Fiche résumée du cours de Théorèmes limites et grandes déviations, par Z.Shi

1 Convergence étroite de mesures

1.1 Rappels sur les espaces metriques

1.2 Convergence étroite dans un espace métrique

Soit (S, d) un espace métrique, $\mathscr{S}$ tribu borélienne, soient $P, P_1, \ldots$ des probabilités sur S.

Proposition 1.2.1 *$A \in \mathscr{S}$,*

$$\mathbb{P}(A) = \sup\{\mathbb{P}(F), F \subset A \text{ } ferm \text{ }\} = \inf\{\mathbb{P}(O), A \subset O \text{ } ouvert \text{ }\}$$

Corollaire 1.2.1 *Soient P, $\widetilde{P}$ deux probas sur S.*

i) $P(F) = \widetilde{P}(F)$, pour tout fermé $F \Rightarrow P = \widetilde{P}$

ii) $\int_S f dP = \int_S f d\widetilde{P}$, $\forall f : S \to \mathbb{R}$ continue bornée $\Rightarrow P = \widetilde{P}$

Définition 1.2.1 (Convergence étroite) *On dit que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge étroitement** vers P sur S si $\int_S = f dP_n \underset{n\to\infty}{\to} \int_S f dP$, $\forall f : S \to \mathbb{R}$ continue bornée.*

Théorème 1.2.1 (Portmanteau) *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $P_n \to P$ étroitement.

ii) $\int_S = f dP_n \underset{n\to\infty}{\to} \int_S f dP$, $\forall f : S \to \mathbb{R}$ lipshitzienne.

iii) Pour tout fermé F, on a $\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \leq P(F)$.

iv) Pour tout ouvert O, on a $\liminf_{n\to\infty} P_n(O) \geq P(O)$.

v) $\forall A$, $\mathbb{P}(\partial A) = 0 \Rightarrow P_n(A) \to P(A)$.

Proposition 1.2.2 *Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent étroitement vers P, et $\varphi : S \to \widetilde{S}$ une fonction continue. Alors,$P_n \circ \varphi^{-1} \to P \circ \varphi^{-1}$ étroitement sur $\widetilde{S}$. $P_n \circ \varphi^{-1}$ est la mesure image de P_n par φ, ie $P_n \circ \varphi^{-1}(s) = P_n(\varphi^{-1}(s)))$*

Définition 1.2.2 (Convergence en loi) *On dit que $X_n \to X$ **en loi, ou en distribution**, si les lois des $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent étroitement vers la loi de X*

Proposition 1.2.3 *Soient $X, X_1, \ldots$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$et à valeurs dans $(S, \mathscr{S})$ un espace métrique. Si $d(X_n, X) \overset{\mathbb{P}}{\to} 0$, alors X_n converge en loi vers X.*

1.3 Métrique de Prokhorov

Définition 1.3.1 (Metrique de Prokhorov) *$\forall P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$,*

$$\rho(P, Q) = \inf\{\varepsilon > 0, P(A) \leq Q(A^\varepsilon) + \varepsilon,\ Q(A) \leq P(A^\varepsilon) + \varepsilon\ \forall A \in \mathscr{S}\}$$

*s'appelle la **métrique de Prokhorov** sur l'espace $\mathcal{P}(\mathcal{S})$. Remarque : On peut se restreindre dans la définition de la métrique aux fermés de $\mathscr{S}$.*

Lemme 1.3.1 *$(\mathcal{P}(\mathcal{S}), \rho)$ est un espace métrique.*

Lemme 1.3.2

$$\begin{aligned}\rho(P, Q) &= \inf\{Q(A) \leq P(A^\varepsilon) + \varepsilon\ \forall A \in \mathscr{S}\} \\ &= \inf\{Q(F) \leq P(F^\varepsilon) + \varepsilon\ \forall F \in \mathscr{S} \text{ fermé }\}\end{aligned}$$

Théorème 1.3.1 *S un espace métrique, $P, P_1, \ldots \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$.*

i) $\rho(P_n, P) \to 0 \Rightarrow P_n \to P$ étroitement *ii) Si S est séparable, $P_n \to P$ étroitement $\Rightarrow$ $\rho(P_n, P) \to 0$*

Théorème 1.3.2 *i) S séparable $\Rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{S})$ séparable, muni de ρ.*
ii) S séparable complet $\Rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{S})$ séparable complet, muni de ρ.

Théorème 1.3.3 *S séparable, $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$. On a alors*

$$\rho(P,Q) = \inf_{\mu} \inf\{\varepsilon > 0, \mu(\{(x,y) \in S^2, d(x,y) \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon\} ,$$

où l'inf est pris sur toutes les mesures μ sur S^2 dont les projections respectives sont P et Q. (i.e $\mu(A \times S) = P(A)$, $\mu(S \times A) = Q(A)$.)

