Université Pierre et Marie Curie LM367
Licence de Mathématiques L3 2011-2012

TD 10 - Séries de Laurent, Calculs de résidus

Rappel : Les développements de Laurent sont d'abord définis pour toute fonction f holomorphe sur une couronne $A(a, r, R)$, on s'intéresse ensuite plus particulièrement au cas des disques épointés : $D(a, R)\backslash\{a\} = A(a, 0, R)$.

Exercice 1.

a) Donner le développement de Laurent de $z \mapsto \frac{2z+1}{z^2+z-2}$ dans trois couronnes de centre 0.

b) Donner le développement de Laurent de $z \mapsto \frac{1}{\exp(1/z)}$

c) $0 < |a| < |b|$: trouver le développement de Laurent de la fonction $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ dans la couronne $A(|a|, |b|)$.

d) Sur quel domaine est définie la fonction

$$g(z) = ... + \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + ... + \frac{1}{z} + \frac{z}{2^2} + ... + \frac{z^n}{2^{n+1}} + ...$$

Montrer qu'elle se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ n'ayant pas de singularité en 0.

Exercice 2. Montrer que la formule suivante définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$$

(on vérifiera qu'elle est bien méromorphe sur tout compact)

Calcul de résidus

Exercice 3.

a) Calculer les résidus en $\pm i$ de $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)}$

b) Calculer le résidu en i de $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z(z^2+1))^2}$

Exercice 4. Déterminer les résidus des trois fonctions suivantes en tous leurs points singuliers :

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)} \quad g(z) = z^3 \sin\left(\frac{1}{z}\right) \quad h(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$$

Exercice 5.

a) Soit f une fonction méromorphe sur un ouvert U. Soit $a \in U$. On suppose que sur au voisinage de a, $f(z) = (z-a)^m g(z)$ pour une fonction holomorphe g telle que $g(a) \neq 0$. Calculer $Res(\frac{f'}{f}, a)$.

b) Si f est une fonction holomorphe sur Ω simplement connexe, que vaut $\int_\gamma \frac{f'}{f}$ où γ est un lacet ?

Quelques calculs d'intégrales

Exercice 6. En intégrant dans C sur un contour bien choisi, montrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin(t)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}} \qquad \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^6} = \frac{\pi}{3}$$

Un exercice qui n'a rien à voir

Rappel : le théorème de Morera Si f est continue sur un ouvert U et que son intégrale sur tout triangle est nulle, alors f est holomorphe. *Remarque : aucune hypothèse n'est faite sur l'ouvert U*

Exercice 7. Autour du principe de réflexion de Schwarz

a) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On suppose que f est holomorphe sur $U \backslash U \cap \mathbb{R}$ et continue sur U. Montrer que f est holomorphe sur U. (*on pensera au théorème de Morera*).

b) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ invariant par conjugaison complexe. On appelle

$$U^+ = \{z \in U | \mathrm{Im}(z) > 0\} \text{ et } U'^+ = \{z \in U | \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$$

Soit $f : U'^+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue, holomoprhe sur l'ouvert U^+ et prenant des valeurs réelles sur $U \cap \mathbb{R}$. Montrer que

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si} \quad \mathrm{Im(z)} \geq 0 \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{si} \quad \mathrm{Im(z)} < 0 \end{cases}$$

définit un prolongement holomorphe de f à U.

c) Soit $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et f une fonction continue sur $\bar{\mathcal{H}}$, holomorphe sur $\mathcal{H}$ et prenant des valeurs réelles sur ∂H. Montrer que si $\lim_{|z| \to \infty, z \in \mathcal{H}} |f(z)| = 0$ alors f est constante.