Fiche résumée du cours de processus aléatoires

1 Espérance conditionnelle

1.1 Definition et premières propriétés

Définition 1.1.1 (Espérance conditionnelle) *On considère un espace mesuré $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, une sous tribu $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$, et une variable aléatoire $X \in L^1(\mathscr{F})$. On dit qu'une variable aléatoire Y est l'**espérance conditionnelle** de X sachant $\mathscr{G}$, notée $Y = \mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})$, si :*

i) $Y \in L^1(\mathscr{G})$

ii) $\forall G \in \mathscr{G}$, *on a* $\mathbb{E}(\mathbb{1}_G X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_G Y)$

Y est alors unique presque sûrement. Si $\mathscr{F} = \sigma(Y)$, on note alors $\mathbb{E}(X \mid Y)$

Cas particuliers :

i) **Cas discret**, $Y : \Omega \to F$ discret, posons $F' = \{f \in F \mid \mathbb{P}(Y = f) > 0\}$. $\forall f \in F'$, $\mathbb{E}(\varphi(X) \mid Y = f) = \frac{\mathbb{E}(\varphi(X)\mathbb{1}_{\{Y=f\}})}{\mathbb{P}(Y=f)}$, et on a alors :

$$\mathbb{E}(\varphi(X) \mid Y) = \sum_{f \in F'} \mathbb{E}(\varphi(X) \mid Y = f)\mathbb{1}_{\{Y=f\}}$$

ii) **Cas à densité :** Si (X, Y) admet une densité $p(x, y)$ par rapport à λ posons $q(Y) = \int_{\mathbb{R}^n} p(x, Y)dx$ si cette intégrale est finie, et 0 sinon. On a alors, en posant $\phi(Y) = \int \frac{f(x)p(x,Y)}{q(Y)}dx$ si $q(Y) > 0$, 0 sinon, on a :

$$Q(Y) = \mathbb{E}(f(X) \mid Y), \text{ qui est bien } \sigma(Y)\text{-mesurable.}$$

Proposition 1.1.1 *Si $Y = \mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})$ p.s., alors :*

i) $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)$

ii) Si $X \geq 0$ p.s., alors $Y \geq 0$ p.s.

iii) $\mathbb{E}(|Y|) \leq \mathbb{E}(|X|)$

Proposition 1.1.2 *Si $Y = \mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})$, et si $Y' = \mathbb{E}(X' \mid \mathscr{G})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors*

$$\alpha Y + \beta Y' = \mathbb{E}(\alpha X + \beta X' \mid \mathscr{G})$$

.

Proposition 1.1.3 *Si $X_n \overset{L^1(\mathscr{F})}{\to} X$ et si $\forall n \geq 0$, $Y_n = \mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{G})$, alors $Y = \lim_{n\to\infty}$ existe dans L^1 et $Y = \mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})$.*

1.2 Théorèmes de convergence conditionnelle

Proposition 1.2.1 *Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$un espace de probabilités, $\mathscr{G}$ une sous tribu de $\mathscr{F}$*

i) (Convergence monotone) Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires dans $L^1(\mathscr{F})$ telle que , p.s. X_n est croissante, et $\forall n \quad X_n \geq 0$, et si $X = \lim_{n\to\infty} X_n \in L^1$, alors $\mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{G}) \overset{L^1,p.s.}{\to} \mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})$.

ii) (Fatou) Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $L^1(\mathscr{F})$ de variables aléatoires positives p.s. , et si $\mathbb{E}(\liminf X_n \mid \mathscr{G}) \in L^1(\mathscr{F})$, alors $\mathbb{E}(\liminf X_n \mid \mathscr{G}) \leq \liminf \mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})$ p.s.

iii) (Convergence dominée) Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires telle que $X_n \overset{p.s.}{\to} X$ et si $\exists \widetilde{X} \in L^1(\mathscr{F})$ tel que, $\forall n\, |X_n| \leq \widetilde{X}$ p.s., alors $\mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{G}) \overset{L^1,p.s.}{\to} \mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})$

Remarque : Si $\mathscr{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, on retrouve les théorèmes usuels.