Lemme 1.3.3 *S séparable, $\varepsilon > \rho(P,Q) \quad \Rightarrow \quad \exists(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, $\exists X, Y$ deux variables aléatoires sur cet espace de lois respectives P et Q, et telles que $\mathbb{P}(d(X,Y) \geq \varepsilon) \leq \varepsilon$.*

1.3.1 Tension

Définition 1.3.2 (Proba, famille de probas tendues) *i) $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$, P est tendue si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists K$ compact tel que $P(K^c) < \varepsilon$.*
ii) Soit $\Pi \subset \mathcal{P}(\mathcal{S})$, Π est tendue, si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists K$ compact tel que $P(K^c) \leq \varepsilon$, pour tout $P \in \Pi$.

Théorème 1.3.4 (Ulam) *Soit S un espace séparable complet, alors soit $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$, P est tendue.*

Corollaire 1.3.1 *S séparable complet, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$, $P(A) = \sup\{P(K), K \subset A$ compact. $\}$, pour tout $A \in \mathscr{S}$.*

1.3.2 Théorème de Prokhorov

Définition 1.3.3 (Relative compacité) *Soit $\Pi \subset \mathcal{P}(\mathcal{S})$, Π est **relativement compacte** si, pour tout $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Pi$, il existe une extraction $(P_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge étroitement.*

Théorème 1.3.5 (Prokhorov) *i) Π tendue $\Rightarrow$ Π relativement compacte.*
ii) Si S est séparable complet, Π relativement compact $\Rightarrow \Pi$ tendue.

Corollaire 1.3.2 *S séparable complet, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge étroitement $\Rightarrow$ $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendue. Réciproquement, toute suite tendue dont les extractions convergentes admettent une limite unique converge étroitement vers cette limite.*

Théorème 1.3.6 *$S = \mathbb{R}_+$, $P, P_1, ... \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$, posons $L(t) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tx} P(dx)$, et $L_n(t) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tx} P_n(dx)$. Alors,*

$$L_n(t) \to L(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+ \;\Leftrightarrow\; P_n \to P \text{ étroitement sur } \mathbb{R}_+.$$

1.3.3 Quelques discussions

1.3.3.1 version fonctionnelle du théorème du portmanteau

Théorème 1.3.7 (Protmanteau, version fonctionnelle) *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $P_n \to P$ étroitement sur S
ii) $\limsup_{n\to\infty} \int_f dP_n \leq \int f dP$, $\forall f : S \to \mathbb{R}$ majorée sur S, semi continue supérieurement
iii) $\liminf_{n\to\infty} \int_f dP_n \geq \int f dP$, $\forall f : S \to \mathbb{R}$ minorée sur S, semi continue inférieurement

iv) $\int f dP_n \to \int f dP$, $\forall f : S \to \mathbb{R}$ *bornée, P-p.s. continue.*

Lemme 1.3.4 *$f : S \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $\inf_S f > -\infty$*

i) $\exists f^* \leq f$, *semi continue inférieurement, telle que* $\forall g \leq f$ *sci,* $g \leq f^*$

ii) $\inf_S f^* > -\infty$, $f^*(x) = f(x)$ *en tout* x *où* f *est sci.*

iii) f *sci* $\Leftrightarrow f = \lim \uparrow_{n\to\infty} f_n$, f_n *continue bornée* $\forall n$.

1.3.3.2 distance en variation totale

Définition 1.3.4 (variation toale) $\rho_{var}(P,Q) = \sup_{\varphi,\ \|\varphi\|_1\ mes\ bornee} \left|\int \varphi dP - \int \varphi dQ\right|$. *Soit R une proba, telle que P et Q sont absolument continues par rapport à R. On note f et g les densités respectives.*

Proposition 1.3.1 *Dans ces conditions,* $\rho_v ar(P,Q) = \|f - g\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R})} = 2\sup_{A\in\mathscr{S}} |P(A) - Q(A)|$.

2 Convergence fonctionnelle des processus continus

2.1 Introduction

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, que l'on munit de la norme infinie. Soit $\mathscr{S}$ la tribu borélienne.

Proposition 2.1.1 $\mathscr{S} = \sigma(\{\pi_t, t \in [0,1]\})$, *où* $\begin{array}{cccc} \pi_t & : & \mathscr{C} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x(t) \end{array}$.

Proposition 2.1.2 $X : \Omega \to \mathscr{C}$ *mesurable* $\Leftrightarrow \forall t \in [0,1]$, X_t *variable aléatoire .*

Théorème 2.1.1 *Sur $\mathscr{C}$, convergence étroite $\Leftrightarrow$ tension et convergences en loi fini-dimensionnelles.*

2.2 Espace $\mathscr{C}$ et tension

Théorème 2.2.1 (Arzela-Ascoli) $A \in \mathscr{C}$, *A relativement compact* $\Leftrightarrow$ $\sup_{x\in A} |x(0)| < \infty$, *et* $\sup_{x\in A} \omega_x(\delta) \underset{\delta\to 0}{\to} 0$.

