Fiche résumée du cours de Processus de Markov, par I.Kourkova

1 Chaînes de Markov à temps continu sur un espace dénombrable

1.1 loi exponentielle

Définition 1.1.1 (Loi exponentielle) *Une variable aléatoire T suit une loi exponentielle de paramètre λ si pour tout $t > 0$*

$$\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t} .$$

La densité de la loi exponentielle est $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} 1_{t>0}$ et $\mathbb{E}(T) = \lambda^{-1}$.

Théorème 1.1.1 *Si la vraiable aléatoire T est de loi exponentielle et de paramètre α, la variable αT suit une loi exponentielle de paramètre 1.*

Théorème 1.1.2 (Absence de mémoire) *Une variable aléatoire $T : \Omega \to]0; \infty]$ suit une loi exponentielle si et seulement si*

$$\mathbb{P}(T > s + t \mid T > t) = \mathbb{P}(T > s \ \forall s, t > 0.$$

Théorème 1.1.3 *Soit I dénombrable et T_k, $k \in I$, des varaiables aléatoires exponentielles de paramètres q_k où $0 < \sum_{k\in I} q_k = q < \infty$. Soit $T = \inf_k T_k$. Soit $B(\omega) = \{k_0(\omega) : T_{k_0}(\omega) = \inf_{k\in I} T_k(\omega)\}$. Alors, $\mathbb{P}(\omega : B(\omega)$ contient un seul élément $) = 1$. On pose $K(\omega) = k_0(\omega) \in B(\omega)$ l'élément de $k \in I$ sur lequel l'$\inf$ est atteint. Les variables T et K sont indépendantes, T suit la loi exponentielle de paramètre q,*

$$\mathbb{P}(K = q) = q_k/q .$$

1.2 Matrice d'intensité

Une chaîne de Markov à temps continu se caractérise par sa mesure initiale et par une matrice $I \times I$, dite d'intensité, notée Q. Elle vérifie toujours les propriétés suivantes :

Q1 $0 \leq -q_{i,i} < \infty$, $\forall i \in I$.

Q2 $q_{i,j} \geq 0$ pour tout $i \neq j$, $i, j \in I$.

Q3 $\sum_{j\in I} q_{i,j} = 0$, pour tout $i \in I$.

Définition 1.2.1 (exponentielle) *Soit I fini. Pour toute matrice Q sur $I \times I$, la série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^k}{k!}$$

converge par composante vers une matrice ,notée e^Q.

Théorème 1.2.1 *Soit I fini.*

i) Le rayon de convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tQ)^k}{k!}$ est infini pour chaque composante.

ii) pour tout $n > 0$, $e^{nQ} = (e^Q)^n$, i.e. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nQ)^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^k}{k!}\right)^n$.

iii) Si Q et Q' commutent, on a également $e^{Q+Q'} = e^Q e^{Q'}$

Théorème 1.2.2 *Soit I fini. Pour toute matrice Q sur $I \times I$, en posant $P(t) = e^{tQ}$, on a $P(s + t) = P(s)P(t)$. Par ailleurs, une matrice Q vérifie Q1, Q2 et Q3 si et seulement si P est une matrice stochastique.*

Théorème 1.2.3 *Soit I fini.*

i) $P(t)$ est l'unique solution de l'équation $P'(t) = P(t)Q$, avec la condition initiale $P(0) = Id$.

ii) $P(t)$ est l'unique solution de l'équation $P'(t) = qP(t)$, avec la condition initiale $P(0) = Id$.

iii) $\left(\frac{d}{dt}\right)^{(k)} |_{t=0}\, P(t) = Q^k$

1.3 Processus à temps continu sur $\mathbb{R}$

Définition 1.3.1 *Soit $\sigma(X_s, s \leq t) = \mathscr{F}_t$: la tribu engendrée par les évènements de type*

$$\{\omega, X_{s_0}(\omega) = i_0, ..., X_{s_d}(\omega) = i_d\}$$

Définition 1.3.2 (instants de sauts, processus de sauts) *On va introduire les **instants de sauts** $J_0, J_1, ...$*

$$J_0 = 0, J_{n+1}(\omega) = \inf\{t \geq J_n(\omega) : X_t(\omega) : X_t(\omega) \neq X_{J_n(\omega)}\} \ ,$$

*ainsi que les temps S_n écoulés entre les sauts, $S_n(\omega) = J_n(\omega) - J_{n-1}(\omega)$ si $J_n(\omega) < \infty$, ∞ sinon. Le processus de saut $Y_n = X_{J_n}$ est appellé processus de sauts associé à X. On note $\zeta(\omega) = \sup J_n = \sum S_n$ le **premier temps d'explosion** de la trajectoire $X_t(\omega)$.*

Définition 1.3.3 (Temps d'arrêt) *Une variable aléatoire T est appellée temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_t)_t$ si, pour t, $\{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ On définit alors la tribu engendrée par T, notée $\mathscr{F}_T$, par*

$$A \in \mathscr{F}_T \Leftrightarrow A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t \ \forall t$$

Théorème 1.3.1 *i) Soit T un $(\mathscr{F}_t)$-temps d'arrêt, alors la variable aléatoire X_T est $\mathscr{F}_T$-mesurable*

ii) les J_i et les S_i sont des variables aléatoires $\mathscr{F}_\infty$-mesurables.

iii) Y_n est $\mathscr{F}_\infty$-mesurable et $\mathscr{F}_{J_n}$-mesurable.

iv) $\mathscr{F}_\infty = \sigma(S_n, Y_n)$

Théorème 1.3.2 *Soient P et P' deux mesures de probabilitéssur $\mathscr{F}_\infty$ qui coincident sur les évènements cylindriques, soit par rapport aux $(X_t)_t$, soit aux $(S_i, Y_i)_i$. Alors, ces mesures sont égales sur $\mathscr{F}_\infty$ tout entier.*

1.4 Processus de saut pur

Pour Q matrice d'intensité, on lui associe une matrice Π, par $\Pi_{i,i} = 0$, et $\Pi_{i,j} = -q_{i,j}/q_{i,i}$, si $q_{i,i} \neq 0$, et $\Pi_{i,i} = 1$, $\Pi_{i,j} = 0$, si $q_{i,i} = 0$.