Proposition 1.2.2 (Inégalité de Jensen conditionelle) *Soit $X \in L^1(\mathscr{F})$, $\mathscr{G}$ une sous tribu de $\mathscr{F}$. Soit $\varphi : J \to \mathbb{R}_+$ une fonction convexe définie sur un intervalle, telle que, p.s., $X \in J$, alors*

$$\mathbb{E}(\varphi(X) \mid \mathscr{G}) \geq \varphi(\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})).$$

1.3 Espérance conditionelle et (in)-dépendance

Proposition 1.3.1 *Si Π est une famille de parties de Ω telle que $\forall A, B \in \Pi$, $A \cap B \in \Pi$, et $\Omega \in \Pi$,, alors la classe monotone engendrée par Π est égale à $\sigma(\Pi)$.*

Proposition 1.3.2 *Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$un espace de probabilités. Soit $\mathscr{G}$ une sous tribu engendrée par Π telle que $\forall A, B \in \Pi$, $A \cap B \in \Pi$, et $\Omega \in \Pi$. Si Y est une variable aléatoire telle que :*

i) $Y \in L^1(\mathscr{G})$

ii) $\forall G \in \Pi$, on a $\mathbb{E}(\mathbb{1}_G X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_G Y)$

Alors $Y = \mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})$ p.s.

Remarque : Si $\mathscr{G}$ est la tribu trivale, alors $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})$ est constante et égale à $\mathbb{E}(X)$ p.s. Si $\mathscr{G} = \mathscr{F}$, par contre, on a $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})(X) = X$ p.s. Enfin, si X est $\mathscr{H}$-mesurable, avec $\mathscr{H} \perp \mathscr{G}$, alors $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G}) = \mathbb{E}(X)$ p.s.

Si on a $X \perp \mathscr{F}$, Y $\mathscr{F}$-mesurable, on a :

$$\mathbb{E}(f(X,Y) \mid \mathscr{F}) = \int f(x,Y) P_X(dx).$$

Remarque : On note $\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(X\sigma(Y))$

2 Processus, filtration, temps d'arrêt

On considère $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$un espace de probabilités et I un ensemble totalement ordonné, considéré comme l'ensemble des temps.

Définition 2.0.1 (Filtration) *Une filtration sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$est une famille croissante de sous tribus $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$ de $\mathscr{F}$*

Définition 2.0.2 (Processus aléatoire) *Un processus aléatoire est une famille indicée par $t \in I$ de variables aléatoires $\mathscr{F}$-mesurables $(X_t)_{t\in I}$. On dit que $(X_t)_{t\in I}$ est adaptée à la filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$ si, $\forall t \in I$, X_t est $\mathscr{F}_t$ mesurable. (X_t est observable à l'instant t)*

Définition 2.0.3 (Temps d'arrêt) *Soit $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$ une filtration, on dit que T est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$ si c'est une variable alèatoire à valeurs dans I telle que $\forall t \in I$, $\{T \le t\} \in \mathscr{F}_t$. (Si à l'instant t, le temps d'arrêt s'est produit, on le sait !)*

Définition 2.0.4 (Tribu du passé de T) *On peut alors définir la tribu du passé avant T par :*

$$A \in \mathscr{F}_T \Leftrightarrow \forall t \in I,\ A \cap \{T \le t\} \in \mathscr{F}_t$$

3 Martingales

3.1 premières définitions

Définition 3.1.1 (Martingales) *On dit que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **martingale** par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si :*

i) $\forall n \ge 0$, $M_n \in L^1(\mathscr{F}_n)$ ($(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adapté à $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$)

ii) $\forall n \ge 0$, $M_n = \mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)$ p.s.

Si l'on pose $\varepsilon_{n+1} = M_{n+1} - M_n$, $M_n = M_0 + \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_n$, alors

$$\mathbb{E}(\varepsilon_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(M_{n+1} - M_n \mid \mathscr{F}_n) = 0 \quad p.s.$$

Théorème 3.1.1 *On suppose que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale positive, i.e. $\forall n \ge 0$, p.s. $M_n \ge 0$ alors M_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire $M_\infty \in L^1(\mathscr{F})$*