Théorème 2.2.2 $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tendue sur* $\mathscr{C} \Leftrightarrow (i)$ *et* (ii)

i) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ *tel que* $P_n(\{x \in \mathscr{C},\ |x(0)| \geq M\}) \leq \varepsilon\ \forall n \geq 1$

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \varepsilon' > 0$, $\exists \delta \in]0,1[, \exists n_0$ *tel que* $P_n(\{x \in \mathscr{C},\ \omega_n(\delta) > \varepsilon\}) < \varepsilon'$, $\forall n \geq n_0$.

Théorème 2.2.3 $\delta \in]0;1[$, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = 1$ *tel que* $t_{i+1} - t_i \geq \delta, i \in \{1;...;N-2\}$. *Alors,* $\forall \varepsilon, \forall P \in \mathcal{P}(\mathscr{C})$

$$P(\{x \in \mathscr{C} : \omega_w(\delta) > \varepsilon\}) \leq \sum_{i=0}^{N-1} P(\{x \in \mathscr{C}, \sup_{s\in[t_i,t_{i+1}]} |x(s) - x(t_{i+1})| > \frac{\varepsilon}{3}\})$$

Théorème 2.2.4 *Soient $X, X^{(1)}, ...$ variables aléatoires à valeurs dans $\mathscr{C}$. Si l'on a*

i) *convergence en loi fini-dimensionnelle.*

ii) $\forall \varepsilon > 0$ $\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(\omega_{X^{(n)}}(\delta) > \varepsilon)$

Alors $X^{(n)}$ converge en loi vers X.

2.3 Théorème de Donsker

On considère

$$X_t^{(n)} = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} + (nt - \lfloor nt \rfloor)\frac{\xi_{\lfloor nt \rfloor} + 1}{\sigma\sqrt{n}},\ t \in [0,1],$$

où les (ξ_i) sont des variables aléatoires iid de carré intégrable et d'espérance nulle, et où $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$.

Théorème 2.3.1 (Donsker) *Dans ces conditions, $X^{(n)}$ converge en loi vers un mouvement brownien. (i.e. sa loi converge étroitement vers la mesure de Wiener.)*

Lemme 2.3.1 $\forall n \geq 1, \forall \lambda > 0$, *on a*

$$\mathbb{P}(\max_{k=1\dots n} |S_k| > \lambda\sqrt{n}) \leq 2\mathbb{P}(|S_n| > \lambda\sqrt{2\sigma^2 n})$$

2.4 principes d'invariance

Théorème 2.4.1 (Représentation de Stokhorod) *(S,d) espace métrique séparable. $P, P_1, P_2 ... \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$ tel que $P_n \to P$ étroitement sur S. Alors, il existe $(\widetilde{Omega}, \widetilde{\mathscr{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$ et $X, X_1 ...$ tels que la loi de X soit P, celle de X_n soit P_n pour tout n, et que $X_n \to X \widetilde{\mathbb{P}}$-p.s.*

Théorème 2.4.2 (Strassen, Komlos, Major, Tusnady, KMT) *Il existe $(\widetilde{Omega}, \widetilde{\mathscr{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$ tel que $\exists (\widetilde{\xi_j})_j$, iid, de même loi que les $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe B un mouvement brownien tel que*

$$\sup_{t\in[0,1]} \left| \widetilde{X}_t^{(n)} - \frac{1}{\sqrt{n}} B_{nt} \right| = o(\sqrt{loglog(n)}),\ \mathbb{P} - p.s.$$

De plus, si $\forall a \in [-\delta, \delta]$, $\mathbb{E}(e^{a\xi_1}) < \infty$, on peut remplacer $o(\sqrt{loglog(n)})$ par $o(\frac{log(n)}{\sqrt{n}}$.

2.5 Preuve du théorème de Stokhorod

Lemme 2.5.1 *Soit (S,d) un espace métrique, soit $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$. $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$ tel que $\rho(P,Q) < \varepsilon$, $E_1, ..., E_N \in S$ disjoints, de diamètres plus petits que δ, $E_0 = (\cup E_i)^c$. Alors, il existe $c_1, ..., c_N \in [0,1]$, $\widetilde{\Omega}$, $\widetilde{\mathscr{F}}$, $\widetilde{\mathbb{P}}$, $X, Y_0, ..., Y_N \in S$, $\xi \in \mathbb{R}$, indépendants, tels que la loi de ξ soit uniforme sur $]0,1[$, celle de X soit $\mathbb{P}$, et si Y est défini par $Y = Y_i$ sur $\{X \in E_i, \xi \geq c_i\}$, Y_0 sinon, en notant Q la loi de Y, on a alors*