Définition 1.4.1 *Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$, minimal, continu à droite, est dit processus de markov de mesure initiale λ et de matrice d'intensité Q si son processus de sauts $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de mesure initiale Λ et de matrice stochastique Π sur I à temps discret, et si le vecteur des durées écoulées $(S_1, S_2, ...)$ a la loi conditionnelle de n variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de paramètres $q_(Y_0), q(Y_2), ...$ respectivement sous condition que les valeurs des Y_i sont fixées.*

Théorème 1.4.1 (Markov forte) *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Markov de mesure initiale λ et de matrice d'intensité Q , et T un temps d'arrêt. Alors, sous la condition $X_T = i$, $i \in I$, $\widetilde{X} = (X_{T+t})_t$ est aussi un processus de Markov de mesure initiale δ_i et de matrice d'intensité Q indépendant de $\mathscr{F}_T$.*

Théorème 1.4.2 (Propriété de markov) *Soit $(X_t)_t$ un processus de Markov de mesure initiale λ et de matrice d'intensité Q . Sous condition $\{X_s = i\}$, $(X_{t+s})_{t \geq 0}$ est un processus de Markov de mesure initiale δ_i et de matrice d'intensité Q indépendant de $\mathscr{F}_s$.*

Théorème 1.4.3 *Pour T un temps d'arrêt, pour toute variable aléatoire η $\mathscr{F}_T$-mesurable,, pour tout $A \in \mathscr{F}_T$, pour tout $i, k \in I$, on a*

$$\mathbb{P}(\{X_{T+\eta} = k\} \cap A \cap \{\eta < \infty\} \cap \{T < \zeta\} \cap \{X_T = i\}) = \mathbb{P}_i(\{X_\eta = k\})\mathbb{P}(A \cap \{\eta < \infty\}$$

On peut, grâce à ce théorème, calculer $\mathbb{E}(f(X_{T+\eta}))$.

1.5 Equations de Kolmogorov

Théorème 1.5.1 *Soit $(X_t)_t$ un processus continu à droite sur I fini. Soit Q une matrice vérifiant Q1, Q2, Q3, et Π sa matrice associée. les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *Sous condition $X_0 = i$, le processus de sauts $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de mesure initiale Λ et de matrice stochastique Π , avec ici $\lambda = \delta_i$, et, pour tout $n \geq 1$, les durées écoulées entre les sauts $S_1, ..., S_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètres $q(Y_0), ..., q(Y_{n-1})$ respectivement sous conditions que la valeur de $Y_0, ..., Y_{n-1}$ sont fixées.*

ii) *Pour tout $t, h \geq 0$, sous condition $X_t = i$, X_{t+h} est indépendant de la tribu $\mathscr{F}_t$, et pour tout j, quand quand $h \downarrow 0$ uniformément pour $t \geq 0$*

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = j \mid X_t = i) = \delta_{i,j} + hq_{i,j} + o(h) \ .$$

iii) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_{n+1}, ettouti_0, ..., i_{n+1}$,*

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \mid X_{t_0} = i_0, ..., X_{t_n} = i_n) = p_{i_n,i_{n+1}}(t_{n+1} - t_n) \ ,$$

où $(p_{i,j})$ est la solution de $P'(t) = QP(t)$, $P(0) = Id$.

Théorème 1.5.2 *Soit I dénombrable. Soit Q une matrice vérifiant les propriétés Q1, Q2, Q3. L'équation $P'(t) = QP(t)$, $P(0) = Id$ a une solution positive minimale $(P(t)_{t\geq 0}$. Cette solution forme un semi groupe $P(s)P(t) = P(s + t)$, et est également la solution positive minimale de $P'(t) = P(t)Q$, $P(0) = Id$. Soit $(X_t)_t$ un processus minimal, continu à droite. Soit Π la matrice associée à Q et $P(t)$ le semi groupe associé, les hypothèses suivantes sont équivalentes.*

i) *Sous condition $X_0 = i$, le processus de sauts $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de mesure initiale Λ et de matrice stochastique Π , avec ici $\lambda = \delta_i$, et, pour tout $n \geq 1$, les durées écoulées entre les sauts $S_1, ..., S_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètres $q(Y_0), ..., q(Y_{n-1})$ respectivement sous conditions que la valeur de $Y_0, ..., Y_{n-1}$ sont fixées.*

ii) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_{n+1}, ettouti_0, ..., i_{n+1}$,*

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \mid X_{t_0} = i_0, ..., X_{t_n} = i_n) = p_{i_n,i_{n+1}}(t_{n+1} - t_n) \ ,$$

où $(p_{i,j})$ est la solution de $P'(t) = QP(t)$, $P(0) = Id$.