3.2 Généralisation du théorème de convergence p.s.

Définition 3.2.1 (Sous-martingale, sur-martingale) *On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **sous-martingale** par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si :*

i) $\forall n \geq 0,\ X_n \in L^1$

ii) $\forall n \geq 0,\ X_n \leq \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)$ *p.s.*

*On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **sur-martingale** par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si :*

i) $\forall n \geq 0,\ X_n \in L^1$

ii) $\forall n \geq 0,\ X_n \geq \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)$ *p.s.*

Théorème 3.2.1 *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale telle que $sup(\mathbb{E}(|X_n|)) < \infty$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.s. vers une variable aléatoire $X_\infty \in L^1(\mathscr{F})$*

3.3 Convergence dans L^1 des martingales

Définition 3.3.1 (Uniforme intégrabilité) *Une famille $(X_t)_{t\in I}$ de variables aléatoires est dite uniformément intégrable si*

$$\sup_{i\in I} \mathbb{E}(|X_i|\, \mathbb{1}_{|X_i|>M}) \to 0$$

i.e. $\forall \varepsilon, \exists M, \forall i \in I, E(|X_i|\, \mathbb{1}_{|X_i|>M}) < \varepsilon$

Théorème 3.3.1 *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires de L^1 et si $X \in L^1$, on a alors :*

$$\begin{cases} X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \\ (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ uniformément intégrable} \end{cases} \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{L^1} X$$

Théorème 3.3.2 *Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à une filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément intégrable*

ii) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge p.s. et dans* L^1

iii) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* L^1

Lemme 3.3.1 *Si $(X_t)_{t\in I}$ est une famille de variables aléatoires bornées dans L^p pour un certain $p > 1$ donné (i.e. $\sup_i \mathbb{E}(|X_i|^p) = c_p < \infty$). Alors, la famille est uniformément intégrable.*

Corollaire 3.3.1 *Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale bornée de L^p pour un $p > 1$ fixé, alors M_n converge p.s. et dans L^1.*

Théorème 3.3.3 *Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale qui converge dans $L^1(\mathscr{F})$ vers M_∞, alors, $\forall n_0$ fixé, $\forall n \geq n_0$ on a :*

$$M_{n_0} = \mathbb{E}(M_\infty \mid \mathscr{F}_{n_0}) \text{ p.s.}$$

Lemme 3.3.2 *Si $X \in L^1(\mathscr{F})$, et si $(\mathscr{G}_t)_{t\in I}$ est une famille de sous tribus de $\mathscr{F}$, alors, $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G}_i)$ est uniformément intégrable.*

Proposition 3.3.1 *Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, on a*

$$\begin{aligned} (M_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est uniformément intégrable} \Leftrightarrow & \quad (M_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } L^1 \\ \Leftrightarrow & \quad \exists X \in L^1,\ \forall n,\ M_n = \mathbb{E}(X \mid F_n) \end{aligned}$$

3.4 Théorèmes d'arrêt

On considère (M_n) une $\mathscr{F}_n-$martingale, et T un $\mathscr{F}_n-$temps d'arrêt.

Définition 3.4.1 (Martingale arrêtée) *Dans ces conditions, on définit la* ***martingale arrêtée*** *comme le processus $M^T = (M_n^T) = (M_{n\wedge T})$*

Proposition 3.4.1 *Le processus M^T ainsi défini est une $\mathscr{F}_n-$martingale.*

Proposition 3.4.2 (Théorème d'arrêt n^o 1) *Si (M_n^T) est uniformément intégrable, alors (M_n^T) converge dans L^1 vers M_T, et donc*

$$\mathbb{E}(M_T) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(M_n^T) = \mathbb{E}(M_0)\ .$$

Proposition 3.4.3 (Théorème d'arrêt n^o 2) *Si (M_n) est une $\mathscr{F}_n-$martingale uniformément intégrable, et si T est un $\mathscr{F}_n-$temps d'arrêt fini p.s., alors, p.s., on a*

$$M_T = \mathbb{E}(M_\infty \mid \mathscr{F}_n)\ .$$

3.5 Convergence dans L^p des martingales

Lemme 3.5.1 *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous martingale positive, et si on pose, pour tout n, $\lambda_n = max(X_0...X_n)$, alors, $\forall\lambda > 0$, on a*

$$\lambda\mathbb{P}(\lambda_n \geq \lambda)\ \leq\ \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\lambda_n\geq\lambda})$$