$$\{d(X,Y) \geq \delta + \varepsilon\} \subset \{X \in E_0\} \cup \{\xi < \max_{i, \mathbb{P}(E_i)>0} \frac{\varepsilon}{\mathbb{P}(E_i)}\}\ ,$$

et

$$\widetilde{P}(d(X,Y) \geq \delta + \varepsilon) \leq \delta + \varepsilon\ .$$

3 Convergence fonctionnelle des processus cadlag

3.1 espace D et topologie de Stokhorod

On considère $D = \{x : [0,1] \to \mathbb{R}, \text{continue à droite, avec limite à gauche}\}$. Pour $A \subset [0,1]$, on note $\omega_x(A) = \sup_{s,t\in A}\{x(s) - x(t)\}$, et, pour $\delta > 0$, $\omega_x(\delta) = sup_{t\in[0,1-\delta]}\omega_x([t, t+\delta[)$

Lemme 3.1.1 $x \in D$

i) $\exists \varepsilon > 0$, $\exists 0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = 1$ *tel que*

$$\forall 1 \leq i \leq N, \omega_x([t_{i-1}, t_i[) < \varepsilon$$

ii) $\exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ *en escalier, telle que* $\|x_n - x\|_\infty \underset{n\to\infty}{\to} 0$

iii) $\forall \varepsilon > 0$,

$$card\{t \in [0,1], \left|x(t) - x(t^-)\right| > \varepsilon\} < \infty$$

Proposition 3.1.1 $x \in D$

i) $card\{t \in [0,1], t$ *est un point de discontinuité de* $x\ \} \leq \aleph_0$

ii) $\|x\|_\infty < \infty$

Définition 3.1.1 (Distance de Stokhorod) $x \in D$, $y \in D$

$$d(x,y) = \inf\{\varepsilon > 0, \exists\lambda \in \Lambda, \sup_{t\in[0,1]} |\lambda(t) - t| < \varepsilon, \sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(\lambda(t))| < \varepsilon\}$$
$$= \inf_{\lambda\in\Lambda(\|\lambda - Id\|_\infty \vee \|x-y\circ\lambda\|_\infty}$$

Lemme 3.1.2 *$(D, d(.,.))$ est un espace métrique.*

Proposition 3.1.2 *$x, x_1, x_2 ... \in D$,*

$$\|x_n - x\|_\infty \underset{n\to\infty}{\to} 0 \ \Rightarrow \ x_n \to x \text{ dans } D.$$

Proposition 3.1.3 *$x_n \to x$ dans D, alors*

i) $x_n(0) \to x(0)$, $x_n(1) \to x(1)$, et $x_n(t) \to x(t)$ en tout point t de continuité de x.

ii) $x \in C \ \Rightarrow \|x_n - x\|_\infty \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Théorème 3.1.1 *Le restreiction à C de la topologie de Stokhorod est la topologie uniforme sur C.*

3.2 Espace D, séparabilité

Théorème 3.2.1 *(D, d) est séparable.*

3.3 Espace D, complétude

(D, d) n'est pas complet. Cependant :

Théorème 3.3.1 *$\exists\widetilde{d}$, métrique sur D, équivalente à d, telle que $(D, \widetilde{d})$ soit complet.*

3.4 Espace D, ensembles compacts

On munit D de la tribu borélienne $\mathscr{D}$.

Proposition 3.4.1 $\mathscr{D} = \sigma(\pi_t, t \in [0,1])$.

Corollaire 3.4.1 *$T \subset [0,1]$, dense. Deux probas qui coïncident sur les*

$$\{\pi_{t_1,...,t_N}(A), \ N \geq 1, t_1, ..., t_N \in T \cup \{1\}, \ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\}$$

sont identiques.

Théorème 3.4.1 *$A \subset D$, A relativement compact $\Leftrightarrow (i) + (ii)$*

i) $\sup_{x\in A}\|x\|_\infty < \infty$

ii) $\sup_{x\in A} \omega'_x(\delta) \underset{\delta\to 0}{\to} 0$

3.5 Convergence étroite sur D

Soit $X, X^{(1)}, ... : \Omega \to D$, mesurables.

Théorème 3.5.1 *$X^{(n)}$ converge en loi vers X sur $D \Leftrightarrow (i) + (ii)$*

i) $(\mathscr{L}(X^{(n)}))_n$ est tendue sur D

ii) $\mathscr{L}(X^{(n)}_{t_1}, ..., X^{(n)}_{T_N}) \to \mathscr{L}(X_{t_1}, ..., X_{T_N})$ étroitement sur $\mathbb{R}^N$, $\forall N, \forall t_1, ..., t_N$.

