Université Pierre et Marie Curie | LM367
Licence de Mathématiques L3 | 2011-2012

TD 11 : Résidus et théorème de Rouché

Théorème de Rouché

Exercice 1.

a) Montrer que la fonction $f(z) = z^5 + 5z^3 + z - 2$ a trois de ses zéros dans le disque $D(0,1)$, et tous ses zéros dans le disque $D(0,3)$.

b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$. Montrer qu'il existe c dans le cercle unité tel que $|P(c)| \geq 1$.

Solution de l'exercice 1. (a) Pour la première assertion appliquer le Théorème de Rouché sur le $C(0,1)$, avec f et $g(z) = 5z^3$. Pour la deuxième assertion appliquer le Théorème de Rouché sur le $C(0,3)$, avec f et $h(z) = z^5$. (b) Raisonner par contradiction, en appliquant le Théorème de Rouché sur le $C(0,1)$, avec $f(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ et $g(z) = -z^n$. Alors $|f(z) - g(z)| = |P(z)| < 1 = |g(z)|$, et donc le polynôme f de degré $n-1$ a n racines dans $D(0,1) \Rightarrow$ contradiction.

Exercice 2.

a) Calculer $\min_{|z|=1} |ze^{-z}|$.

b) En utilisant le Théorème de Rouché et (a), montrer que, pour tout $w \in D(0, 1/e)$, il existe une et une seule solution z de l'équation $ze^{-z} = w$ dans le disque $D(0,1)$. On la note $h(w)$.

c) Pour $w \in D(0, 1/e)$ calculer l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,1)} \frac{z(1-z)e^{-z}}{ze^{-z} - w} \, dz \, .$$

d) En déduire que pour $w \in D(0, 1/e)$,

$$h(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} w^n \, .$$

Solution de l'exercice 2. Voir la Figure 1.

Intégrales et résidus

Exercice 3. Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(x+1)}{(x^2+1)^2} \, dx \, .$$

Solution de l'exercice 3. Procedure générale de l'exo 6.5.2 du poly. Ici le seul résidu de $\frac{P}{Q}(z) = \frac{z(z+1)}{(z^2+1)^2}$ dans le demi plan $\{Im(z) > 0\}$ est i. Il s'agit d'un pôle d'ordre 2, donc $Res(\frac{P}{Q}, i) = \frac{1}{1!}\left[(z-i)^2\frac{P(z)}{Q(z)}\right]'(i) = -\frac{i}{4}$. L'intégrale vaut donc $2i\pi\left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4. Soit $a > 0$. En appliquant la formule des résidus sur le bord d'un demi disque bien choisi, de rayon tendant vers l'infini, calculer :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2}\, dx\,.$$

Que faire pour $a < 0$?
(les probabilistes viennent de calculer la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy)

Solution de l'exercice 4. Si $R > 1$, on considère le chemin $C_R = [-R, R] \cup (\partial D(0,R) \cap \{Im(z) > 0\})$ parcouru dans le sens direct. La fonction f qui a z associe $\frac{e^{iaz}}{1+z^2}$ est méromorphe, des pôles simple i et $-i$. En utilisant le Lemme 6.4.9, on a

$$\text{Rés}(f, i) = \frac{e^{-a}}{2i} \qquad \text{et} \qquad \text{Rés}(f, -i) = \frac{-e^{a}}{2i}\,.$$

Le formule des résidus donne alors que

$$\int_{C_R} f(z)\, dz = \frac{e^{-a}}{2i} \times 1 + \frac{-e^{a}}{2i}$$

car i est le seul pôle inclus dans le contour et donc

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2}\, dx &= \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{iax}}{1+x^2}\, dx \\
&= \lim_{R\to+\infty} \left(\int_{C_R} f(z)\, dz - \int_{\partial D(0,R)\cap\{Im(z)>0\}} f(z)\, dz \right) \\
&= \frac{e^{-a}}{2i} - \lim_{R\to+\infty} \int_{\partial D(0,R)\cap\{Im(z)>0\}} f(z)\, dz\,.
\end{aligned}$$

Pour $z \in \partial D(0,R) \cap \{Im(z) > 0\}$, on a :

$$|f(z)| \leq \frac{e^{-aIm(z)}}{R^2-1} \leq \frac{1}{R^2-1}$$

la dernière inégalité étant vraie car $a > 0$. Donc, en utilisant le Lemme 3.2.7, la dernière intégrale peut être majorée par

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial D(0,R)\cap\{Im(z)>0\}} f(z)\, dz \right| &\leq \pi R \times \|f\|_{|z|=R, Im(z)>0} \\
&\leq \frac{\pi R}{R^2-1} = o_{R\to\infty}(1)\,.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2}\, dx = \frac{e^{-a}}{2i}\,.$$

Pour $a < 0$ on intègre sur le demi-disque situé sous l'axe réel (on pourra alors majorer $|f(z)|$ de la même façon), et on obtient $\frac{e^{a}}{2i}$ pour la valeur de l'intégrale (cette fois-ci $-i$ est le seul pôle dans le contour).