Corollaire 3.5.1 (Inégalité maximale de Doob) *Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, et si $M_n^* = max(|M_0|, ..., |M_n|)$, alors $\forall\lambda \geq 0$, on a*

$$\lambda\mathbb{P}(M_n^* \geq \lambda) \leq \mathbb{E}(|M_n|\, \mathbb{1}_{M_n^*\geq\lambda}) \leq \mathbb{E}(|M_n|)$$

Proposition 3.5.1 *Si (M_n) est une martingale dans L^p, $p > 1$, alors $\forall n \geq 0$,*

$$\mathbb{E}((M_n^*)^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}((M_n)^p)\ .$$

Corollaire 3.5.2 *Si (M_n) est une martingale bornée dans L^p, avec $p \geq 1$ donné, alors (M_n) converge p.s. et dans L^p vers $M_\infty \in L^p(\mathscr{F}_\infty)$.*

3.6 Martingales inverses

Proposition 3.6.1 *Si $X \in L^1(\mathscr{F})$ et si $(\mathscr{G}_m)$ est une suite décroissante de sous tribus, alors*

$$\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G}_m) \underset{m\to\infty}{\overset{p.s, L^1}{\to}} \mathbb{E}(X \mid \mathscr{G}_\infty)$$

4 Introduction aux grandes déviations

On considère $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires de L^1 centrées. On pose $S_n = X_1 + ... + X_n$, et on considère $s > 0$.

Corollaire 4.0.1 *Posons $\alpha(s) = \sup \mathbb{P}(S_n \geq ns)^{1/n}$. On a alors*

$$\mathbb{P}(S_n \geq ns)^{1/n} \to \alpha(s)\ .$$

Théorème 4.0.1 (Cramer) *Si $t \to e^{-ts}\mathbb{E}(e^{tX})$ atteint son minimum $\beta(s)$, et est finie au voisinage de ce minimum, alors $\alpha(s) = \beta(s)$.*

5 Mouvement Brownien

Définition 5.0.1 (Loi du mouvement Brownien) *On dit qu'un processus $(B_t)_{t\geq 0}$ suit la loi du mouvement brownien si pour tout entier k, pour tous réels $t_1 < t_2 < ... < t_k$, on a $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_k} - B_{t_{k-1}})$ suit la loi de k gaussiennes centrées indépendantes de variances $t_1, t_2 - t_1, ..., t_k - t_{k-1}$.*

Théorème 5.0.2 (Construction du mouvement Brownien) *Il existe un espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$et un processus $(B_t)_{t\geq 0}$ sur celui-ci, tel que :*

i) La loi de $(B_t)_{t\geq 0}$ est la loi du mouvement brownien.

ii) Il existe $A \in \mathscr{F}$ de probabilité 1 tel que, $\forall \omega \in A$, $t \to \mathscr{B}_t(\omega)$ soit continu.

Proposition 5.0.2 *Si (B_t) est un mouvement brownien, pour $A > 0$ on pose*

$$X_t = \frac{1}{A} B_{A^2 t} \text{ et } Y_t = tB_{\frac{1}{t}},\ Y_0 = 0\ .$$

Alors, (Y_t), (X_t) sont des mouvements browniens.

Définition 5.0.2 (Mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^d$) *Un processus (B_t) dans $\mathbb{R}^d$ est un mouvement brownien si ses composantes sont des mouvements browniens indépendants.*

Proposition 5.0.3 *Un processus $B_t = (B_t^1, ..., B_t^d)$ est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ issu de 0 si pour tout k, pour tous réels $t_1 < t_2 < ... < t_k$,*

$$(B_{t_1}^1, ..., B_{t_1}^d, B_{t_2}^1 - B_{t_2}^1, ..., B_{t_2}^d - B_{t_1}^d, ..., B_{t_k}^1 - B_{t_{k-1}}^1, ..., B_{t_k}^d - B_{t_{k-1}}^d)$$

est un vecteur gaussien centré, avec $\mathbb{E}(B_t^i B_s^j) = t \wedge s\delta_{ij}$.