Définition 3.5.1 $T_X = \{t \in]0,1[, \ \mathbb{P}(X_t = X_t^-) = 1\} \cup \{0,1\}$

Théorème 3.5.2 *$(P_n) \subset \mathcal{P}(\mathcal{D})$, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendue sur $D \Leftrightarrow (i) + (ii)$*

i) $\limsup_{M\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P_n(\{x \in D, \|x\|_\infty > M\}) = 0$

ii) $\limsup_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} P_n(\{x \in D, \omega'_x(\delta) > \varepsilon\}) = 0$, $\forall\varepsilon > 0$.

Corollaire 3.5.1 *$(P_n) \subset \mathcal{P}(\mathcal{D})$, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendue sur $D \Leftrightarrow (i') + (ii)$*

i') $T \subset [0,1]$, dense, $\forall t \in T \cup \{1\}$, $\lim_{M\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P_n(\{x \in D, |x(t)| > M\}) = 0$

Corollaire 3.5.2 *$(P_n) \subset \mathcal{P}(\mathcal{D})$, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendue sur $D \Leftrightarrow (i'') + (ii)$*

i")

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P_n(\{x \in D, |x(0)| > M\}) = 0$$

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P_n(\{x \in D, |\phi(x)| > M\}) = 0$$

et ce $\forall x \in D, \phi(x) = \sup_{t\in]0,1]} |x(t) - x(t^-)|$

3.6 Autres critères de tension

Théorème 3.6.1 *$(i)+(ii)+(iii) \Rightarrow \mathscr{L}(X_1^{(n)} \to \mathscr{L}(X)$ étroitement sur D.*

i) $\forall N$, $\forall t_1, ..., t_N \in T_X$, $\mathscr{L}(X_{t_1}^{(n)}, ..., X_{t_N}^{(n)}) \to \mathscr{L}(X_{t_1}, ..., X_{t_N})$ étroitement sur $\mathbb{R}^N$.

ii) $X_1 - X_{1-\delta} \underset{\delta\to 0}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$

iii) $\exists \varepsilon > 0, \exists \beta > 0, \exists F : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue, croissante, telle que

$$\mathbb{P}(\left|X_t^{(n)} - X_s^{(n)}\right| \geq \lambda,\ \left|X_s^{(n)} - X_r^{(n)}\right| \geq \lambda) \leq \frac{(F(t) - F(r))^{1+\varepsilon}}{\lambda^\beta},$$

$\forall 0 \leq r < s < t \leq 1$, $\forall \lambda > 0, \forall n$

Théorème 3.6.2 (Donsker) *$\xi_1, \xi_2, ...$ variables aléatoires iid, $\mathbb{E}(\xi_1) = 0, \sigma^2 = var(\xi_1) \in]0, \infty[$. $S_n = \sum^n \xi_i$, $S_0 = 0$. On pose*

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}.$$

Pour tout n, $X^{(n)} \in D$. Alors,

$$\mathscr{L}(X^{(n)} \to \mathscr{L}(B) \ \text{ étroitement sur } D.$$

Théorème 3.6.3 (Critère d'Aldonis) *$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, espace de probas, et $\forall n$, $(\mathscr{F}_t^{(n)})_{t\in[0,1]}$ filtration. Pour tout n, $X^{(n)} \in D$ est $(\mathscr{F}_t^{(n)})_t$-adaptée. Alors, $(i) + (ii) \Rightarrow \mathscr{L}(X^{(n)})$ tendue sur D.*

i) $\mathscr{L}(\|X^{(n)}\|_\infty)$ tendue sur D.

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{\substack{S,T\ (\mathscr{F}_t^{(n)})-tda \\ S\leq T\leq S+\delta\wedge 1}} \mathbb{P}\left(\left|X_T^{(n)} - X_S^{(n)}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \varepsilon'.$$

4 Proncipe des grandes déviations

4.1 Théorème de Cramèr

Soient $X, X_1, X_2..$ des variables aléatoires iid, et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Théorème 4.1.1 (Cramèr) *Supposons $\lambda(\theta) := \log(\mathbb{E}(e^{\theta X}) < \infty$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$. Alors, $\forall a > \mathbb{E}(X)$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n > na) = -\lambda^*(a)$$

, où $\lambda^*(x) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}}(\theta x - \lambda(\theta))$.

