continue telle que $g_{/A} = f$. De plus, g est uniformément continue. (ie. $\omega_f = \omega_g$)

0.0.13 *Théorème* ***(Arzela Ascoli)***

Supposons que X est un espace topologique compact et que Y est un espace métrique. Soit $A \subset \mathscr{C}(X,Y)$, vérifiant A équicontinue, et $\forall x \in X$, $A(x)$ est relativement compact dans Y, alors A est relativement compact de $\mathscr{C}(X,Y)$

0.0.14 *Théorème* ***(Stone weierstrass)***

Soit X compact

i) Soit A une sous algèbre unitaire séparante de $\mathscr{C}(X,Y)$, alors A est dense dans $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$

ii) Soit A une sous algèbre unitaire séparante de $\mathscr{C}(X,\mathbb{C})$ telle que, $\forall f \in A$, on a $\overline{f} \in A$, alors A est dense.

0.0.15 *Théorème* ***(Baire)***

i) Soit X un espace topologique localement compact, alors X est un espace de Baire

ii) Soit X un ouvert d'un espace métrique complet, alors X est un espace de Baire

0.0.16 *Théorème* ***(Hahn-Banach)***

Soit E un $\mathbb{R}$-ev, et $p : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x,y \in E$ $p(\lambda x) \leq \lambda p(x) \quad \forall (x,\lambda) \in E \times \mathbb{R}_+^*$ Soit F un sous espace vectoriel de E. Soit $f : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire vérifiant

$$\forall x \in F \quad f(x) \leq p(x)$$

Il existe alors $\widetilde{f} : E \to \mathbb{R}$, linéaire, vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \widetilde{f}(x) \leq p(x),\ \text{ et } \widetilde{f}_{|F} = f$$

0.0.17 *Théorème* ***(Hahn-Banach, forme géométrique)***

Soit E un espace vectoriel topologique , A, B deux sous ensembles convexes$\neq \emptyset$ de E, tels que $A \cap B \neq \emptyset$

i) Si A est un ouvert $\exists H$ hyperplan fermé séparant A et B

ii) Si E est localement convexe, si A est un compact, et B fermé, il existe H hyperplan fermé séparant strictement A et B

0.0.18 *Théorème* ***(Banach-Steinhauss)***

Soit E un espace de Fréchet, F un espace vectoriel normé . Soit $u_i : E \to F$, $i \in I$ une famille d'applications linéaires. Supposons :

i) $\forall i \in I$, u_i est continue

ii) $\forall x \in E$, $\sup\limits_{i\in I} \|u_i(x)\|_F < +\infty$

Alors, $(u_i)_{i\in I}$ est équicontinue.

0.0.19 Théorème ***(Image ouverte)***

Soient E,F deux Fréchets, $u : E \to F$ continue linéaire surjective, alors u est ouverte.

Lemme 1 : $\exists \rho > 0$, $B(0, 2\rho) \subset \overline{u(B(0,1))}$

Lemme 2 : Supposons $B(0, 2\rho) \subset \overline{u(B(0,1))}$, alors $B(0, \rho) \subset u(\overline{B(0,1)})$

0.0.20 Corollaire ***(Théorème de Banach)***

Soient E,F deux espaces de Fréchet, $u : E \to F$, linéaire, continue, bijective. Alors, u^{-1} est continue

0.0.21 Corollaire ***(Théorème des graphes fermés)***

Soient E, F deux espaces de Fréchet, et $u : E \to F$ linéaire. Soit G le graphe de u, les propriétés suivantes sont équivalentes : :

i) u est continue

ii) G est un fermé de $E \times F$

0.0.22 Théorème ***(Projection sur un convexe fermé)***

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert, et C un convexe fermé non vide de $\mathscr{H}$.

i) $\forall x \in \mathscr{H}$, $\exists ! p(x) \in C$, $d(x, C) = d(x, p(x))$ $\|x - p(x)\| = \min\limits_{y\in C} \|x - y\|$

ii) $p(x)$ est caractérisé par $p(x) \in C$ et $\forall y \in C$, $Re(< x - p(x), y - p(x) >\leq 0$

iii) $x \to p(x)$ est 1-lipschitzienne

iv) Si $C = F$ est un sous espace vectoriel fermé de $\mathscr{H}$, $p(x)$ est caractérisé par $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^{\perp}$

0.0.23 Théorème ***(Riesz-Fréchet)***

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert, et soit

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathscr{H} & \to & \overline{\mathscr{H}}' \\ & & x & \mapsto & y \to < x, y > \end{array}$$

Alors, Φ est une isométrie de $\mathscr{H}$ sur $\overline{\mathscr{H}}'$

0.0.24 Théorème ***(Stompacchia)***

Soit a une forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire) continue cohercive, et C un convexe fermé non vide de $\mathscr{H}$. Soit $l \in \overline{\mathscr{H}}'$, il existe un unique $x \in \mathbb{C}$ tel que $\forall y \in \mathbb{C}$

$$Re(a(x, y - x)) \geq Re(l(x - y))$$

Lorsque a est symétrique (resp. hermitienne) x est caractérisé par $x \in \mathbb{C}$ et $\frac{1}{2}a(x,x) - Re(l(x)) = \min\limits_{y\in C}(\frac{1}{2}a(y,y) - Re(l(y)))$

0.0.25 Théorème ***(Shauder)***

Soient E,F deux Banach, $u : E \to F$ compacte, alors $u' = {}^t u \begin{array}{cccc} : & F' & \to & E' \\ & l & \mapsto & u'(l) = l \circ u \end{array}$ est aussi compacte.