1.6 Processus de Poisson

Définition 1.6.1 (Processus de Poisson) *Un processus croissant, continu à droite, partant de $X_0 = 0$ est dit **processus de Poisson** de paramètre λ si les durées écoulées entre les sauts $S_1, S_2...$ sont des variables aléatoires iid. de loi exponentielle de paramètre λ, et que $Y_n = n$ pour tout n.*

Théorème 1.6.1 (propriété de Markov) *Soit $(X_t)_t$ un processus de poisson de paramètre λ. Alors, pour tout $s > 0$, $(X_{s+t} - X_s)_t$ est aussi un processus de Poisson de paramètre λ indépendant de $\mathscr{F}_s$.*

Définition 1.6.2 (Accroissements stationnaires, indépendants) *Un processus $(X_t)_t$ est dit **à accroissements stationnaires** si la loi de $X_{t+s} - X_t$ ne dépend pas de t. Ses accroissements sont **indépendants** si, pour tout $0 \leq t_0 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$, les $(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})_i$ sont indépendants.*

Théorème 1.6.2 *Soit $(X_t)_t$ un processus croissant continu à droite, et $X_0 = 0$. Soit $0 < \lambda < \infty$. les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *Les durées S_i écoulées entre les auts sont des variables aléatoires indépendantes, exponentielles, de paramètre λ et le processus de sauts est $Y_n = n$ pour tout n.*

ii) *$(X_t)_t$ a des accroissements indépendants, et, quand $h \downarrow 0$, on a*

$$\mathbb{P} = (X_{t+h} - X_t = 0) = 1 - \lambda h + o(h), \ \mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 1 = \lambda h + o(h) \ ,$$

où $o(h)$ est uniforme pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

iii) *$(X_t)_t$ a des accroissements indépendants et stationnaires, et, pour tout $t \geq 0$, X_t suit une loi de poisson de paramètre t.*

Théorème 1.6.3 (Markov forte) *Soit $(X_t)_t)$ un processus de poisson de paramètre λ, T un temps d'arrêt. Sous condition $\{T < \infty\}$, $(X_{T+t} - X_T)_t$ est aussi un processus de poisson de paramètre λ, indépendant de $\mathscr{F}_T$.*

Proposition 1.6.1 i) *Si $(X_t^j)_t$, $j \leq r$ sont des processus de poisson indépendants de paramètres λ_j, en posant $\lambda = \sum \lambda_j$, alors $(\sum X_t^j)_j$ est un processus de poisson de paramètre λ.*

ii) *Soit $(X_t)_t$ un processus de Poisson de paramètre λ. Soient $p_j \geq 0$, $j \leq r$ tels que $\sum p_j = 1$ et $\xi_1, \xi_2, ...$ une suite de variable aléatoire iid., vérifiant $\mathbb{P}(\xi_1 = j) = p_j$. On pose $J_0^j(\omega) = 0$ pour tout $j \leq r$, et $J_{n+1}^j(\omega) = \min\{J_k > J_n^j(\omega) : \xi_k = j\}$. Soit $(X_t^j)_t$ le processus continu à droite avec des sauts aux instants $J_n^j(\omega)$, et le processus de saut $Y_n^j = n$. Alors, les $(X_t^j)_t$ sont des processus de poisson indépendants de paramètre λp_j.*

Proposition 1.6.2 *Soit $(X_t)_t$ un processus de Poisson. Sous condition "$(X_t)_t$ fait exactement un saut entre t et $t+s$", la loi de ce saut est uniforme sur $[t, t+s]$.*

Proposition 1.6.3 *Soit $(X_t)_t$ un processus de Poisson. sous condition "$X_t = n$", les instants de sauts $J_1, ...J_n$ on la loi d'une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$ rangées dans l'ordre de leur croissance. la densité de cette famille est $f(t_1, ..., t_n) = n!t^{-n}\mathbb{1}_{\{0 \leq t_0 \leq ... \leq t_n\}}$*

1.7 Processus de naissance

Définition 1.7.1 *Un processus minimal $(X_t)_{t\geq 0}$ continu à droite à valeurs dans $\{0, 1, 2, ...\} \cup \{\infty\}$ est dit processus de naissance d'intensité q_i, si, sous condition $X_0 = i$, les durées écoulées entre les sauts $S_1, S_2, ...$ sont des variables aléatoires indépendantes, exponentielles, de paramètres respectifs $q_i, q_{i+1}, ...$ et le processus de sauts est $Y_n = i + n$ pour tout n.*

Proposition 1.7.1 *Soit $(X_t)_t$ un processus de naissances d'intensité $(q_j)_j$, partant de 0.*

i) *Si $\sum q_j^{-1} < \infty$, alors $\mathbb{P}(\zeta < \infty) = 1$, le processus explose.*

ii) *Sinon, $\sum q_j^{-1} = \infty$, alors $\mathbb{P}(\zeta = \infty) = 1$, le processus n'explose pas.*

iii)

Proposition 1.7.2 *Soient $S_1, S_2, ...$ des variables aléatoires indépendantes exponentielles de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, ...$ respectivement.*

i) *Si $\sum \lambda_i^{-1} = \infty$, on a $\mathbb{P}(\sum S_i = \infty) = 1$*

ii) *Sinon, $\sum \lambda_i^{-1} < \infty$, on a $\mathbb{P}(\sum S_i < \infty) = 1$*

iii)

Théorème 1.7.1 (Markov forte) *Soit $(X_t)_t$ un processus de naissance d'intensités $(q_i)_i$, et T un temps d'arrêt. Sous condition "$X_T = i$", $\widetilde{X} = (X_{T+t} - X_T)_t$ est également un processus de naissance avec $\widetilde{X}_0 = i$ indépendant de $\mathscr{F}_T$*

