Université Pierre et Marie Curie — LM367

Licence de Mathématiques L3 — 2011-2012

Interrogation écrite n°1

Durée : 1 heure.

Exercice 1. Fonctions holomorphes

Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ on définit

$$P(x, y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)\,.$$

Montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe f telle que $f(0) = 0$ et $Re(f) = P$. On donnera la solution explicite sous la forme $f(z)$ (et non $f(x + iy)$).

Exercice 2. Trois déterminations du logarithme

a) Montrer qu'il existe une unique détermination du logarithme f sur l'ouvert

$$\mathbb{C}\setminus \{z \ : \ \mathrm{Re}(z) = 0 \text{ et } \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$$

vérifiant $f(1) = 0$

b) Calculer $f(-2i), f(-5), f(-1 + i)$

c) On note Log la détermination principale du logarithme. Sur quel ouvert est-elle définie ? Quel est le plus grand ouvert tel que f et Log coïncident ? De quoi diffèrent-elles sur le complémentaire de cet ouvert ?

d) Soit U le disque ouvert de centre $-2i$ et de rayon 2. On considère la fonction suivante

$$g_C(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{z + 2i}{-2i}\right)^n + C$$

Pour quelle valeur de C g_C coïncide-t-elle avec f sur U ? Avec Log ?

Exercice 3. Intégrale de Cauchy

Soit $f(z) = e^{-z^2}$. Pour $a, R > 0$ soit $\Gamma_R = \Gamma_R^0 \cup \Gamma_R^+ \cup \Gamma_R^a \cup \Gamma_R^-$ où

- Γ_R^0 est le segment allant de $-R$ jusqu'à R.
- Γ_R^+ est le segment allant de R jusqu'à $R + ia$.
- Γ_R^a est le segment allant de $R + ia$ jusqu'à $-R + ia$.
- Γ_R^- est le segment allant de $-R + ia$ jusqu'à $-R$.

On rappelle que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

a) Dessiner Γ_R et ses quatre segments (avec ses orientation) dans le plan complexe.

b) Donner sans calculs la valeur de $\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz$.

c) Montrer que

$$-\int_{\Gamma_R^a} f(z)dz = \int_{\Gamma_R^+} f(z)dz + \int_{\Gamma_R^-} f(z)dz + \int_{\Gamma_R^0} f(z)dz\,.$$

d) En utilisant la paramétrisation $[0, a] \ni t \mapsto R + it$, montrer que

$$\int_{\Gamma_R^{\pm}} f(z)\, dz \to_{R \to +\infty} 0\,.$$

e) Conclure que

$$\int_{\Gamma_\infty^a} f(z)\, dz = \sqrt{\pi}\,,$$

où Γ_∞^a est la droite horizontale passant par ia.