4.2 Propriétés de la transformée de Cramèr

On pose $D_1 = \{\theta \in \mathbb{R}, \lambda(\theta) < \infty\}$

Proposition 4.2.1 *i) $\lambda(0) = 0$. $\lambda : \mathbb{R} \to]-\infty; \infty]$ convexe, semi-continue inférieurement.*

ii) $\theta \in \mathring{D}_1$,

$$\lambda'(\theta) = \frac{\mathbb{E}(Xe^{\theta X})}{\mathbb{E}(Xe^{\theta X})},$$

et

$$\lambda''(\theta) = \frac{\mathbb{E}(e^{\theta X})\mathbb{E}(X^2 e^{\theta X}) - \mathbb{E}(Xe^{\theta X})^2}{(\mathbb{E}(e^{\theta X}))^2}.$$

$\lambda''(0) = 0 \Leftrightarrow X$ constante p.s. En particulier, si $0 \in D_1$, $\lambda'(0) = \mathbb{E}(X)$, $\lambda''(0) = var(X)$.

Proposition 4.2.2 *i)* $\lambda^* : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ *convexe, sci.*

ii) $\inf_{x \in \mathbb{R}} \lambda^*(x) = 0 = \lambda^*(\mathbb{E}(X))$

iii) $\forall x \geq \mathbb{E}(X)$, $\lambda^*(x) = \sup_{\theta \geq 0}(\theta x - \lambda(\theta))$. *En particulier,* λ^* *est croissante sur* $[\mathbb{E}(X), \infty[$.

iv) Si $0 \in \mathring{D}_1$, *alors* $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R}, \lambda^*(x) \leq a\}$ *est compact.*

Proposition 4.2.3 *Supposons* $D_1 = \mathbb{R}$.

i) λ^* est strictement convexe et de classe C^∞ sur $]\lambda^*(-\infty), \lambda^*(\infty)[$.

ii) Si X n'est pas une constante, alors $(\lambda^*)''(\mathbb{E}(X)) = \frac{1}{Var(X)}$.

4.3 Principe des grandes déviations

Définition 4.3.1 (Fonction de taux) $I : S \to [0, \infty]$ *est dite une (bonne)* ***fonction de taux*** *si* $I \neq +\infty$, *et si, pour tout* $a \in \mathbb{R}$, $\{x \in S, I(x) \geq a\}$ *est compact.*

Proposition 4.3.1 I *(bonne) fonction de taux,* $F \neq \emptyset$ *fermé, alors, il existe* $x \in F$ *tel que* $I(x) = I(F)$, *où on a noté* $I(F) = \inf_F I(x)$.

Proposition 4.3.2 I *(bonne) fonction de taux* F_n *décroissante* $\forall n$, F_n *fermé, alors* $I(\cap F_n) = \lim \uparrow I(F_n)$.

Définition 4.3.2 (Principe des grandes déviations) *Soit* $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de probas sur* S. *On dit que* $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *satisfait un* ***principe de grandes déviations*** *de vitesse* n *et de bonne fonction de taux* I *si :*

i) I *est une bonne fonction de taux.*

ii) $\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log(P_n(F)) \leq -I(F)$, *pour tout fermé* $F \subset S$.

iii) $\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log(P_n(G)) \geq -I(G)$, *pour tout ouvert* $G \subset S$.

Lemme 4.3.1 *La troisième proposition est équivalente à la propriété locale suivante :*

$$\liminf \frac{1}{n} \log(P_n(B(x,r))) \geq -I(x), \ \forall r > 0, \ x \in S \ \Leftrightarrow \inf_{r>0} \liminf \frac{1}{n} \log(P_n(B(x,r)$$

Lemme 4.3.2 *Si* $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *satisfait un principe des grandes déviations , la fonction de taux est unique.*

Proposition 4.3.3 *Si* $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *satisfait un principe des grandes déviations , de fonction de taux I, alors :*

i) $\exists x^* \in S$ *tel que* $I(x^*) = 0$

ii) Si I *s'annule en un seul point* $x^* \in S$, *alors* $P_n \to \delta_{x^*}$ *étroitement.*

4.4 Retour au théorème de Cramèr

Théorème 4.4.1 (Cramèr) *Supposons* $D_1 = \mathbb{R}$, *alors* $\mathscr{L}\left(\frac{S_n}{n}\right)$ *satisfait un principe des grandes déviations sur* $\mathbb{R}$, *de vitesse* n, *et de (bonne) fonction de taux* λ^*.

Lemme 4.4.1 $M \geq 1$ *fixé,* $a_n^{(1)}, ..., a_n^{(M)}$ *des réels, alors*

$$\frac{1}{n} \log\left(\sum_{1 \leq i \leq M} a_n^{(i)}\right) - \frac{1}{n} \log\left(\max_{1 \leq i \leq M} a_n^{(i)}\right) \to_{n \to \infty} 0$$

4.5 Tension exponentielle

Définition 4.5.1 (Tension exponentielle) *On dit que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***exponentiellement tendue*** *si pour tout $M > 0$, $\exists K_M \subset S$ compact tel que*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(P_n(K^c)) \leq -M \ .$$