Théorème 5.0.3 (Loi du $0-1$ du mouvement brownien.) *Soir $d \geq 1$, et (B_t) un mouvement brownien de $\mathbb{R}^d$ issu de 0. On pose, pour tout t, $\mathscr{F}_t = \sigma(B_s,\ s \leq t)$, et $\mathscr{F}_{0+} = \bigcap_{t>0} \mathscr{F}_t$. Alors, $\mathscr{F}_{0+}$ est triviale, c'est à dire que tous les évènements qu'elle contient sont de probabilité O ou 1.*

Proposition 5.0.4 (Markov faible pour le mouvement brownien) *Pour tout réel positif t_0, on définit le processus $B^{(t_0)}$ par $B_t^{(t_0)} = B(t_0 + t) - B_{t_0}$. Alors, $B^{(t_0)}$ est un mouvement brownien de $\mathscr{F}^{t_0}$.*

Corollaire 5.0.2 *Si $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien sur, $\mathbb{R}$, alors :*

i)

$$p.s. \quad \limsup_{t\to 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty \quad et \quad \liminf_{t\to 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty$$

ii)

$$p.s. \quad \limsup_{t\to +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty \quad et \quad \liminf_{t\to +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty$$

Proposition 5.0.5 (Markov forte pour le mouvement brownien) *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$, soit $\forall t \geq 0$ on pose $\mathscr{F}_t = \sigma(B_s,\ s \leq t)$. Si T est un temps d'arrêt par rapport à $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, on pose, $\forall t \geq 0$, $B_t^{(T)} = B_{T+t} - B_T$. Alors, $(B_t^{(T)})_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de F_T.*

Lemme 5.0.1 *Si $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une isométrie vectorielle donnée, et si $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$, alors $(\varphi(B_t))_{t\geq 0}$ est aussi un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$.*

Corollaire 5.0.3 *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ et $T = \inf\{t > 0, \|B_t\| = 1\} = \inf\{t > 0, B_t \in S^{d-1}\}$ .Alors, la loi de B_T est la loi uniforme sur S^{d-1}, unique loi invariante par toutes les isométries vectorielles.*

Définition 5.0.3 (Fonction harmonique) *Soit ω un ouvert de R^d, on dira que $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ est harmonique si :*

1. *φ est continue*

2. $\forall z \in \Omega$, $\forall r > 0$ *tel que* $\overline{B}(z,r) \subset \Omega$, *alors* $\varphi(z)$ *est la moyenne de* φ *sur* $S(z,r)$.

Proposition 5.0.6 *Si on pose* $T_1^r = \inf\{t > 0, \|B_t\| = r\} = \inf\{t > 0, B_t \in S^{d-1}(0,r)\}$, *soit* $U_1^r = B_{T_1^r}$, $T_{n+1}^r = \inf\{t > T_n^r,\ \|B_t - B_{T_n^r}\| = r\}$, *et enfin,* $U_{n+1} = B_{T_{n+1}^r} - B_{T_n^r}$. *Alors, les* (U_n^r) *sont iid. et suivent* $U(S(0,r))$.

Proposition 5.0.7 *Soit* Ω *un ouvert borné,* φ *une fonction continue sur* $\overline{\Omega}$ *et harmonique dans* Ω. *Alors,* $\forall z \in \Omega$, *on définit* B_t, $t \geq 0$ *un mouvement brownien dans* $\mathbb{R}^d$ *qui part de* $B_0 = z$, *et on note*

$$\tau = \inf\{t > 0,\ B_t \notin \Omega\} .$$

Alors, on a

$$\varphi(z) = \mathbb{E}_z(\varphi(B_\tau)) .$$

Proposition 5.0.8 *Si* φ *est harmonique, alors* φ *est* C^∞ *sur* Ω, *et* $\Delta\varphi = 0$ *dans* Ω.

