Université Pierre et Marie Curie — 2013-2014

Calcul matriciel 1M004 - groupe 23.2 — 10 mars 2014

Contrôle continu 1.

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère le système linéaire $(\mathcal{S})_m$ défini par

$$\begin{cases} (m-1)x & - & my & = & 1 \\ (m-1)x & + & 2y & = & 1 \end{cases}$$

a) Ecrire ce système sous forme matricielle.

b) Pour quelles valeurs de m le système $(\mathcal{S})_m$ admet-il une solution unique ?

c) Résoudre le système $(\mathcal{S}_m)$ pour toute valeur de m.

2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $\det(A)$, en utilisant la définition.

b) Soit $B = A - I_3$. Calculer B^2,B^3 et A^3.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Indication : On pourra procéder par récurrence ou utiliser l'écriture $A = I_3 + B$.

3.

a) Soit $(\mathcal{S})$ le système linéaire

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 1 \end{cases}$$

Résoudre le système $(\mathcal{S})$ par la méthode de Gauss.

b) Soit $A(1,0,1)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et $u = (-4,1,-5)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A et dirigée par le vecteur u. Donner une équation paramétrique de $\mathcal{D}$.

c) Montrer que les vecteurs $v = (-1,1,1)$ et $w = (2,3,-1)$ sont orthogonaux à u.

d) En remarquant que $M(x,y,z)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à v et w, donner une équation de la droite $\mathcal{D}$ sous la forme d'un système de deux équations à trois inconnues.

e) Déterminer l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z = 1$.