0.0.26 Théorèmes Spectraux

Soit $\mathscr{H}$ un espace de hilbert, $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$

i) $\lambda \in Sp(u) \Rightarrow \overline{\lambda} \in Sp(u^*)$

ii) $F \subset \mathscr{H}$ est stable $\Leftrightarrow F^{\perp}$ stable par u^*

iii) u compacte $\Leftrightarrow u^*$ compacte

iv) $Im(u)^{\perp} = Ker(u^*)$

v) u autoadjoint $\Rightarrow Sp(u) \subset \mathbb{R}$, $Sp(u) \subset [m, M]$, où $M = \max\limits_{\|x\|=1} < u(x), x >$, et $m = \min\limits_{\|x\|=1} < u(x), x >$, qui appartiennent tous deux à $Sp(u)$

vi) $Sp_{res}(u)$ est vide

Soit $\mathscr{H}$ un hilbert, $u : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ endomorphisme autoadjoint compact. Il existe deux suites de réels positifs (strictement), $(\lambda_n)_{n\in\{0..N^+\}}$ et $(\mu_n)_{n\in\{0..N^-\}}$, avec N^+, N^- dans $\overline{\mathbb{N}}$, strictement décroissantees et convergent vers 0 lorsque N^+ et N^- sont infinis, telles que :

i) $Sp(u) - \{0\} = \{\lambda_n \quad n \in \{0..N^+\}\} \cup \{\mu_n \quad n \in \{0..N^-\}\}$

ii) $\|u\| = max(\lambda_0, -\mu_0)$

iii) Posons , $\forall\lambda \in Sp(u) - \{0\}$ $E_\lambda = Ker(u - \lambda Id)$, alors, $\forall\lambda \neq \lambda'$, on a $E_\lambda \perp E_{\lambda'}$

iv) $\mathscr{H} = Ker\, u \oplus \overline{\bigoplus_{n\in\{0..N^+\}}} E_{\lambda_n} \oplus \overline{\bigoplus_{n\in\{0..N^-\}}} E_{\mu_n}$

0.0.27 Théorème ***(Accroissements finis)***

Soit F un banach, $a < b$ deux réels, $f : [a, b] \to F$, continue, dérivable sur $]a, b[$. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ continue, dérivable sur $]a, b[$. Alors, si $\forall t \in]a, b[\, \|f'(t)\| \leq g'(t)$, on a :

$$\|f(a) - f(b)\| \leq g(b) - g(a)$$

0.0.28 Théorème ***(Interversion dérivée/limite)***

Soient E, F deux Banachs, $U \subset E$ ouvert non vide connexe, $f_n : U \to E$ une suite d'applications dérivables. On suppose :

i) $\exists x_0 \in U$ tel que $(f_n(x_0))_n$ converge.

ii) $\forall a \in U\, \exists r(a) > 0$ tel que $B(a, r(a)) \subset U$ et que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $B(a, r(a))$

Alors, $\forall a \in U$ $(f_n)_n$ converge uniformément sur $B(a, r(a))$, et si $g = \lim f'_n$, $f = \lim f_n$, f est dérivable sur U et $f' = g$

0.0.29 Théorème ***(Inversion locale)***

Soient E, F deux banachs. Soit U un ouvert de E, $f : U \to F$ de classe C^k, $k \leq 1$. Soit $a \in U$, supposons $df(a)$ bijective. il existe V, voisinage ouvert de a dans U, W voisinage ouvert de $f(a)$ dans F tels que $f_{|V} : V \to W$ soit un difféomorphisme C^k

0.0.30 Théorème ***(Fonctions implicites)***

Soient E, F, G trois banachs, U un ouvert de $E \times F$, $f : U \to G$ de classe C^k $(k \geq 1)$. Soit $(a, b) \in U$ tel que $f(a, b) = 0$. On suppose $\partial f(a, b) \in \mathscr{L}(F, G)$ est bijective. Alors, il existe U' voisinage ouvert de (a, b) dans U, il existe V voisinage ouvert de a dans E, il existe $g : V \to F$ de classe C^k telle que l'on aie l'équivalence :

$$(x, y) \in U', f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \in V, \text{ et } y = g(x)$$

0.0.31 Théorème ***(Forme locale des immersions)***

Soit U un voisinage ouvert de O dans $\mathbb{R}^p$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k, $k \geq 1$. Supposons que $f(0) = 0$ et que f est une immersion en 0, il existe alors ψ C^k-difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$ en 0 tel que, au voisinage de 0 :

$$\psi \circ f(x_1 ... x_n) = (x_1 ... x_p, 0 ... 0)$$

0.0.32 Théorème ***(Forme normale des submersions)***

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0, $f : U \to \mathbb{R}^q$ de classe C^k, $k \geq 1$. Supposons que $f(0) = 0$ et que f est une submersion en 0, il existe alors φ C^k-difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$ en 0 tel que, au voisinage de 0 :

$$f \circ \varphi f(x_1 ... x_n) = (x_1 ... x_q, 0 ... 0)$$

0.0.33 Théorème ***(Cauchy-Lipschitz)***

Soit f continue sur U semi-lipschitzienne sur U. $\forall(t_0, x_0) \in U$, il existe une unique solution maximale vérifiant $u(t_0) = x_0$