Proposition 5.0.9 *Si* φ *est une fonction* C^2 *dans un ouvert* D *tel que* $\forall z \in D$, $\Delta\varphi = 0$, *alors* φ *est harmonique.*

Proposition 5.0.10 *Si* φ *est une fonction* C^2 *sur* Ω *ouvert, continue sur* $\overline{\Omega}$, *avec* Ω *borné, telle que* $\Delta\varphi = 0$ *sur* ω. *Alors,* $\forall z \in \Omega$, *on a*

$$\varphi(z) = \mathbb{E}_z(\varphi(B_\tau)) .$$

6 Chaînes de Markov

6.1 Definitions

Définition 6.1.1 (Fonction de transition, chaîne de Markov) *Soit* S *un ensemble d'états discret au plus dénombable. On dit que* $Q : S \times S \to [0,1]$ *est une* ***fonction de transition*** *sur* S *si,* $\forall x \in S$, *on a*

$$\sum_{y \in S} Q(x,y) = 1 .$$

$Q(x,y)$ *est la probabilité d'aller en* y *si on est en* x. *Si* Π_0 *est une loi sur* S, *et* Q *une fonction de transition sur* S, *on dit que le processus* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une chaîne de Markov de fonction de transition* Q *de loi initiale* Π_0 *si,* $\forall n \geq 0$, $\forall x_0, ..., x_n \in S$, *on a*

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \Pi_0(x_0) \prod_{i=1}^n Q(x_{i-1}, x_i) .$$

Lemme 6.1.1 *Si* Q *est une fonction de transition sur* S, *si* Π_0 *est une loi de probabilités sur* S, *on peut fabriquer un espace de probas* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, *et un processus* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sur celui-ci qui est une chaîne de Markov de fonction de transition* Q *et de loi initiale* Π_0.

Définition 6.1.2 *Si on se donne* $y \in S$ *et* Q *une fonction de transition, on note* $\mathscr{L}^y = \mathscr{L}_Q^y$ *la loi d'une chaîne de Markov de fonction de transition* Q *issue de* Π_0 *la masse de dirac en* y

Proposition 6.1.1 (De Markov, des chaînes de Markov) *la loi conditionelle de* $(X_n, X_{n+1}, ...)$ *sachant* $\mathscr{F}_n$ *est* $\mathscr{L}^{X_n}$. *Plus précisément,* $\forall F : S^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ *mesurable bornée,* $\forall A \in \sigma(X_0, ..., X_n) = \mathscr{F}_n$, *on a*

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A F(X_n, X_{n+1}, ...)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathscr{L}^{X_n}(F)) .$$

Proposition 6.1.2 (De Markov forte, des chaînes de Markov) *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une chaîne de Markov, et posons* $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$. *Soit* T *un temps d'arrêt par rapport à la filtration* $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *soit*

$$\mathscr{F}_T\{A \in \mathscr{F}_\infty,\ \forall n,\ A \cap \{T = n\} \in \mathscr{F}_n\} .$$

Alors, sur le domaine $\{T < \infty\}$, *la loi conditionelle de* $(X_T, X_T + 1, ...)$ *sachant* $\mathscr{F}_T$ *est* ^{X_T}. *Plus précisément,* $\forall F : S^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ *mesurable bornée ,* $\forall A \in \mathscr{F}_T$,

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{T<\infty} F(X_T, ...) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{T<\infty} \mathscr{L}^{X_T} .$$

6.2 Etats récurrents, états transitoires

Définition 6.2.1 (Etat récurrent, transitoire) *On dit qu'un état $x \in S$ est* ***récurrent*** *pour Q si une chaîne de Markov issue de x de fonction de transition Q revient p.s en x un nombre infini de fois. On dit que $x \in S$ est transitoire pour Q si une chaîne de Markov issue de x et de fonction de transition Q ne revient p.s. qu'un nombre fini de fois en x.*

Proposition 6.2.1 *Un point est forcément ou recurrent, ou transitoire.*

On définit désormais

$$\tau_1 = \inf\{n > 0,\ X_n = x\} \text{ , et } \tau_{j+1} = \inf\{n > \tau_j,\ X_n = x\} \text{ .}$$

Définition 6.2.2 (Excursion) *On dit qu'une suite finie à valeurs dans S $(e(0), ..., e(\tau)) \in \cup S^k$ est une* ***excursion*** *en dehors de x si $e(0) = x$, $e(\tau) = x$, et $\forall \{n \in 1, ..., \tau - 1\}$, $e(n) \neq x$.*