1.8 Explosion

Définition 1.8.1 (Instant d'explosion) *On pose $\zeta = \sup J_n = \sum S_n$, qui est appellé **instant d'explosion**. Un processus de Markov explose si $\mathbb{P}(\zeta < \infty) > 0$.*

Proposition 1.8.1 *Un processus de Markov de mesure initiale λ et de matrice d'intensité Q est non explosif si et seulement si la seule solution positive bornée du système $Q\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$ est $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.*

1.9 Classes d'états

Définition 1.9.1 (Etats communiquants) *Soient $i, j \in I$. On dit qu'un état i mène à j si $\mathbb{P}_i(\exists t \geq 0, X_t = j) > 0$. On dit que les états i et j communiquent si i mène à j et si j mène à i.*

Proposition 1.9.1 *Pour $i \neq j$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *i mène j.*

ii) i *mène à* j *pour la chaîne de markov* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

iii) *Il existe* $i = i_0, i_1, ..., i_n = j$: $q_{i_0,i_1}q_{i_1,i_2}...q_{i_{n-1},i_n} > 0$.

iv) $p_{i,j}(t) > 0$ *pour tout* $t > 0$.

v) $p_{i,j}(t) > 0$ *pour un* $t > 0$.

1.10 Probabilités d'absorption

On pose $T^A = \inf\{t \geq 0,\ X_t \in A\}$, et $h_i^A = \mathbb{P}_i(T^A < \infty)$.

Théorème 1.10.1 *Le vecteur* $h^A = (h_i^A,\ i \in I)$ *est la solution non-négative minimale du système*

$$\begin{cases} lh_i^A = 1 & \text{pour } i \in A \\ h_i^A = \sum q_{i,j}h_j^A & \text{pour } i \notin A \end{cases}$$

Théorème 1.10.2 *Soit* $k_i^A = \mathbb{E}_i(T^A)$. *Supposons que* $q_i > 0$ *pour tout* $i \notin A$. *Le vecteur* $k^A = (k_i^A, i \in I)$ *est la solution non négative du système*

$$\begin{cases} lk_i^A = 0 & \text{pour } i \in A \\ k_i^A = -\sum q_{i,j}k_j^A & \text{pour } i \notin A \end{cases}$$

1.11 Recurrence, transience

Définition 1.11.1 *Un état* i *est **récurrent** si*

$$\mathbb{P}_i(\{t \geq 0,\ X_t = i\} \text{ n'est pas limité }) = 1\ .$$

*Un état est dit **transient** si*

$$\mathbb{P}_i(\{t \geq 0,\ X_t = i\} \text{ n'est pas limité }) = 0$$

Théorème 1.11.1 *i) Si* i *est recurrent pour* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *alors* i *est récurrent pour* $(X_t)_t$.

ii) *Si* i *est transient pour* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *alors* i *est transient pour* $(X_t)_t$.

iii) *Chaque état est récurrent ou transient.*

iv) *Tous les états d'une classe d'états qui communiquent sont récurrents ou tous sont transients.*

Proposition 1.11.1 *Soit* $T^i(\omega) = \inf\{t \geq J_1(\omega) :\ X_t(\omega) = i\}$.

i) *Si* $q_i = 0$ *ou* $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$, *alors* i *est récurrent et* $\int_0^\infty p_{i,i}(t)dt = \infty$.

ii) *Si* $q_i > 0$ *et* $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$, *alors* i *est transient et* $\int_0^\infty p_{i,i}(t)dt < \infty$.

Proposition 1.11.2 *oit* $h > 0$, *et* $Z_n = X_{nh}$. *Alors, la récurrence et la transience de* X *et* Z *sont équivalentes.*

1.12 Recurrence positive, mesure invariante

Définition 1.12.1 (Mesure invariante) *Une mesure* λ *est dite **invariante** si* $\lambda Q = 0$.

Proposition 1.12.1 *Soit* Q *une matrice vérifiant* $Q1$, $Q2$, $Q3$, *et* Π *la matrice associée. Alors,* λ *est invariante si et seulement si* $\mu = \Pi\mu$, *où* $\mu_i = -\lambda_i q_{i,i}$.

Proposition 1.12.2 *Soit* Q *irréductible et récurrente. Alors, elle a une mesure invariante qui est unique à un facteur près.*

Définition 1.12.2 (Récurrence positive) *Un état* i *est dit récurrent positif si* $\mathbb{E}_i(T_i) < \infty$.

Proposition 1.12.3 *Soit* Q *une matrice irréductible. les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *Chaque état est récurrent positif.*

ii) *Un état est récurrent positif.*

iii) Q *est non explosive, et elle a une mesure invariante de probabilité* λ.

Sous ces hypothèses, $\mathbb{E}_i(T^i) = (-\lambda_i q_{i,i})^{-1}$ pour tout i.