Le "Pacman"

Exercice 5.

a) Montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$ (réel), la fonction

$$g_\alpha(z) = \frac{1}{z^\alpha(1+z)}$$

définit une fonction méromorphe sur

$$\mathbb{C} \backslash \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0 \text{ et } \mathrm{Ré}(z) \geq 0\}$$

(on pensera à bien définir la fonction puissance)

b) Quel(s) sont le(s) pôle(s) de g_α ? Calculer les résidus associés.

c) Soient ϵ, R vérifiant $0 < \epsilon < 1 < R$, notons $K_{\epsilon,R}$ le compact délimité par le demi-cercle $C_\epsilon = \{|z| = \epsilon, \mathrm{Ré}(z) \leq 0\}$, les deux segments $I^+_{\epsilon,R} = [i\epsilon, i\epsilon + \sqrt{R^2 - \epsilon^2}]$, $I^-_{\epsilon,R} = [-i\epsilon, -i\epsilon + \sqrt{R^2 - \epsilon^2}]$ et l'arc de cercle $\Gamma_{\epsilon,R} = \{Re^{i\theta}; \theta \in [-\pi, \pi]\ ,\ |\theta| \geq \theta_{\epsilon,R}\}$ où $\theta_{\epsilon,R} = \arctan\left(\epsilon/\sqrt{R^2 - \epsilon^2}\right)$. Tracer ce contour. Que vaut $\int_{\partial K_{\epsilon,R}} g_\alpha(z)dz$?

d) Que vaut $\lim_{\epsilon \to 0} \int_{C_\epsilon} g_\alpha(z)dz$? Que vaut, à R fixé, $\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Gamma_{\epsilon,R}} g_\alpha(z)dz$?

e) Donner les limites à t fixé, lorsque ϵ tend vers 0 de $(t + i\epsilon)^\alpha$ et de $(t - i\epsilon)^\alpha$ (on fera attention à l'argument) En déduire, à l'aide du théorème de convergence dominée, que pour tout $R > 1$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{I^+_{\epsilon,R}} g_\alpha(z)dz = \int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{I^-_{\epsilon,R}} g_\alpha(z)dz = e^{-2i\pi\alpha} \int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$$

f) Conclure que

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

Exercice 3. 1) On a $\min_{|z|=1} |z\mathrm{e}^{-z}| = \min_{|z|=1} \mathrm{e}^{-z} = 1/\mathrm{e}$. Si $w \in D(0, 1/\mathrm{e})$, on a :

$$|z| = 1 \ \Rightarrow |z\mathrm{e}^{-z} - (z\mathrm{e}^{-z} - w)| = |w| < |z\mathrm{e}^{-z}|.$$

Compte tenu du théorème de Rouché, la fonction $z \mapsto z\mathrm{e}^{-z} - w$ a le même nombre de zéros dans le disque $D(0,1)$ que la fonction $z \mapsto z\mathrm{e}^{-z}$, donc un seul zéro, simple. On le note $h(w)$.

2) Soit $w \in D(0, 1/\mathrm{e})$. D'après ce qui précède, la fonction $z \mapsto z(1-z)\mathrm{e}^{-z}/(z\mathrm{e}^{-z} - w)$ est holomorphe au voisinage du disque fermé $\overline{D}(0,1)$, sauf au point $z = h(w)$ où elle a au plus un pôle simple. Son résidu en ce point est

$$z(1-z)\mathrm{e}^{-z}/((1-z)\mathrm{e}^{-z}) = z = h(w).$$

Compte tenu du théorème des résidus, on obtient :

$$|w| < 1/\mathrm{e}, \qquad h(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,1)} \frac{z(1-z)\mathrm{e}^{-z}}{z\mathrm{e}^{-z} - w}\, dz.$$

3. Pour $w \in D(0, 1/\mathrm{e})$ fixé, on a $|w|/|z\mathrm{e}^{-z}| \leq \mathrm{e}|w| < 1$ pour tout $z \in \partial D(0,1)$. On a donc, *avec convergence normale sur* $\partial D(0,1)$:

$$|z| = 1, \qquad \frac{z(1-z)\mathrm{e}^{-z}}{z\mathrm{e}^{-z} - w} = (1-z)\left(1 - \frac{w}{z\mathrm{e}^{-z}}\right)^{-1} = (1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{z^n \mathrm{e}^{-nz}}.$$

En intégrant terme à terme, on obtient $h(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n w^n$ avec

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,1)} (1-z) z^{-n} \mathrm{e}^{nz}\, dz = \text{rés}\left((1-z)\mathrm{e}^{nz} z^{-n}, 0\right).$$

Donc a_n $(n \geq 1)$ est le coefficient de z^{n-1} dans le développement de $\mathrm{e}^{nz} - z\mathrm{e}^{nz}$, soit $a_n = n^{n-1}/(n-1)! - n^{n-2}/(n-2)! = n^{n-2}/(n-1)! = n^{n-1}/n!$.
Finalement $h(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{n-1} w^n / n!$. On vérifie avec le test de d'Alembert que le rayon de convergence de cette série entière est $1/\mathrm{e}$.

FIGURE 1 – Solution de l'exercice .