Lorsque $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\tau_j < \infty$, $\forall j$, on définit les extensions de X en dehors de x par

$$e_1 = (e_1(0) = X_0, ..., e_1(\tau_1) = X_{\tau_1})$$

$$e_2 = (e_2(0) = X_0 = x, ..., e_2(\tau_2 - \tau_1) = X_{\tau_2} = x)$$

$$\vdots$$

$$e_j = (e_j(0) = x = X_{\tau_{j-1}}, e_j(1) = X_{\tau_{j-1}+1}, ..., e_j(\tau_j - \tau_{j-1} = x = X_{\tau_j}$$

Lemme 6.2.1 *Si x est recurrent et $X_0 = 0$ p.s, la suite $(e_1, e_2, e_3, ...)$ est une suite i.i.d. d'excursions qui ont toutes la même loi que $(X_0, X_1, ..., X_{\tau_1})$.*

Définition 6.2.3 *Si x est recurrent, alors, si $\mathbb{E}(\tau_1) < \infty$, on dit que x est* ***recurrent positif*** *pour Q. Lorsque $\mathbb{E}(\tau_1) = \infty$, on dit que x est* ***recurrent nul*** *pour Q.*

Proposition 6.2.2 *Si x est récurrent, tous les points accessibles depuis x le sont aussi.*

Définition 6.2.4 *Si Q est une fonction de transition, on définit la relation d'équivalence sur S :*

$$x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} x \text{ est accessible depuis } y \\ y \text{ est accessible depuis } x \end{cases}$$

Définition 6.2.5 *S est ainsi divisé en classes d'équivalence, appellées* ***ensembles irréductibles*** *pour Q*

Définition 6.2.6 *On dit que Q est* ***irréductible*** *s'il n'y a qu'un ensemble irréductible, i.e. $\forall x \in S$, $\forall y \in S$, y est accessible depuis x. Alors, ou bien tous les points sont transitoires (resp. recurrents), on dit alors que Q est transitoire (resp. recurrents).*

Lemme 6.2.2 *Si x est récurrent positif et si y est accessible depuis x, alors y est récurrent positif.*

Proposition 6.2.3 *Si Q est une fonction de transition irréductible et si S est fini, alors Q est récurrent positif.*

On considère pour la suite une fonction de transition Q irréductible.

6.3 Lois stationnaires

Définition 6.3.1 (Loi stationnaire) *On dit que la loi de proba μ sur S est* ***stationnaire****, ou* ***invariante****, si, $\forall y \in S$,*

$$\mu(y) = \sum_{x\in S} \mu(x)Q(x, y) \text{ .}$$

Proposition 6.3.1 *Si μ est une loi stationnaire pour Q, alors, $\forall y \in S$, $\mu(y) = \nu(y)$, et la chaîne est récurrente positive.*

Proposition 6.3.2 *Si Q est irréductible récurrente positive, alors il existe une loi stationnaire $\mu = \nu$.*

6.4 Chaînes réversibles à l'équilibre

Définition 6.4.1 (Loi réversible) *On dit que ρ est une loi de probbilités réversible sur Q si elle vérifie*

$$\forall x \in S, \forall y \in S, \rho(x)Q(x,y) = \rho(y)Q(y,x) .$$

Proposition 6.4.1 *Si ρ est une loi réversible, alors ρ est la loi stationnaire.*

Proposition 6.4.2 *Si la graphe de Q a une forme d'arbre, alors, si la loi stationnaire existe, elle est forcément réversible.*

Définition 6.4.2 (Chaîne réversible à l'équilibre) *Lorsque la loi stationnaire de Q est réversible, on dit que la chaîne de markov est **réversible à l'équilibre**.*

6.5 Convergence à l'équilibre, apériodicité

Lemme 6.5.1 *On note $p_x = PGCD\{n \geq 1, Q^n(x,x) > 0\}$. ALors, si Q est irréductible, alors $\forall x, y \in S$, on a $p_x = p_y$. p_x est appellé la **période** de Q.*

Théorème 6.5.1 *Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de markov irréductible récurrente positive apériodique, alors $X_n \overset{loi}{\rightsquigarrow} \mu$, la loi stationnaire. Autrement dit,*

$$\forall x \in S,\ \mathbb{P}(X_n = x) \to \mu(x) .$$