Proposition 1.12.4 *Soit Q irréductible, récurrente, soit λ sa mesure invariante. Soit $s > 0$, alors $\lambda Q = 0$ si et seulement si $\lambda P(s) = \lambda$.*

Proposition 1.12.5 *Soit Q irréductible, non explosive, vérifiant $Q1$, $Q2$, $Q3$, de mesure de probabilité invariante λ. Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une processus de Markov de mesure initiale λ et de matrice d'intensité Q , alors $(X_{s+t})_{t\geq 0}$ l'est aussi pour tout $s \geq 0$.*

Proposition 1.12.6 *Soit λ une mesure telle que $\lambda_i q_{i,j} = \lambda_j q_{j,i}$. Alors, λ est invariante pour Q.*

Définition 1.12.3 (Equilibre) *Une mesure est dite **à l'équilibre** si sa mesure initiale est invariante.*

1.13 Convergence

Proposition 1.13.1 *Soit Q une matrice irréductible, vérifiant $Q1$, $Q2$, $Q3$, et $(X_t)_{t\geq 0}$ est une processus de Markov de mesure initiale ν et de matrice d'intensité Q , alors*

$$\mathbb{P}(X_t = j) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{q_j \mathbb{E}_j(T^j)} \ .$$

En particulier, si Q est récurrente positive,

$$\mathbb{P}(X_t = j) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_j \ ,$$

où λ est l'unique mesure invariante, $\lambda Q = 0$. Si Q est récurrente nulle ou transiente, alors

$$\mathbb{P}(X_t = j) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

1.14 Théorèmes ergodiques

Théorème 1.14.1 *Soit Q irréductible et ν une mesure. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov de mesure initiale ν et de matrice d'intensité Q . Alors,*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_{X_s=j} ds \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{q_j \mathbb{E}_j(T^j)} \ p.s,$$

Si Q est récurrente positive, alors pour toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ bornée,

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(X_s) ds \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \sum_j \lambda_j f_j \ p.s,$$

où λ est la mesure invariante.

2 Processus de Markov

2.1 Rappel : Espérance conditionelle

Définition 2.1.1 (Esperance conditionelle) *Une variable aléatoire Y est l'**espérance conditionelle** de X sachant $\mathscr{F}$, notée $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F})$, si Y est $\mathscr{F}$-mesurable, et que pour tout $A \in F$, $\mathbb{E}(Y \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_A)$.*

2.2 Definition d'un processus de Markov, fonction de transition

Soit $(X, \mathcal{B})$ un espace muni d'une tribu. Soit $(\xi_t)_{t\in T}$ une famille de variable aléatoire à valeurs dans X, où $T \subset \mathbb{R}$. Notons

$$\mathscr{F}_{\leq t} = \sigma(\xi_s, s \in T, s \leq t), \ \mathscr{F}_{\geq t} = \mathscr{F}_{\leq t} = \sigma(\xi_s, s \in T, s \geq t), \ \text{ et } \mathscr{F}_t = \sigma(\xi_t).$$

Définition 2.2.1 *Les trois définitions suivantes d'un* ***processus de markov*** $(\xi_t)_{t\in T}$ *sont équivalentes :*

i) Pour tout t et pour tout $B \in \mathscr{F}_{\geq t}$, on a

$$\mathbb{P}(B \mid \mathscr{F}_{\leq t}) = \mathbb{P}(B \mid \mathscr{F}_t)\ \mathbb{P}-p.s.$$

ii) Pour tout t et pour tout $A \in \mathscr{F}_{\leq t}$, on a

$$\mathbb{P}(A \mid \mathscr{F}_{\geq t}) = \mathbb{P}(A \mid \mathscr{F}_t)\ \mathbb{P}-p.s.$$

iii) Pour tout t et pour tout $A \in \mathscr{F}_{\leq t}$, $B \in \mathscr{F}_{\geq t}$, on a

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid \mathscr{F}_t) = \mathbb{P}(A \mid \mathscr{F}_t)\mathbb{P}(B \mid \mathscr{F}_t)\ \mathbb{P}-p.s.$$

Définition 2.2.2 (Fonction de transition d'un processus de Markov) *Soit $(xi_t)_{t\in T}$ un processus de markov. une fonction $P : T \times X \times T \times \mathcal{B}$ est sa fonction de transition si*

i) $P(s, x, t, .)$ est une mesure de probabilités sur $(X, \mathcal{B})$.

ii) $P(s, ., s, \Gamma)$ est une fonction $\mathcal{B}$-mesurable.

iii) $P(s, x, s, \Gamma) = \delta_x(\Gamma)$.

iv) Pour tout $s \leq t$, $x \in X$, $\Gamma \in \mathcal{B}$,

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\xi_t\in\Gamma} \mid \xi_s) = P(s, \xi_s, t, \Gamma),\ \mathbb{P}-p.s.$$

Proposition 2.2.1 *$(\xi_t)_{t\in T}$ est un processus de Markov avec une fonction de transition P vérifiant $(i)-(iii)$ si et seulement si pour tout $s \leq t$ et tout $\Gamma \in \mathcal{B}$, on a*

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\xi_t\in\Gamma} \mid \mathscr{F}_{\leq s}) = P(s, \xi_s, t, \Gamma)\ .$$

Théorème 2.2.1 *Soit $(\xi_t)_{t\in T}$ un processus stochastique, P une fonction qui vérifie $(i)-(iii)$, et ϕ_0 une mesure de probabilités sur $(X, \mathcal{B})$. Pour que $(\xi_t)_{t\in T}$ soit un processus de Markov de mesure initiale ϕ_0 et de fonction de transition P, il faut et il suffit que, pour tout $t_1, ..., t_n \in T$, $\Gamma_1, ..., \Gamma_n \in \mathcal{B}$, on ait*

$$\mathbb{P}(\xi_{t_1} \in \Gamma_1, ..., \xi_{t_n} \in \Gamma_n) = \int_X \phi_0(dx) \left(\int_{\Gamma_1} P(0, x, t_1, dy_1) ... \left(\int_{\Gamma_n} P(t_{n-1}, y_{n-1}, t_n, dy_n) \right) ... \right)$$

