Université Pierre et Marie Curie — LM367

Licence de Mathématiques L3 — L 2011-2012

# Interrogation écrite n°2

*Durée : 1 heure.*

**Exercice 1.** Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer ses singularités isolées, leur nature (éliminable, pôle ou essentielle) et calculer les résidus correspondants :

a) $f(z) = \frac{z^2+4}{z^4-z^3+z^2-z}$.

b) $g(z) = \frac{z^\alpha}{1-z}$, où $z \to z^\alpha$ est la determination principale de la puissance $\alpha \in \mathbb{C}$.

c) $h(z) = \frac{z^2+5}{e^{1/z}}$.

*Solution de l'exercice* 1.

a) Les singularités de $f(z) = \frac{z^2+4}{z(z-1)(z-i)(z+i)}$ sont $0, 1, i, -i$. Il s'agit de pôles simples dont les résidus sont calculés simplement en prenant $\lim_{z \to a}(z-a)f(z)$ pour toute singularité $a$. On obtient :

$$\begin{aligned} \text{Rés}(f,0) &= -4 \\ \text{Rés}(f,1) &= \frac{5}{2} \\ \text{Rés}(f,i) &= \frac{3}{4} + \frac{3}{4}i \\ \text{Rés}(f,-i) &= \frac{3}{4} - \frac{3}{4}i \end{aligned}$$

b) La fonction $g$ est définie sur $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0] \cup 1)$. Sa seule singularité isolée dans cet ouvert est 1, qui est un pôle simple. D'après le Lemme 6.4.9 on a

$$Res(g,1) = \left.\frac{z^\alpha}{(1-z)'}\right|_{z=1} = -1\,.$$

c) La seul singularité de $h$ est 0, il s'agit d'une singularité essentielle (prendre par exemple deux suites $a_n = 1/n$ et $b_n = -1/n$, pour voir que la limite de $h$ quand $z$ tends vers zéro n'existe pas). Le développement de Laurent de $h$ dans $\mathbb{C}^*$ est :

$$(z^2+5)\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(-1)^n z^{-n}$$

Le résidu de $h$ en zéro est le terme associé à la puissance $-1$ dans le développement ci-dessus, donc

$$Res(h,0) = \frac{(-1)^3}{3!} + 5\frac{(-1)^1}{1!} = -\frac{31}{6}\,.$$

**Exercice 2.** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n > \alpha + 1 > 0$. Le but de cet exercice est de calculer

$$I_\alpha = \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^n}\, dx\,.$$

On considère $f(z) = \frac{z^\alpha}{1+z^n}$, où $z^\alpha$ est la détermination principale de la fonction puissance $\alpha$.

Soient $0 < r < 1 < R$. On définit l'ensemble $L_{r,R} = \{\rho e^{i\theta}\,;\, r < \rho < R\,,\, 0 < \theta < 2\pi/n\}$ dont le bord $\partial L_{r,R}$ est parcouru dans le sens direct.

a) Donner un ouvert simplement connexe où $f$ est méromorphe.

b) Dessiner $L_{r,R}$ dans le plan complexe.

c) Trouver les singularités de la fonction $f$ et calculer le résidu de $f$ en celles qui se trouvent à l'intérieur du contour $L_{r,R}$.

d) Donner la valeur de

$$I_{r,R} = \int_{\partial L_{r,R}} f(z)\, dz\,.$$

e) On note $J_\rho$ l'intégrale de $f$ sur l'arc de cercle d'angle $2\pi/n$ et de rayon $\rho$, paramétré dans le sens direct. Montrer que

$$I_{r,R} = \left(1 - \exp\frac{2i\pi(\alpha+1)}{n}\right)\int_r^R \frac{x^\alpha}{1+x^n}\, dx \;+\; J_R - J_r$$

f) Montrer que

$$\lim_{\rho\to 0} J_\rho = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\rho\to+\infty} J_\rho = 0\,.$$

g) Conclure que

$$I_\alpha = \frac{\pi}{n}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi(\alpha+1)}{n}\right)}$$

*Solution de l'exercice* 2.

a) Voir figure 1

b) Les singularités de $f$ sont les racines $n$-ièmes de $-1$ : $a_k = e^{\frac{i\pi(2k+1)}{n}}$, $k = 0,\dots,n-1$. La seule qui se trouve dans $L_{r,R}$ est $a_1 = e^{\frac{i\pi}{n}}$. Il s'agit d'une pôle simple de $f$, donc :

$$Res(f,a) = \left.\frac{z^\alpha}{(1+z^n)'}\right|_{z=a_1} = \frac{e^{\frac{i\alpha\pi}{n}}}{ne^{\frac{i\pi(n-1)}{n}}} = -\frac{1}{n}\, e^{\frac{i(\alpha+1)\pi}{n}}\,.$$

c) D'après le Théorème des résidus on a

$$I_{r,R} = 2i\pi\, Res(f,a_1)\times 1 = -\frac{2i\pi}{n}\, e^{\frac{i(\alpha+1)\pi}{n}}\,.$$

d) En considérant le Lemme 3.2.7 et l'intégrale sur le chemin $[re^{2i\pi/n}, Re^{2i\pi/n}]$, avec la paramétrisation $[r,R] \ni x \mapsto xe^{2i\pi/n}$, on a que

$$I_{r,R} = \int_r^R \frac{x^\alpha}{1+x^n}\, dx + J_R - e^{2i(\alpha+1)\pi/n}\int_r^R \frac{x^\alpha}{1+x^n}\, dx - J_r\,,$$

d'où le résultat.

e) On paramétrise l'arc de cercle de angle ${}^{2\pi}/_{n}$ et de rayon $\rho$ par $[0, {}^{2i\pi}/_{n}] \ni t \mapsto \rho e^{it}$. On a

$$J_\rho = i\rho^{(1+\alpha)} \int_0^{2\pi/n} \frac{e^{i(1+\alpha)t}}{1+\rho^n e^{int}}\, dt\,,$$

donc

$$|J_\rho| \leq \frac{2\pi}{n} \frac{\rho^{(1+\alpha)}}{\rho^n - 1}\,,$$

d'où le résultat car $n > \alpha + 1 > 0$.

f) D'après (c), (d) et (e), en prenant les limites $r \to 0$ et $R \to \infty$ on a :

$$\begin{aligned}
I &= \left(1 - \exp\frac{2i\pi(\alpha+1)}{n}\right)^{-1} \lim_{r\to 0\,,\, R\to\infty} I_{r,R} \\
&= \left(1 - \exp\frac{2i\pi(\alpha+1)}{n}\right)^{-1} \left(-\frac{2i\pi}{n}\, e^{\frac{i(\alpha+1)\pi}{n}}\right) \\
&= \left(e^{-\frac{i(\alpha+1)\pi}{n}} - e^{\frac{i(\alpha+1)\pi}{n}}\right)^{-1} \left(-\frac{2i\pi}{n}\right) \\
&= \frac{1}{-2i\,\sin\left(\frac{\pi(\alpha+1)}{n}\right)} \left(-\frac{2i\pi}{n}\right) \\
&= \frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi(\alpha+1)}{n}\right)}\,.
\end{aligned}$$

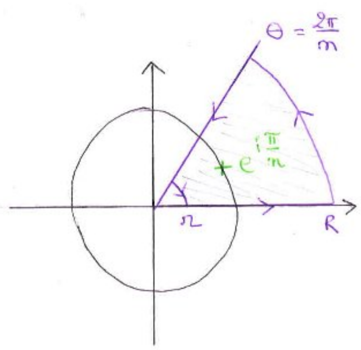


Figure 1 –