Définition 4.5.2 (Fonction de taux au sens faible) *$I : S \to [0, \infty]$ est une* ***fonction de taux au sens faible*** *si $I \neq$ et $\forall a \geq 0$, $\{x \in S, I(x) \leq a\}$ est fermé.*

Définition 4.5.3 (principe des grandes déviations au sens faible) *On dit que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait un principe des grandes déviations au sens faible sur S, de vitesse n, et de fonction de taux I, si :*

i) *I fonction de taux au sens faible.*

ii) $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(P_n(K)) \leq -I(K)$*, pour tout compact $K \subset S$.*

iii) $\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(P_n(G)) \geq -I(G)$*, pour tout ouvert $G \subset S$.*

Théorème 4.5.1 *principe des grandes déviations $\Leftrightarrow$ principe des grandes déviations au sens faible + tension exponentielle.*

5 Théorème de Gartner-Ellis

5.1 Théorème de Gartner Ellis en dimension finie.

On considère $Z_1, Z_2, \ldots$ vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On note $P_n = \mathscr{L}(Z_n)$, $\lambda_n(\theta) = \log(\mathbb{E}(e^{<\theta, Z_n>})) \in]-\infty, +\infty]$, $\theta \in \mathbb{R}^d$. On suppose qu'il existe $\lambda : \mathbb{R}^d \to [-\infty; +\infty]$ vérifiant :

$$(*) \quad \frac{\lambda_n(n\theta)}{n} \to_{n\to\infty} \lambda(\theta) \ .$$

$$\theta \in \mathring{D}_\lambda = \{\theta \in \mathbb{R}^d,\ \lambda(\theta) < +\infty\} \ .$$

Définition 5.1.1 (Transformée de legendre) *On définit la* ***transformée de Legendre*** *de λ par*

$$\lambda^*(x) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}^d} (< \theta, x > -\lambda(\theta)),\ x \in \mathbb{R}^d \ .$$

Définition 5.1.2 (Exposition) *$x \in \mathbb{R}^d$ est un point exposé par λ^* si $\exists \theta \in \mathbb{R}^d$, tel que*

$$\lambda^*(y) - \lambda^*(x) >< y - x, \theta > ,$$

et θ est alors appellé hyperplan exposant pour x.

Proposition 5.1.1 *Sous $(*) - (**)$*

i) *λ convexe sur $\mathbb{R}^d$, $\lambda(\theta) > -\infty$, $\forall \theta \in \mathbb{R}^d$.*

ii) *λ^* convexe, λ^* bonne fonction de taux.*

Théorème 5.1.1 (Gartner Ellis) *Supposons $(*) - (**)$*

i)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(P_n(F)) \leq -\lambda^*(F), \forall F \subset \mathbb{R}^d \text{ fermé.}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(P_n(G)) \leq -\lambda^*(G \cap E), \forall G \subset \mathbb{R}^d \text{ ouvert, où}$$

$$E = \{x \in \mathbb{R}^d, x \text{ point exposé pour } \lambda^* \text{ tel que } \exists \theta \in D_\lambda \text{ hyperplan exposant pou}$$

ii) *Si de plus $D_\lambda = \mathbb{R}^d$ et λ différentiable sur $\mathbb{R}^d$, alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satifait un PGD sur $\mathbb{R}^d$, de vitesse n, et de bonne fonction de taux λ^*.*

Lemme 5.1.1 *$\theta \in D_\lambda$, supposons λ différentiable au point θ, alors $x = \nabla\lambda(\theta)$ point exposé pour $\lambda^*, \theta*$ hyperplan exposé.*

5.2 Application au théorème de Cramèr

Théorème 5.2.1 (Cramèr) *Si* $0 \in \mathring{D}_\lambda$, *alors* $\mathscr{L}\left(\frac{S_n}{n}\right)$ *satisfait un principe des grandes déviations de vitesse* n *et de bonne fonction de taux* λ^*.

Corollaire 5.2.1 *Si* $0 \in \mathring{D}_\lambda$, *alors* $\lambda^*(x) = \infty$ *si* x *n'est pas dans l'enveloppe convexe du support de* $\mathscr{L}(X)$.