Théorème 2.2.2 (Equation de Kolmogorov-Chapman) *Pour tout s, x, t, Γ, on a , pour P fonction de transition, pour tout $u \in [s, t]$,*

$$P(s, x, t, \Gamma) = \int_X P(u, y, t, \Gamma)P(s, x, u, dy)\ .$$

Proposition 2.2.2 *Soit X un espace σ-compact, métrique, $\mathcal{B}$ sa tribu borélienne, ϕ_0 une mesure de probabilités sur X. Soit P une fonction qui vérifie $(i)-(iii)$ et les équations de Kolmogorov-Chapman. Alors, il existe un espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$et un processus $(\xi_t)_{t\in T}$ sur cet espace qui est un processus de Markov de mesure initiale ϕ_0 et de fonction de transition P.*

2.3 Famille d'opérateurs

On note B l'ensemble des fonctions mesurables bornées de $(X, \mathcal{B})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables bornées, muni de la norme infinie. Soit P la fonction de transition d'un processus de Markov $(\xi_t)_{t\in T}$.

Définition 2.3.1 *On définit une famille d'opérateurs sur B, notée $(P^{s,t})_{s\leq t\in T}$, définie par*

$$P^{s,t}f(x) = \int_X f(y)P(s, x, tdy) = \mathbb{E}(f(\xi_t \mid \xi_s = x)\ .$$

Proposition 2.3.1 *Cette famille vérifie les propriétés suivantes :*

i) $P^{s,t}$ est linéaire

ii) $\|P^{s,t}f\| \leq \|f\|$

iii) Si f est positive, $P^{s,t}f$ l'est aussi.

iv) $P^{s,t}\tilde{1} = \tilde{1}$.

v) $P^{s,s} = Id$

vi) $P^{s,t} = P^{s,u}P^{u,t}$.

Définition 2.3.2 (Sous espace Féllerien de B) *Un sous espace de B est det Féllerien si il est $P^{s,t}$-stable pour tout $s \leq t$.*

Théorème 2.3.1 *Soit X un espace métrique compact, $\mathcal{B}$ sa tribu borélienne et C un espace de fonctions continues sur X. Soit $(P^{s,t})$ une famille d'opérateurs vérifiant les 6 propriétés ci dessus. Alors, il existe une fonction $P(s,x,t,\Gamma)$ vérifiant les trois premières propriétés des fonctions de transitions, et les équations de Kolmogorov-Chapman et la définition 2.3.1.*

2.4 Familles markoviennes homogènes en temps. Semi-groupe.

Définition 2.4.1 (Homogénéité en temps) *Une fonction de transition est dite* ***homogène en temps*** *si elle est définie pour $s,t \in T$, avec $T = \mathbb{R}^1$, ou $\mathbb{R}_+$, ou $\mathbb{Z}_+$, ou $\mathbb{Z}$, et*

$$P(s+h, x, t+h, \Gamma) = P(s, x, t, \Gamma), \ \forall h \ .$$

Dans ce cas, on pose

$$P(t-s, x, \Gamma) = P(s, x, t, \Gamma) \ .$$

C'est une mesure de probabilité de l'argument Γ, est mesurable par rapport à x, et $P(0,x,\Gamma) = \delta_x(\Gamma)$. Les équations de Kolmogorov-Chapman s'écrivent

$$P(t+s, x, \Gamma) = \int_X P(s, y, \Gamma) P(t, x, dy) \ .$$

Définition 2.4.2 (Famille de Markov homogène en temps) *Soient P_x pour $x \in X$ des mesures sur $\mathscr{F}_{\geq 0}$. Un couple (ξ_t, P_x) est dit une famille de Markov homogène en temps de fonction de transition $P(t,x,\Gamma)$ si pour tout $h \in T$, $x \in X$, $\Gamma \in \mathcal{B}$*

$$P_x(\xi_0 = x) = 1 \ .$$

$$P_x(\xi_{t+h} \in \Gamma \mid \mathscr{F}_{\leq t}) = P(h, \xi_t, \Gamma), \ P_x - p.s.$$

2.5 Solutions d'équations différentielles stochastiques

Définition 2.5.1 (Solution de l'EDS) *Soit $\eta(\omega) = (\eta^1(\omega), ..., \eta^d(\omega)) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ une variable aléatoire . On dit que $(\xi_t(\omega))_{t \geq s}$ est une solution de l'EDS :*

$$d\xi_t^i = \sum_{j=1}^{l} \sigma_j^i(\xi_t) dB_t^j + b^i(\xi_t) dt \ , \ i = 1, 2, ..., d,$$

avec condition initiale $\xi_s(\omega) = \eta(\omega)$ si

$$d\xi_t^i = \sum_{j=1}^{l} \int_s^t \sigma_j^i(\xi_{s'}) dB_{s'}^j + \int_s^t b^i(\xi_{s'}) ds' \ , \ i = 1, 2, ..., d.$$

Proposition 2.5.1 *Si on a l'EDS précédente, avec coefficients lipschitziens, et si η est une variable aléatoire $\mathscr{F}_{leqs}^B$ mesurable, avec $\mathbb{E}(\eta^2) < infty$, alors il existe une solution $(\xi_t)_{t \geq s}$ avec η pour conditions initiales, unique p.s.*

On considère ϕ_h un opérateur $\Omega \to \Omega$, tel que $B_s(\phi_h)(\omega)) = B_{s+h}(\omega) - B_h(\Omega)$.

