Université Pierre et Marie Curie — LM367
Licence de Mathématiques L3 — 2011-2012

TD 11 : Résidus et théorème de Rouché

Théorème de Rouché

Exercice 1.

a) Montrer que la fonction $f(z) = z^5 + 5z^3 + z - 2$ a trois de ses zéros dans le disque $D(0,1)$, et tous ses zéros dans le disque $D(0,3)$.

b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$. Montrer qu'il existe c dans le cercle unité tel que $|P(c)| \geq 1$.

Exercice 2.

a) Calculer $\min_{|z|=1} |ze^{-z}|$.

b) En utilisant le Théorème de Rouché et (a), montrer que, pour tout $w \in D(0, 1/e)$, il existe une et une seule solution z de l'équation $ze^{-z} = w$ dans le disque $D(0,1)$. On la note $h(w)$.

c) Pour $w \in D(0, 1/e)$ calculer l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,1)} \frac{z(1-z)e^{-z}}{ze^{-z} - w} \, dz \, .$$

d) En déduire que pour $w \in D(0, 1/e)$,

$$h(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} w^n \, .$$

Intégrales et résidus

Exercice 3. Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(x+1)}{(x^2+1)^2} \, dx \, .$$

Exercice 4. Soit $a > 0$. En appliquant la formule des résidus sur le bord d'un demi disque bien choisi, de rayon tendant vers l'infini, calculer :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2} \, dx \, .$$

Que faire pour $a < 0$?
(les probabilistes viennent de calculer la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy)

Le "Pacman"

Exercice 5.

a) Montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$ (réel), la fonction

$$g_\alpha(z) = \frac{1}{z^\alpha(1+z)}$$

définit une fonction méromorphe sur

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0 \text{ et } \mathrm{Ré}(z) \geq 0\}$$

(on pensera à bien définir la fonction puissance)

b) Quel(s) sont le(s) pôle(s) de g_α ? Calculer les résidus associés.

c) Soient ϵ, R vérifiant $0 < \epsilon < 1 < R$, notons $K_{\epsilon,R}$ le compact délimité par le demi-cercle $C_\epsilon = \{|z| = \epsilon, \mathrm{Ré}(z) \leq 0\}$, les deux segments $I^+_{\epsilon,R} = [i\epsilon, i\epsilon + \sqrt{R^2 - \epsilon^2}]$, $I^-_{\epsilon,R} = [-i\epsilon, -i\epsilon + \sqrt{R^2 - \epsilon^2}]$ et l'arc de cercle $\Gamma_{\epsilon,R} = \{Re^{i\theta}; \theta \in [-\pi, \pi]\ ,\ |\theta| \geq \theta_{\epsilon,R}\}$ où $\theta_{\epsilon,R} = \arctan\left(\epsilon/\sqrt{R^2 - \epsilon^2}\right)$. Tracer ce contour. Que vaut $\int_{\partial K_{\epsilon,R}} g_\alpha(z)dz$?

d) Que vaut $\lim_{\epsilon \to 0} \int_{C_\epsilon} g_\alpha(z)dz$? Que vaut, à R fixé, $\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Gamma_{\epsilon,R}} g_\alpha(z)dz$?

e) Donner les limites à t fixé, lorsque ϵ tend vers 0 de $(t + i\epsilon)^\alpha$ et de $(t - i\epsilon)^\alpha$ (on fera attention à l'argument) En déduire, à l'aide du théorème de convergence dominée, que pour tout $R > 1$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{I^+_{\epsilon,R}} g_\alpha(z)dz = \int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{I^-_{\epsilon,R}} g_\alpha(z)dz = e^{-2i\pi\alpha} \int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$$

f) Conclure que

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$