5.3 Application : Théorème de Somov

Définition 5.3.1 (Entropie) *Soit* Γ *un espace mesurable,* $\mu, \ \nu \in \mathbb{P}(\Gamma)$, *on définit* ***l'entropie relative*** *de* μ, ν, *par*

$$H(\mu \mid \nu) = \begin{cases} \int_\Gamma \frac{d\mu}{d\nu} \log\left(\frac{d\mu}{d\nu}\right) d\nu, \ \mu << \nu \\ \infty \ \textit{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 5.3.1 *i)* $H(\mu \mid \nu) \geq 0$

$$\int_\Gamma \frac{d\mu}{d\nu} \log\left(\frac{d\mu}{d\nu}\right) d\nu \geq f\left(\int_\Gamma \frac{d\mu}{d\nu} d\nu\right) = f(1) = 0$$

, pour $f = x \log x$.

ii) Si $\mu << \nu$, $H(\mu \mid \nu) = \sum_{i \in \Gamma - \{0\}} \mu_i \log\left(\frac{\mu_i}{\nu_i}\right)$.

$$H(x \mid \nu) = \begin{cases} H(x, \nu) \ \textit{si} \ x \in S^d \\ \infty \ \textit{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 5.3.1 (Somov) $\mathscr{L}(L_n)$ *satisfait un principe de grande déviations sur* $\mathbb{R}^d$, *ou* $(P(\Gamma))$ *de vitesse* n *et de bonne fonction de taux* $H(x, P)$, $x \in \mathbb{R}^d$

5.4 Applications : grandes déviations pour les chaînes de Markov

6 Principes généraux

6.1 Principe de contraction

Soient (S, d), et $(\widetilde{S}, \widetilde{d})$ espaces métriques séparables complets, et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de probabilités sur S.

Théorème 6.1.1 (Principe de contraction) *Supposons que* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfait un principe de grandes déviations sur* S, *de vitesse* n, *et de bonne fonction de taux* I. *Soit* $\varphi : S \to \widetilde{S}$, *continue, alors* $(P_n \circ \phi^1)_n$ *satisfait un principe des grandes déviations sur* $\widetilde{S}$, *de vitesse* n, *et de bonne fonction de taux* $J = I \circ \phi^{-1}$, *où* $\phi^1(y) = \inf\{x, \phi(x) = y\}$.

Lemme 6.1.1 (Varadhan) *Soit* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfaisant un principe des grandes déviations sur* S *de vitesse* n *et de bonne fonction de taux* I, *et* $f : S \to \mathbb{R}$ *continue, majorée ? Alors*

$$\frac{1}{n} \log \int_S e^{nf} dP_n \underset{n \to n\infty}{\longrightarrow} \sup_{x\in S} |f(x) - I(x)| \ .$$

Proposition 6.1.1 *Supposons que* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfait un principe des grandes déviations de vitesse* n *et de bonne fonction de taux* I. *Alors,*

i) Pour $f : S \to \mathbb{R}$ *semi continue inférieurement,* $G \subset S$ *ouvert,*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_G e^{nf} dP_n \geq \sup_{x\in G} |f(x) - I(x)| \ .$$

ii) Pour $f : S \to \mathbb{R}$ *semi continue supérieurement,* $F \subset S$ *fermé,*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_F e^{nf} dP_n \leq \sup_{x\in G} |f(x) - I(x)| \ .$$

Théorème 6.1.2 *Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant un principe des grandes déviations de vitesse n et de bonne fonction de taux I, et $f : S \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{M\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\geq M\}} e^{nf} dP_n = -\infty$. On a alors équiintégrabilité exponentielle, et*

$$\frac{1}{n} \log(\int^{nf} dP_n \underset{n\to\infty}{\to} \sup_{x\in S}(f(x) - I(x)) \ .$$

Proposition 6.1.2 *Soit $f : S \to \mathbb{R}$, continue. Supposons qu'il existe $\gamma > 1$ tel que $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int e^{\gamma n f} dP_n < \infty$. Alors, il y a équiintégrabilité exponentielle pour $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par rapport à n.*

6.2 Lemme de Bryc

Théorème 6.2.1 *Supposons que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est exponentiellement tendue sur S, et $\Lambda_f = \lim_{n\to\infty} 1/n \log \int_S e^{nf dP_n} \in \mathbb{R}$ existe, pour toute fonction $f : S \to \mathbb{R}$ continue bornée. Alors, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait un principe des grandes déviations de vitesse n et de bonne fonction de taux*

$$I(x) = \sup_{f:S\to\mathbb{R} \text{ continue bornée}} (f(x) - \Lambda_f), \ x \in S \ .$$

De plus, $\forall f : S \to \mathbb{R}$ bornée continue, $\Lambda_f = \sup_{x\in S}(f(x) - I(x))$.

7 Modèle de Curie-Weiss

Théorème 7.0.2 *Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant un principe des grandes déviations de vitesse n et de bonne fonction de taux I, $H : S \to \mathbb{R}$ continue majorée. Posons $P_{n,H} = e^{nH}/Z_{n,H}.P_n$, où $Z_{n,h} = \int_S e^{nH} dP_n$. Alors, $(P_{n,H})_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait un principe des grandes déviations de vitesse n et de bonne fonction de taux*

$$I_H(x) = I(x) - H(x) - \inf_{y\in S}(I(y) - H(y)) \ .$$

8 Théorème de Shilder

8.1 Théorème de Shilder

Théorème 8.1.1 (Shilder)