Lemme 2.5.1 *Soit $f(x,\omega) : \mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable pour $B^d \times \mathscr{F}_{\leq t}^B$. posons $F(x) = \mathbb{E}(f(x,.))$. Soit η une variable aléatoire $\mathscr{F}_{\leq t}^B$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Alors,*

$$\mathbb{E}(f(\eta(\omega, \phi_t(\omega \mid \mathscr{F}_{\leq t}^B) = F(\eta(\omega)) \ p.s.$$

En particulier,

$$\mathbb{E}(f(\eta(\omega, \phi_t(\omega)) = \mathbb{E}(F(\eta(\omega)) \ p.s.$$

Proposition 2.5.2 *Pour tout $0 \leq s < t$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$\xi_t(x,\omega) = \xi_{t-s}(\xi_s(x,\omega), \phi_s(\omega)), p.s.$$

Proposition 2.5.3 *Pour $s < t$, on a*

$$\mathbb{P}\left(\xi_t(x,\omega) \in \Gamma \mid \mathscr{F}_{\leq s}^B\right) = P(t-s, \xi_s(x,\omega), \Gamma) \ ,$$

où $P(h,x,\gamma) = P(\xi_h(x,\omega) \in \Gamma)$. Autrement dit, pour $x \in \mathbb{R}^d$, $(\xi_t(x,\omega))_{t \geq 0}$ est un pocessus de Markov de fonction de transition P.

2.6 Propriété de Markov forte

On note désormais $\mathscr{F}_{\leq t+} = \cap_{s>t} \mathscr{F}_{\leq s}$.

Définition 2.6.1 (Temps d'arrêt) *une variable aléatoire T est un **temps d'arrêt** par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_{\leq t})_{t\geq 0}$, (resp. $(\mathscr{F}_{\leq t+})_{t\geq 0}$) si pour tout t, on a $\{T \leq t\} \in \mathscr{F}_{\leq t}$ (resp. $\mathscr{F}_{\leq t+}$). On définit également*

$$\mathscr{F}_{\leq T} = \{A \in \mathscr{F} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_{\leq t}\} \text{ et}$$

$$\mathscr{F}_{\leq T+} = \{A \in \mathscr{F} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_{\leq t+}\} .$$

Définition 2.6.2 (Markov forte) *La famille (ξ_t, P_x) progressivement mesurable vérifie la propriété de Markov forte par rapport à $(\mathscr{F}_{\leq t})_{t\geq 0}$ (resp.$(\mathscr{F}_{\leq t+})_{t\geq 0}$) si pour tout temps d'arrêt T par rapport à $\mathscr{F}_{\leq t}$ (resp. $\mathscr{F}_{\leq t+}$) si pour toute variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ ou $\mathbb{R}_+\cup\{\infty\}$, et $\mathscr{F}_{\leq T}$, (resp. $\mathscr{F}_{\leq T+}$)-mesurable, pour tout $x \in X$ et $\Gamma \in \mathcal{B}$, on ait*

$$P_x(\xi_{T+\eta} \in \Gamma \mid \mathscr{F}_{\leq T}) = P(\eta, \xi_T, \Gamma) \;\; (\textit{resp.} \mid \mathscr{F}_{\leq T+}) \; P_x\textit{–p.s. sur } \{T, \eta < \infty\} .$$

Proposition 2.6.1 *Soit (ξ_t, P_x) une famille de Markov qui vérifie la propriété de Markov forte. Alors, pour tout $B \in \mathscr{F}_{\geq 0}$*

$$P_x(\theta_T^{-1} \cap B \mid \mathscr{F}_T) = P_{\xi_T}(B), \; P_x - \textit{p.s. sur } \{T < \infty\} .$$

Proposition 2.6.2 *Si T et η prennent un nombre de valeurs au plus dénombrable, la propriété de Markov forte est vérifiée par rapport à $(\mathscr{F}_{\leq t})_{t\geq 0}$.*

Théorème 2.6.1 *Une famille de Markov (ξ_t, P_x), homogène en temps, Fellérienne, avec des trajectoires continues à droite vérifie la propriété de Markov forte par rapport à $(\mathscr{F}_{\leq t+})_{t\geq 0}$.(Et bien sur par rapport à $(\mathscr{F}_{\leq t})_{t\geq 0}$*

2.7 Processus de saut pur

On considère une famille de Markov (ξ_t, P_x), sur un espace dénombrable X, avec des trajectoires continues à droite. On reprend donc les notations du chapitre précédent.

Théorème 2.7.1 *Soit (ξ_t, P_x) une famille de Markov sur un espace X dénombrable, avec des trajectoires continues à droite.*

i) Sous P_x, les variables S_1 et Y_1 sont indépendantes, et S_1 suit une loi exponentielle de paramètre q_x. On admet que $q_\delta = 0$, où $Y_n = \Delta$ si $J_n = \infty$. Si on note $\pi_{x,y} = P_x(Y_1 = y)$ pour $y \in X \cup \delta$, on a $\pi_{x,x} = 0$. Si $q_x > 0$, on a $\sum_{y\in X} \pi_{x,y} = 1$. Si $q_x = 0$, $\sum_{y\in X} \pi_{x,y} = 0$.

ii) Sous P_x, le processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $X \cup \{\infty\}$ de matrice de transition $(\pi_{x,y})_{x,y\in X}$

iii) Sous P_x, conditionellement à $\mathscr{F}_{J_n}$, les variables Y_{n+1} et S_{n+1} sont indépendantes : la première est de loi exponentielle de paramètre q_{Y_n}, la seconde est de loi $(\pi_{Y_n,y})_{y\in X\cup\{\infty\}}$.

iv) Conditionellement à la tribu $\sigma(Y_n, n \geq 0)$, les variables aléatoires $S_n, n = 1, 2, ...$ sont indépendantes, chacune étant exponentielle de paramètre q_{Y_n}.

2.8 Générateur

Définition 2.8.1 (Générateur infinitésimal) *Soit E un espace de Banach et P^t un semi-groupe d'opérateurs linéaires sur cet espace, $0 \leq t < \infty$, $P^0 = Id$. On dit qu'un opérateur A défini sur un domaine $D_A \subset E$ est un **générateur infinitésimal** de ce semi-groupe si pour tout $f \in D_A$, il existe une limite $\lim_{t\_0} t^{-1}(P^t f - f) = Af$, au sens où $\|t^{-1}(P^t f - f) - Af\| \to 0$. Cette limite détermine la valeur de A sur f.*

Définition 2.8.2 *Soit (ξ_t) une familel de processus de Markov homogènes en temps sur $(\Omega, \mathscr{F}, P_x)$, $t \in \mathbb{R}$, à valeurs dans un espace mesurable $(X, \mathcal{B})$. Soit P^t son semi-groupe défini sur un espace B de toutes les fonctions $f : (X, \mathcal{B}) \to \mathbb{R}$ mesurables bornées de norme $\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$. Le générateur infinitésimal de ce semi-groupe s'appelle le générateur infinitésimal de la famille de Markov (ξ_t).*

Théorème 2.8.1 *Soit (ξ_t) une famille de Markov sur $(\Omega, \mathscr{F}, P_x)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que uniformément pour $x \in \mathbb{R}$ quand $t \to 0$*

$$P(t, x, \mathbb{R} - U_\varepsilon(x) = o(t) ,$$

$$\int_{U_\varepsilon(x)} (y - x) P(t, x, dy) = b(x)t + o(t) \text{ , et}$$

$$\int_{U_\varepsilon(x)} (y - x)^2 P(t, x, dy) = a(x)t + o(t) ,$$

où $U_\varepsilon(x)$ est un voisinage de x. Alors, $C^{(2)}_{uni} \subset D_A$, où $C^{(2)}_{uni}$ est l'ensemble des fonctions de dérivées uniformément continues sur X, et pour tout $f \in C^{(2)}_{uni}$,

$$Af = \frac{1}{2} a(x) f''(x) + b(x) f'(x) .$$

On note $C^{(2)}_c$ l'espace des fonctions $C^{(2)}$ à support compact.

Proposition 2.8.1 *Pour $(\xi_t)_t$ la solution de l'EDS vue précédemment, issue p.s. de $\xi_0 = x$, on a $C^{(2)}_c(\mathbb{R}^d) \subset D_A$ et de plus*

$$Af(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a^{i,j}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} .$$

où $a^{i,j} = \sum_k \sigma^i_k(x) \sigma^j_k(x) = (\sigma \sigma^T(x))_{i,j}$.

2.9 Espace de continuité du semi-groupe, equations de Kolmogorov

Définition 2.9.1 *On définit $B_0 \subset B$ un espace de fonctions pour lesquelles*

$$\|P_t f - f\| \to 0, \ t \downarrow 0.$$

Théorème 2.9.1 *i) B_0 est un espace vectoriel fermé.*

ii) si $f \in B_0$, P^t est uniformément continue en t sur $[0, \infty[$.

iii) si $f \in B_0$, alors $P^t f \in B_0$.

iv) $D_1 \subset B_0$, $AD_A \subset B_0$.

v) On a les équations de kolmogorov : $AP^t f = P^t A f = \frac{d}{dt} P^t f$, ce qui s'écrit autrement comme

$$P^t f = f + \int_0^t AP^s f ds = f + \int_0^t P_s A f ds .$$

Définition 2.9.2 (Résolvante) *On définit pour $\lambda > 0$*

$$R_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P^t f(x) dt .$$

Cette famille est appellée la résolvante de la famille (P^t).

Proposition 2.9.1 *i) Si P^t et P'^t sont des semi-groupes de transitions de familles de Markov ξ_t et ξ'_t respectivement sur $(\Omega, \mathscr{F}, P_x)$, et $(\Omega, \mathscr{F}, P'_x)$ à valeurs dans $(X, \mathcal{B})$ admettant le même espace B_0 et la même résolvante R_λ, alors pour tout $f \in B_0 : P^t f = P'^t f$.*

ii) Si de plus $(X, \mathcal{B})$ est un espace polonais, et l'espace des fonctions $C(X)$ continues bornées est contenu dans B_0, i.e. $C(X) = B_0$, alors $P^t = P'^t$.

iii) Si en particulier, la famille de Markov (ξ_t) avec le semi-groupe P^t a des trajectoires continues à droite, alors $C(X) \subset B_0$ (et par conséquent $P^t = P'^t$)

Théorème 2.9.2 *Pour tout $f \in B$,*

$$R_\mu R_\lambda f = (\lambda - \mu)^{-1} |R_\mu f - R_\lambda f| ,$$

pour tous λ, μ, tels que $R_\lambda B = R_\mu B$.

Théorème 2.9.3 *i) L'opérateur R_λ est une bijection entre B_0 et D_1 et $R_\lambda^{-1} = (\lambda Id - A)$.*

ii) Le générateur infinitésimal A détermine le semi-groupe P^t sur B_0 de facon unique.

iii) Si P^t et P'^t ont le même espace B_0 avec $D_1 \subset D_{\overline{A}}$, et $Af = \overline{A} f$ pour $f \in D_A$, alors $D_A = D_{\overline{A}}$.